Guía para el Profesor

MATEMÁTICAS II

La Guía para el Profesor, Matemáticas II. Fue elaborado en el Plantel Oriente, de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México.

Coordinación

Jaime Ramírez Sánchez
Tomás Espinosa Martínez

Autores

Jaime Ramírez Sánchez
Tomás Espinosa Martínez
Juan José Hernández González

Asesores académicos

Jaime Ramírez Sánchez
Tomas Espinosa Martínez

Colaboradores

Juan José Hernández González

Ángel Ignacio Rodríguez Chávez

Miguel Ángel Rodríguez Padilla

María del Rosario Barrón Fernández

Mario Guillermo Estrada Hernández

José Pérez Chávez

Jesús Rocha Santana**

Artemio Evangelista Calixto *

Enrique López Jiménez **

Coordinación Editorial

Tomas Espinosa Martínez
Jaime Ramírez Sánchez

Diseño

Tomás Espinosa Martínez
Jaime Ramírez Sánchez

Primera edición, 2018 (ciclo escolar 2018 - 2019)

D.R. ©Universidad Nacional Autónoma de México, Plantel Oriente2012,

Av. Canal de San Juan S/N, Colonia Tepalcates.
CP 09865, México, D.F.

Impreso en México DF.
DISTRIBUCIÓN AUTORIZADA PARA SU VENTA EN: Folletería del CCH Plantel Oriente.

Presentación

El Grupo de trabajo institucional ha preparado esta Guía para los profesores de *Matemáticas II del Plantel Oriente de la UNAM, y lo entrega a sus profesores como un apoyo que busca la consolidación de la calidad de la educación.*

En su primera edición en 2018, esta Guía para el Profesor. Matemáticas II. Fue concebido como un primer esfuerzo de fortalecimiento del trabajo docente de los profesores de Matemáticas de educación media superior; al que se le han venido sumando otros materiales de apoyo como La Guía para el Profesor de Matemáticas I y próximamente la Guía para el Profesor Matemáticas III.

A la partir de la producción de materiales de apoyo, el Grupo de Trabajo revisa constantemente los materiales que entrega a los profesores; para ello toma en cuenta los comentarios de los profesores, las exigencias que se presentan en la Sociedad y los avances en el campo de la educación matemática y del software de matemáticas (preferentemente libre), como apoyo para su aprendizaje.

En esta Guía para el Profesor, Matemáticas II. Se enriquecen las cuatro unidades en su enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el Plan y Programas de estudio actualizado (2016). Sustentada en la experiencia acumulada de la docencia cotidiana, por ejemplo: se agregó a la estructura problemas diversos resueltos en el software de Geogebra, la hoja de cálculo Excel y el uso del software de Derive versión 6, se organizaron las actividades que contienen problemas.

El profesor podrá encontrar en esta Guía orientaciones concretas respecto al tratamiento de los contenidos matemáticos para cada una de las cuatro unidades en que están organizados los temas en los programas de estudio, así como diversas actividades y problemas que fueron diseñados para los alumnos de educación media superior (modalidad CCH).

En la Guía de profesor de matemáticas II, se tomó en cuenta el programa de la asignatura; los aprendizajes, las temáticas y de cómo abordarlos a través de las estrategias. De esta forma se abordan los aprendizajes que presentan mayores y más frecuentes dificultades para los alumnos.

Esta Guía no pretende señalar al profesor lo que debe hacer en cada una de sus clases. El reconocimiento de la experiencia y la creatividad del profesor se consideraron como el punto de partida para la preparación de este material. Por esta razón, las propuestas didácticas que se incluyen son abiertas al criterio del profesor, ofreciéndole amplias posibilidades de adaptación a la forma de trabajo propia de cada profesor, de acuerdo a las condiciones en que labora y a las necesidades y dificultades de aprendizaje de los alumnos.

Las subsiguientes ediciones de esta Guía deberán ser corregidas y mejoradas a partir de los resultados de su utilización en la práctica. Para lograr este propósito se invita a los profesores a enviar sus observaciones y propuestas a este Grupo de trabajo.

Introducción

La Guía para el Profesor de Matemáticas II es un material de apoyo dirigido a los profesores que imparten la asignatura, del segundo semestre de la educación media superior del CCH plantel Oriente, en él se desarrolla el enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto por el Plan y programas de estudio. El material Cuenta con cuatro unidades didácticas para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, álgebra y geometría.

El propósito principal de esta Guía es enriquecer los recursos de que dispone el profesor para ayudar a sus alumnos a estudiar Matemáticas, Álgebra y Geometría. El enfoque didáctico actual revalora el trabajo profesional del profesor, en tanto que su labor no se limita a transferir información y calificar el desempeño de sus alumnos, sino que implica, sobre todo, analizar situaciones relacionadas con los contenidos, organizar y seleccionar las actividades en las Secuencias Didácticas que favorezcan el aprendizaje y la evolución de los procedimientos de los alumnos, al plantear problemas, socializar diferentes estrategias de resolución y evaluar diferentes aspectos del proceso didáctico.

En cada unidad didáctica del PEA y ajustado de la materia de Matemáticas II, se explican los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación media superior, así como algunos aspectos del enfoque didáctico como el papel de los problemas, el trabajo colegiado de los estudiantes (trabajo en equipo), la confrontación, el papel del profesor y la evaluación del aprendizaje, entre otros. En todas las cuatro unidades se dan orientaciones concretas respecto al tratamiento didáctico de los contenidos señalados en los programas de estudio, así como una abundante colección de actividades y problemas que el profesor, con base en su experiencia y creatividad, podrá modificar, enriquecer y llevar a cabo en su salón de clases.

La Estructura de las Unidades Temáticas

Cada una de las unidades referidas a las áreas temáticas inicia con un apartado en el que se ubica el área de estudio en el contexto del programa de Matemáticas II, presentando, los aprendizajes, la temática y la estrategias sugeridas para lograr los aprendizajes, además en cada una de las unidades se presentan un apartado introductorio, previo a éste, donde se reseña (en algunos casos) brevemente el desarrollo histórico de algunas ramas de la matemática

Las ideas desarrolladas en cada una de las unidades, corresponde a una secuencia didáctica que abarca toda la unidad temática del programa de estudios de matemáticas I, conteniendo objetivos de aprendizaje, estrategias para para obtener los aprendizajes en los tiempos señalados, ejemplos, actividades de aprendizaje y de refuerzo, bibliografía (clásica a través de libros y otra correspondiente a las tecnologías de la educación (TIC) a través de los enlaces a diversos sitios en internet)y una evaluación del aprendizaje. De estos apartados se acompañan de problemas que concretan lo expuesto, el discurso del material didáctico es constantemente reforzado por los problemas que ejemplifican lo que se está diciendo. Por ello es recomendable realizar primero una lectura general de cada unidad y después una lectura cuidadosa de cada apartado, en el cual se analicen los problemas planteados.

Los distintos materiales de apoyo como un paquete integrado didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas II.

Si bien esta Guía puede ser utilizada de manera independiente, se recomienda concebirlo como parte del paquete básico de materiales de apoyo que el Grupo de trabajo institucional ofrece a los profesores de matemáticas de educación media superior. Algunas de las actividades y problemas propuestos pueden ser adaptadas por los profesores para diseñar secuencias didácticas, como se hizo en cada una de las cuatro unidades temáticas de Matemáticas II con actividades didácticas a realizar por los alumnos en equipos.

Por otra parte, la Secuencia y organización de contenidos. Guía para el Profesor. Matemáticas II. Educación media superior ubica en cada una de las unidades temáticas propuestas, los problemas ejemplo o resueltos y actividades planteadas aquí a fin de darle coherencia al proceso de estudio que desarrollan los alumnos durante los siguientes semestres escolares restantes de educación media superior.

Enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación media superior

La importancia de las matemáticas en la vida diaria

El hombre, como género humano, siempre ha tenido la necesidad de explicarse el mundo y las cosas que en él ocurren. Desde que aprendió a usar el conjunto de los números naturales, incluyendo el cero, hasta la teoría del caos, el ser humano ha expresado por medio de las matemáticas su capacidad creativa, su necesidad de evolución y trascendencia.

Desde hace varios años, las matemáticas son una herramienta fundamental para el desarrollo de las disciplinas científicas y técnicas (medicina, ingenierías, incluso las disciplinas sociales). Asimismo la industria, la prestación de servicios a gran escala, los medios de comunicación, el deporte de alto rendimiento, la música y el arte recurren, día a día, cada vez más a las matemáticas.

El vertiginoso desarrollo de nuevas tecnologías, como las computadoras y su software, se debe, sin duda, a las matemáticas en su entendimiento y aplicación.

Por ello, una de las características de las matemáticas en la actualidad es su uso en prácticamente todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y la prestación de servicios.

El ser humano tiene la necesidad constante de crear y fortalecer sus conocimientos matemáticos, y esto es cierto tanto para los profesionales y los especialistas en diversas disciplinas, como para el ciudadano común.
Acorde con esta realidad, las matemáticas son, hoy en día, una de las ciencias más desarrolladas, dinámicas y aplicadas; a partir de problemas que surgen en otras disciplinas, nuevas teorías son creadas para encontrarles solución. También aparecen dentro de su seno, nuevas formas de ver y atacar viejos problemas, desarrollándose así tanto las matemáticas puras como las aplicadas.
Hoy en día, no es posible trazar una separación clara entre ambos tipos de matemáticas, ya que los problemas prácticos conducen con frecuencia a teorías que aparecen completamente alejadas de sus aplicaciones, mientras que las matemáticas puras modifican nuestra visión de la realidad y nos hacen descubrir nuevas aplicaciones y problemas concretos donde antes no los vislumbrábamos.

La matemáticas no es ocupación exclusiva de un grupo reducido de especialistas, a su creación contribuye el quehacer colectivo de las sociedades. Un ejemplo lo constituye el desarrollo de los sistemas de numeración y el uso de las geometrías, en el arte decorativo y en la arquitectura de la antigüedad. Este aspecto de la matemática tiene implicaciones importantes para la educación: el estudio y la creación de la matemática está al alcance de todo ser humano.

Propósitos del estudio, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación media superior

En este contexto, el estudio de la matemática en la educación media superior es fundamental para la formación de los estudiantes.
En el proceso de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación media superior persigue propósitos esencialmente formativos que consisten en:

• Desarrollo de habilidades
• Promover actitudes propositivas
• Adquirir conocimientos matemáticos significativos

Estos propósitos forman un todo en relación dialéctica, es decir, que el avance o retroceso de uno de ellos repercute, de alguna manera, en otro.
Aquí se han listado solamente con fines de organización y no para señalar una Jerarquía de estos.

1. *Desarrollar habilidades*

Como se señala en el Programa de Estudios Actualizado (PEA), se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de descubrimiento y socialización del conocimiento, para que puedan aprender a aprender, permanentemente y con independencia, así como, aprender a ser, y aprender a hacer, resolver problemas matemáticos de diversa índole.
Es frecuente que el término habilidad se confunda con los de capacidad y destreza. Para nuestros fines, hablamos de capacidades cuando nos referimos a un conjunto de disposiciones de tipo genético que, una vez desarrolladas por medio de la experiencia que produce el contacto con un entorno culturalmente organizado, darán lugar a habilidades individuales.
En el contexto de aprender a hacer, las habilidades son las posibles variaciones individuales, en el marco de las capacidades, que pueden expresarse en conductas en cualquier momento, porque han sido desarrolladas por medio de su uso, y que además pueden utilizarse o ponerse en juego, tanto consciente como inconscientemente, de forma automática.

Por destreza nos referiremos a la agilidad que pueden tener los estudiantes en la aplicación de ciertas técnicas operatorias.
En la Guía para el profesor, se busca desarrollar, de entre otras:

- La habilidad para calcular, que consiste en establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados.

- La habilidad para resumir, que se refiere a la posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema.
- La habilidad de socializar, que implica utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa.
- La habilidad de medir, que se refiere a establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masa, etcétera.
- La habilidad de abstraerse, que implica el trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales.
- La habilidad de estimar, que se refiere a encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas.
- La habilidad de generalizar, que implica el descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados.
- La habilidad para deducir, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar Razonamientos para demostrar teoremas sencillos.

2. *Promover actitudes propositivas*

Los valores de las personas se expresan de diversas maneras y por distintos medios; lo que hacemos, decimos, sentimos y pensamos refleja de alguna manera los valores que hemos asumido en la vida, estas expresiones se manifiestan por medio de las actitudes.
Por actitud entendemos la conducta que se manifiesta de manera espontánea. En este sentido nos interesa que los estudiantes muestren interés ante la matemática, para ello, en y desde la clase de matemáticas es necesario fomentar actitudes como:

• La colaboración y socialización de ideas, que implica asumir la responsabilidad de un trabajo en equipo.
• El respeto al expresar ideas y escuchar las de los demás.
• La investigación, que significa buscar y verificar diferentes estrategias para resolver problemas.

• La perseverancia la entendemos como el llevar a buen término el trabajo aun cuando los resultados no sean los óptimos.
• La autonomía al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y resultados.
• Una sana autoestima, que implica reconocer el valor del trabajo propio, para fortalecer la seguridad personal.

3. Adquirir conocimientos matemáticos significativos

Por supuesto que la clase de matemáticas tiene como tarea específica el estudio de la disciplina, pero no en el sentido de formar pequeños matemáticos, sino de consolidar el proceso de formación básica a fin de lograr una cultura matemática significativa y funcional, es decir, que puedan usarla en las diversas actividades que realizan cotidianamente.
Los temas que se estudian en Matemáticas II se presentan en el PEA ajustado agrupados en cuatro unidades temáticas.
Estas unidades de contenido que a la vez son partes del Algebra y de la geometría plana, aglutinan y le dan cierta dosis de formalidad a los ejes temáticos que se estudian en matemáticas de I a IV. Así, mientras en el primer semestre hay un eje que se llama los números, sus relaciones y sus operaciones, en el estudio se circunscribe al estudio del número y algunas relaciones aditivas y multiplicativas muy simples. Mientras que en la educación media superior Aritmética no sólo incluye a los números, sus relaciones y sus operaciones sino también a los procesos de cambio.
Un ejemplo más es el de los ejes de Geometría y Medición limitados a ciertas relaciones espaciales, características generales de figuras y cuerpos y escasas magnitudes muy ligadas a la vida de los estudiantes. Mientras que en la educación media superior, todo ello se aglutina en el área de Geometría, y trasciende al estudio de ciertas nociones de trigonometría.
Para el logro de estas metas, el Plan y programa de estudio. Matemáticas II , presenta un enfoque didáctico, el cual se detalla aquí.

Consolidar el proceso de estudio de las matemáticas iniciado en Matemáticas I a IV

Cuando los estudiantes llegan a la asignatura de Matemáticas I, ellos ya traen determinados habilidades, conocimientos y actitudes, en el campo de las matemáticas; por ejemplo, han aprendido a comunicar e interpretar, han explorado diversas situaciones con las operaciones básicas, han utilizado las fracciones y los decimales; han estudiado algunas propiedades de las figuras y cuerpos geométricos y han aprendido a organizar la información usando y tablas y gráficas, entre otras cosas.

En el estudio de la matemática es necesario que las actividades y problemas que se propongan consoliden el proceso de estudio iniciado en secundaria , consideren el desarrollo intelectual de los estudiantes, los procesos que siguen y las dificultades que enfrentan para adquirir dichos conocimientos y, a su vez, enlacen las experiencias y aprendizajes adquiridos en la vida cotidiana, y la forma en que han arribado a ellos, con el estudio de los temas de matemáticas señalados en los programas de estudio.
En todo el tronco común, es decir de Matemáticas I a IV se mantiene el mismo enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el que la resolución de problemas juega un papel fundamental.

El papel de los problemas en el estudio de la matemática.

Hablar de resolver problemas puede parecer no del todo novedoso, ya que los problemas matemáticos han estado presentes desde hace mucho tiempo en cualquier curso de matemáticas. Con la propuesta actual se intenta superar el estilo docente fuertemente arraigado en el que los problemas son el lugar de aplicación de los procedimientos y técnicas aprendidas previamente, es decir, un

estilo docente en el que el profesor resuelve problemas frente a los alumnos y éstos sólo tratan de reproducir lo que hace el profesor.
Durante mucho tiempo imperó la idea que el aprendizaje de la matemática se logra proporcionando a los alumnos primero definiciones y procedimientos de problemas modelo explicados por el profesor, o tomados de un libro de texto, haciendo que posteriormente los alumnos ejerciten una y otra vez dichos procedimientos hasta lograr que los puedan repetir con el mínimo de errores.
Bajo este esquema se plantean problemas matemáticos como un enunciado escrito que debe ser completado con un dato, y fuera de un contexto que permita descubrir su significado y utilidad, es decir problemas en los que se aplica un mecanismo predeterminado ya conocido. En la misma tónica se cree que en la enseñanza al profesor le corresponde directamente el aprendizaje de los alumnos, el profesor es quien tiene los conocimientos y los debe transmitir a quienes con sólo escuchar explicaciones, memorizar conceptos y definiciones y ejercitarse resolviendo una gran cantidad de ejemplos del mismo tipo, habrán aprendido matemáticas.
La experiencia demuestra que esto no es así, la enseñanza de la matemática tratada de esta forma se fue convirtiendo para los alumnos en algo incomprensible, tedioso, alejado de sus necesidades e intereses y con una cada vez mayor animadversión. Una manifestación de esta situación la encontramos cuando un alumno pregunta a su profesor:
¿Y esto para qué sirve? …
Diversas investigaciones han demostrado que con este estilo docente los alumnos no logran conocimientos significativos; los conceptos y procedimientos explicados por el profesor les resultan ajenos, carentes de sentido y significado, por lo que ha sido necesario invertir el proceso en que tradicionalmente se ha procedido.
Un aprendizaje significativo de la matemática no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos.

Con base en la propuesta curricular actual se pretende arribar a un estilo docente en el que el profesor organice el proceso de estudio analizando y eligiendo situaciones problemáticas para dejarlas en manos de los estudiantes y una vez que éstos han encontrado formas de resolver el problema, favorezca la socialización y confrontación para seguir avanzando.

El profesor en su papel de guía puede y debe, en ciertos casos, enriquecer los hallazgos de los estudiantes. La ventaja es que en estos casos, las explicaciones que agrega el profesor no quedan desligadas de los saberes previos de los estudiantes y en consecuencia dejan de tener el carácter de recetas mágicas inventadas por algún sabio.

No se pretende hacer fácil la matemática (¿será esto posible?), sino de provocar el interés por su estudio y lograr aprendizajes significativos proponiendo situaciones interesantes, que impliquen "un reto al estudiante" y que en su proceso de resolución logren ir aprendiendo y consolidando diversas nociones, así como el uso de los procedimientos convencionales y de distintos recursos como tablas y gráficas, al tiempo que se apropian del lenguaje matemático.
Por problema nos referimos a una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas.
Para ello es necesario que los problemas que se propongan a los estudiantes:

- Sean para ellos un reto interesante y provoquen rápidamente una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles estrategias de resolución.
- Les permita explorar las relaciones entre nociones conocidas y posibilite avanzar hacia la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.

- Contengan los elementos que permitan validar sus propias conjeturas, procedimientos y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

<u>Enfrentar a los estudiantes a problemas propicia que:</u>

• Construyan sus conocimientos al usar estrategias convencionales y no convencionales que los resuelvan.

- Apliquen y profundicen los conocimientos adquiridos anteriormente.

El ambiente de estudio en el aula

Como ya se ha dicho, los estudiantes no deberán ser meros receptores pasivos de las explicaciones del profesor, o solamente ejercitarse en la aplicación de las técnicas y procedimientos convencionales, es necesario ceder el papel protagónico de la clase a los estudiantes. Se pretende que el profesor seleccione y plantee problemas de acuerdo con los propósitos y deje que los estudiantes los resuelvan sin indicarles caminos preestablecidos; ante un problema, los estudiantes deberán aprender a expresar sus ideas, ya sea de manera oral o escrita, y explicar a sus compañeros cómo lograron resolverlo, a discutir defendiendo sus estrategias de resolución, así como a reconocer sus errores.

La clase de matemáticas debe ser un espacio de libertad con responsabilidad, el cual depende en gran medida del profesor. Las actividades en clase deberán realizarse en un ambiente estimulante, de colaboración y respeto mutuo, donde los estudiantes tengan la oportunidad de expresar su pensamiento, comunicar y discutir sus ideas, sin temores, al mismo tiempo que se apropian gradualmente del lenguaje y de los medios de expresión que proporcionan la matemática, por ejemplo, el uso de símbolos y los diversos modos de representación gráfica o en tablas.

La comunicación de ideas, tanto en forma oral como escrita, juega un papel importante en el aprendizaje de la matemática porque exige de los estudiantes una comprensión más profunda de los conceptos y principios involucrados, al mismo tiempo que el profesor conoce el razonamiento que siguen los estudiantes para resolver un problema, lo que le permite determinar las actividades que refuercen el estudio de algún contenido o proponer situaciones para favorecer la adquisición de nuevos conocimientos y continuar el proceso de estudio.

El profesor debe ser muy respetuoso con los estudiantes en todos los sentidos, escuchando atentamente a todos por igual, y promoviendo la mayor participación posible, así como el respeto entre ellos mismos.

La forma en que el profesor trata a los estudiantes, la forma en que se dirige a ellos, les dejará, ciertamente, una profunda huella.

En algunos momentos el estudio que se desarrolla durante la clase de matemáticas requerirá del movimiento de los estudiantes dentro o fuera del aula, por ejemplo, al trabajar en equipos, estos se deberán integrar de acuerdo al espacio y mobiliario disponible, se sugiere que sean tres alumnos por equipo (esto sería lo óptimo, sin embardo debido a las limitaciones del espacio y mobiliario , lo mejor es trabajar con equipos de dos personas), de esta manera se podría evitar que se formen parejas y que estas se distraigan de su quehacer académico. Aunque por limitaciones de espacio y mobiliario, necesariamente el trabajo deberá organizarse en parejas Es conveniente desarrollar alguna actividad en la que se requiera desplazarse, así como también es muy natural el ruido provocado por las interacciones de los alumnos, se debe tolerar y soportarse. El profesor no debe preocuparse por mantener una disciplina rígida que no permita la participación de sus alumnos.

El tipo de situaciones problemáticas propuesto

Para seleccionar un problema y plantearlo en la clase es necesario que el profesor tenga claro qué propósito se persigue; que haya resuelto el problema antes de plantearlo a los estudiantes, haga las adecuaciones que considere convenientes, prevea el material que utilizarán y la forma en que organizará al grupo en equipos.

Es común escuchar que para el estudio de la matemática se debe recurrir a problemas de la vida cotidiana, con el fin de despertar el interés de los estudiantes y que perciban la utilidad de las matemáticas. Si bien esto es cierto, no hay que olvidar que existen otras situaciones divertidas e interesantes que también se pueden aprovechar para que los alumnos construyan y avancen en sus conocimientos, por ejemplo, los juegos matemáticos; situaciones asociadas con la fantasía, y los problemas puramente numéricos, algebraicos o geométricos, y también problemas históricos de matemáticas.

Enfrentar a los estudiantes a un problema de la vida cotidiana no resulta del todo fácil, porque se puede plantear problemas muy sencillos y limitados o muy complejos, que al final de cuentas resolverá el profesor; en otras ocasiones los problemas propuestos contienen muchas variables que se discriminan, convirtiendo las situaciones reales en situaciones ficticias.

En las cuatro unidades de esta Guía, el profesor encontrará una gran cantidad de problemas en contextos muy variados. La mayoría de estos problemas fue diseñada para los alumnos. En Secuencias Didácticas.

Conviene que el profesor varíe la presentación de los problemas. Puede, por ejemplo, mostrar ilustraciones a partir de las cuales se formulen preguntas, también puede plantear problemas a partir de situaciones presentadas en el software de apoyo, que se encuentran en la sala de computo del y con los coordinadores de la Guía para el Profesor de Matemáticas II.

Algunas veces, la actividad puede consistir en que los estudiantes elaboren preguntas que se resuelvan con la información contenida en el material Guía de profesor, en una ilustraciones o dibujos ; otras veces, el profesor puede plantear problemas a partir de la manipulación de material de manera concreta en la Guía de profesor , abordándolos, después de que el estudiante lo ha resuelto el problema con lápiz y papel, con el uso de la calculadora y/o utilizando ciertos programas (Software; Geogebra, Excel y Derive) en la computadora.

Se recomienda que el profesor seleccione la actividad del material Guía de profesor y proponga problemas que tengan diferentes método de solución, a fin de que los estudiantes valoren las variantes que ocasionan esta diversidad de métodos y que no piensen que todos los problemas tienen solamente una forma única de solución.

El juego como recurso didáctico

Jugar es una actividad interesante para las personas de diferentes edades y es una parte importante en la vida de los adolescentes. En la educación media superior se pueden aprovechar diversos juegos para favorecer el aprendizaje de la matemática.

Pero hay que estar atentos, pues si bien los juegos son situaciones que resultan divertidas e interesantes para los alumnos, no todos los juegos favorecen la construcción de conocimientos matemáticos.

Para aprovechar las posibilidades que ofrecen algunos juegos, el profesor debe cuidar de no convertirlos simplemente en situaciones recreativas para pasar el rato y mucho menos para perder el tiempo. Cuando los estudiantes juegan se divierten, platican, discuten y hacen ruido, pero no hay que perder de vista el propósito que se persigue al plantear determinado juego, y así lograr hacer matemáticas de una manera agradable.

Algunos padres de familia y profesores se preocupan de que los estudiantes jueguen durante la clase debido a que desconocen las ganancias que se obtienen, por ejemplo, el juego implica competencia, y en el afán de ganar los estudiantes tienden a ser autónomos, construyen sus propias estrategias y analizan cuidadosamente sus resultados. Los problemas que el profesor proponga por medio de los juegos deberán ser retos interesantes a partir de los cuales analicen lo que ocurre en la situación y encuentren la mejor estrategia para ganar, introduciendo o profundizando ciertas nociones.

Materiales Secuencias Didácticas y las Nuevas Tecnologías (Las TICS y Las TACS)

Actualmente existe una gran variedad de recursos que pueden utilizarse en la clase de matemáticas para plantear situaciones problemáticas interesantes, por ejemplo, en el Software Geogebra. Cada uno de ellos ofrece particulares ventajas que pueden favorecer el estudio de la matemática en la educación media superior, si son utilizados adecuadamente. Uso de la hoja de cálculo Excel para generar tablas y graficas de ecuaciones junto con el uso del Derive 6 para facilitar las soluciones algebraicas de una gran cantidad de problemas,

Es importante que al utilizar estos recursos no se pierda de vista su carácter mediador y su uso se convierta en un fin en sí mismo. La función de los materiales manipulables y las nuevas tecnologías es servir como instrumentos para plantear nuevos problemas o para favorecer una mayor reflexión en torno a problemas planteados.

Con base en el tema que se esté estudiando y en función del problema por resolver, el profesor tendrá que decidir la pertinencia de usar uno u otro material. Hoy día se resalta en muchos ámbitos educativos el uso de las nuevas tecnologías en el aula: el video, la calculadora y la computadora.

El video, por su potencial comunicativo y por su facilidad de uso, se ha convertido en un recurso didáctico valioso. En la clase de matemáticas el video permite visualizar situaciones que de otra manera no sería posible acceder a ellas. Estas situaciones son una fuente rica en problemas que el profesor puede plantear a sus alumnos. En la Guía, se presentan algunos temas de matemáticas usando enlaces de sitios en Internet, tales como YouTube, Proyecto Descartes Proyecto Gauss, KhanAcademy, Wolframalpha, El portal académico del CCH, Red Universitaria de Aprendizaje (RUA UNAM)

El uso de la calculadora es una potente herramienta de cálculo, usada de manera adecuada, se utiliza con mucha frecuencia fuera de la escuela, y que puede ser usada por el profesor como un ambiente para plantear diversas actividades y problemas. Por ejemplo, el profesor puede plantear problemas interesantes y juegos con algunas restricciones, para que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades de las operaciones básicas y exploren propiedades de los números. En otros casos, la calculadora favorece que los estudiantes se centren en los procesos de resolución de un problema más que en los cálculos mismos; descubran patrones en sucesiones numéricas; verifiquen sus resultados de manera inmediata. En otras palabras, la calculadora puede ser utilizada para retroalimentar el aprendizaje, profundizar algunas nociones y desarrollar ciertas habilidades.

• Las computadoras son procesadores de información que posibilitan el uso de diversos programas (software) útiles para el estudio de la matemática.

Conviene que el profesor use computadoras para plantear situaciones problemáticas interesantes a los estudiantes. La hoja electrónica de cálculo Excel permite trabajar con tablas y gráficas para realizar un tratamiento de información útil para modelar diversas situaciones problemáticas. Para geometría existen diversos programas como Geogebra, Cabri o El geómetra (The Geometer´s Sketchpad) que permiten manipular los objetos geométricos, trazando y transformando figuras con lo que se logra un acercamiento práctico y experimental a la geometría analítica.

Debe cuidarse de no usar la computadora como un simple tutorial en el que el alumno se encuentre con situaciones estáticas que no le permitan explorar problemas y que sólo le exijan responder preguntas de tipo meramente conceptuales o de problemas tipo.

• En Internet el profesor podrá encontrar además de una gran cantidad de información, la posibilidad de integrar a sus alumnos en diversos proyectos de estudio conjunto con otros estudiantes de educación media superior de distintas regiones del país.

Es muy probable que en muchos casos sea insuficiente el tiempo destinado a una sesión de clase. Cuando esto suceda, puede dejarse una parte del trabajo para realizar en casa, con la condición de que no sea excesivo y que en la siguiente sesión sea revisado de manera colectiva.

Se pueden encomendar algunas investigaciones documentales o actividades que no se puedan realizar en clase, como encuestas u observaciones, así como actividades laboriosas como la construcción de algunos cuerpos o figuras geométricas que serán utilizadas como material para el estudio en la clase del día siguiente.

Se debe tener cuidado al proponer constantemente trabajo en casa por equipos, pues algunos adolescentes pueden usar esto, posteriormente, como un pretexto para salir de casa. Cuando el profesor requiera que los estudiantes realicen un trabajo en casa por equipos conviene realizarlo a través de la construcción de una carpeta compartida construida en DRIVE de Google (en la nube).

La confrontación

Cuando los estudiantes tienen la libertad para buscar la manera de resolver un problema, por lo general desarrollan diversos procedimientos.

Es de gran utilidad promover que los estudiantes conozcan y analicen los procedimientos que siguieron sus compañeros para resolver un problema, pues de esta manera se evidencia que existen varias formas, algunas más largas y complicadas que otras. Les permite también percatarse de sus errores, así como valorar las estrategias y resultados propios y los de sus compañeros.

No se debe confundir la confrontación con la explicación por parte del profesor o como un momento para corregir y calificar resultados.

La confrontación es un momento clave en el desarrollo de cada clase, es el espacio dedicado para que los estudiantes reflexionen sobre lo que hicieron al realizar alguna actividad o resolver algún problema, para que hagan conciencia sobre lo que saben, lo que no saben, las dificultades que encontraron; para que aclaren dudas, compartan puntos de vista y argumenten la validez o no de las estrategias que siguieron.

Dada la importancia didáctica de la confrontación, ésta debe ser lo más ágil y breve posible para mantener la atención de los alumnos sin cansarlos. No es conveniente presentar los procedimientos y resultados de todos los estudiantes o equipos frente al grupo, ya que esto haría la clase aburrida, pero tampoco es necesario pues seguramente habrá algunos procedimientos semejantes. Conviene presentar sólo aquello que aporte elementos útiles. Por lo anterior, es importante que antes de llevarla a cabo el profesor tenga claro lo que persigue al confrontar, por ejemplo, que los estudiantes:

• Observen que un problema puede resolverse de diferentes maneras.

• Observen que algunos problemas pueden tener más de una respuesta correcta.

• Corrijan errores frecuentes.

• Analicen las ventajas de utilizar unos procedimientos en vez de otros, es decir, privilegiar el uso de ciertos procedimientos que se aproximen más al formal

La confrontación puede permitir que los jóvenes:

• Comprendan mejor las situaciones problemáticas planteadas.

• Comuniquen y defiendan su propio punto de vista y también su método de solución.

• Comprendan el proceso del otro, y sean capaces de descentrarse de su propia investigación, cuestionarla e interpretarla.

• Identifiquen las ventajas de ciertos procedimientos sobre otros.

• Se planteen nuevos problemas.

La confrontación no es un ejercicio simple ni fácil, representa un desafío para el profesor de matemáticas, pues requiere del dominio de los contenidos y de ciertas habilidades para plantear preguntas que favorezcan la discusión y la reflexión, por lo que conviene, desde la planeación de la clase, tratar de adelantarse y prever las posibles estrategias de los alumnos, los errores que puedan cometer y cuál de ellos conviene poner a consideración del grupo para la confrontación.

Los errores en la resolución de problemas y la validación de resultados

Cuando se resuelven problemas matemáticos en la escuela, los alumnos tienden a depender de la aprobación del profesor para saber si la forma en que los resolvieron es o no la correcta; sin embargo, es conveniente que ellos mismos reconozcan si el procedimiento que emplearon los llevó a la solución correcta del problema, verifiquen sus resultados y localicen el error, en caso de haberlo.

Los intentos fallidos o los errores de los alumnos forman parte de su proceso de aprendizaje y deben aprovecharse para que, a partir de ellos, avancen en sus conocimientos.

No todos los errores de los alumnos son importantes como fuente de aprendizaje, algunos se deben simplemente a un descuido al momento de operar o escribir. Este tipo de errores solamente se corrige en el momento oportuno, no tiene sentido discutirlo durante la confrontación.

Las secuencias didácticas y la formalización del conocimiento

Cuando se plantea un problema a los estudiantes generalmente lo resuelven con sus propios procedimientos, lo que implica procesos de búsqueda, diversos ensayos y posiblemente algunos errores. Por lo general, al principio no usan los procedimientos convencionales, sino sus propias estrategias a partir de los recursos que ya poseen.

Para que los alumnos aprendan los procedimientos convencionales de resolución a partir de las estrategias empleadas por ellos, es necesario proponer una secuencia didáctica, es decir, una serie de problemas que aumenten gradualmente el grado de complejidad de tal manera que exijan el uso de procedimientos cada vez más eficaces; en ocasiones esto se logra aumentando el rango de los números, imponiendo alguna condición o restricción, o cambiando la estructura del problema. Apoyadas en el uso del software Geogebra.

Una misma situación, con algunas variaciones, será interesante para los estudiantes mientras no encuentren una forma sistemática de resolver los problemas que de ella se plantean.

En algunas ocasiones los estudiantes no llegarán por sí mismos al procedimiento convencional, pero estarán muy cerca como para que puedan vincularlo con sus propios recursos y no les resulte ajeno, en estos casos el profesor puede proponerlo como una forma eficaz para encontrar la solución.

Los procedimientos formales de resolución serán comprendidos y adoptados por los estudiantes cuando les faciliten la realización de tareas complejas y les resuelvan necesidades; de esta manera comprenderán que los procedimientos formales son herramientas flexibles y adaptables que les permiten resolver de una forma eficaz y más eficiente los mismos problemas que resolvían con procedimientos más largos, y en ocasiones más complejos.

Es probable que después de haberles presentado un determinado procedimiento formal algunos estudiantes continúen utilizando sus estrategias. Ante esta situación, es recomendable permitírselos por un tiempo y recordarles que también puede resolverse con el procedimiento convencional señalado. Poco a poco, en la medida que los estudiantes comprendan el procedimiento formal se apropiarán de él y lo utilizarán para resolver problemas.

Organización del trabajo en el aula

El trabajo en equipo

El profesor podrá organizar a los estudiantes en equipos para resolver problemas y discutir colectivamente sus conjeturas, estrategias de resolución y soluciones.

Trabajar en equipo es algo más que trabajar juntos (en el sentido de cercanía). No basta con agrupar a los alumnos en parejas o en pequeños grupos para suponer que se realizará un trabajo en equipo.

Más bien se trata de generar un ambiente de estudio en donde todos los integrantes del equipo asuman la responsabilidad de resolver juntos el problema planteado. De esta manera aprenden a relacionarse con sus compañeros, haciéndose responsables de sus propios argumentos, respetando el punto de vista de los demás, y mejor aún, ayudando a que todos entiendan y participen en el proceso de resolución del problema.

En ocasiones se puede pensar que trabajar en equipo implica perder tiempo en la organización de los estudiantes y en reacomodar el mobiliario, sin embargo, esta inversión de tiempo se compensa con beneficios significativos, en virtud de que un estudiante por sí sólo puede funcionar hasta cierto nivel, pero su potencial se incrementa al interactuar con sus compañeros. Además, poco a poco los estudiantes se acostumbrarán a esta forma de trabajar y requerirán de menos tiempo.

Cuando el profesor delega en los equipos la responsabilidad de resolver un problema, permite que hagan uso de sus conocimientos previos, elaboren conjeturas, las comuniquen a sus compañeros y las validen. Con esto adquieren cada vez mayor seguridad en sí mismos, ya que dejan de ser solamente receptores pasivos de las explicaciones del profesor.

Por otro lado, trabajar en equipo permite a los estudiantes encontrar más de una estrategia para resolver un mismo problema. Estas estrategias constituyen una gran riqueza didáctica porque favorecen la comprensión más profunda de los hechos, conceptos o principios involucrados, al socializarlas y buscar argumentos para defenderlas o validarlas. Al mismo tiempo, los estudiantes se apropian del lenguaje matemático y medios de expresión matemáticos con el propósito bien definido de comunicar a los demás la manera en que resolvieron el problema.

La forma en la que la persona interactúa en equipo dice mucho del ambiente familiar en el que se desenvuelve, y es una buena oportunidad para formar al ciudadano, responsable de las tareas comunitarias, y respetando las ideas de los otros estudiantes.

Trabajar en equipo ofrece al profesor la posibilidad de acercarse más a los estudiantes para conocer el grado de avance que va logrando cada uno de ellos, al observar la calidad de sus intervenciones y la manera en que utilizan los recursos matemáticos para resolver el problema planteado.

Aunque trabajar en equipo es un recurso valioso en la clase de matemáticas, esto no significa que deban excluirse las actividades individuales o el trabajo colectivo dirigido por el profesor.

Con base en el tema que se esté estudiando y en función del problema por resolver, el profesor decidirá la pertinencia de trabajar en equipos y el número de integrantes que los conformarán. Aunque nosotros sugerimos tres integrantes por equipo para evitar la posible interacción por parejas en la discusión planteamiento y solución de problemas, de no ser posible considerar entonces equipos formados por dos alumnos.

El tiempo para resolver un problema

La resolución de problemas en el salón de clases requiere tiempo. Por ello, el profesor dentro de su planeación de clase, preverá la duración suficiente para que la actividad se desarrolle completamente, desde el tiempo que requiere el planteamiento del problema, la exploración de la situación por parte de los estudiantes, la discusión de las primeras conjeturas, la validación, hasta la formulación de conclusiones que se desprenden del trabajo realizado. Esta situación compete exclusivamente a la planeación personal de cada profesor y a la problemática encontrada en cada grupo académico.

Una de las preocupaciones de los profesores es la necesidad de cubrir todos los temas del programa. Ante esta situación, muchos profesores optan por dar la clase porque de esa manera garantizan una fecha y hora para cada tema del programa. Sin embargo, con esta forma de proceder, el aprendizaje de los alumnos es mínimo y en términos reales se pierden mucho más, no sólo el tiempo, porque periódicamente hay que repetir las mismas explicaciones, también se pierden el interés por el estudio, la creatividad, la iniciativa y, en general, la posibilidad de superar los obstáculos que presenta la vida.

En la medida que los profesores logren que las sesiones de clase de matemáticas sean un espacio para la reflexión, para comunicar y escuchar opiniones, para enfrentar diversos retos y superarlos, los estudiantes contarán cada vez con más recursos para resolver los problemas que se les plantean, requerirán menos tiempo y se avanzará más, a paso firme.

Para optimizar el uso del tiempo en clase conviene, entre otras cosas, que el profesor no la utilice para calificar las tareas de los alumnos, así como para realizar otras actividades que son ajenas al estudio de las matemáticas y, por tanto, deberán llevarse a cabo en otros momentos.

Las tareas del profesor

La participación del profesor es fundamental en esta propuesta didáctica. La actividad central del profesor de matemáticas comprende los siguientes aspectos:

• Le corresponde seleccionar y en su caso adecuar los problemas y actividades que propondrá a los alumnos, de las secuencias didácticas propuestas en esta Guía para el Profesor. Matemáticas I.

• Plantear los problemas de esta Guía. Usar el software Geogebra, Excel, Derive 5 o Derive 6.

• Organiza y coordina el trabajo en el aula.

• Propone nuevos problemas o contraejemplos, es decir, problemas que contradigan las hipótesis de los estudiantes, favoreciendo la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones o procedimientos que los aproximen hacia la formalización de los conocimientos matemáticos, es decir, usar la Guía para el Profesor, de manera adecuada.

• Contribuye a aclarar confusiones y corregir errores de los alumnos en forma amable.

• Promueve y coordina la discusión sobre las ideas que tienen los estudiantes acerca de las situaciones que se plantean, mediante preguntas que les permitan conocer el porqué de sus respuestas.

• Participa como fuente de información y para vincular los conceptos y procedimientos propios de los estudiantes con el lenguaje convencional y matemático.

El profesor debe considerar que su papel no se limita a coordinar la actividad de los estudiantes. Respetando la actividad y creatividad de éstos debe intervenir con sus orientaciones, explicaciones y ejemplos ilustrativos cuando así lo requiera el avance del grupo. Éste es uno de los momentos más difíciles de su quehacer docente, pues, con base en su experiencia, debe intervenir en el momento oportuno de tal manera que no sustituya el trabajo de los alumnos.

La selección de las actividades

El profesor, elige y organiza las actividades para cada sesión, usando la Guía para el Profesor, Matemáticas II, en la forma que considere más conveniente para propiciar el aprendizaje de los estudiantes. Para ello podrá apoyarse en su propia experiencia, en las sugerencias aquí contenidas y en las Secuencias Didácticas y organización de contenidos. Matemáticas II.

Es conveniente que el profesor al seleccionar las actividades y problemas para la clase considere las otras asignaturas que se imparten en el colegio, como Física, Química, Biología y las diversas ciencias sociales. Estas materias requieren del apoyo de la matemática y al mismo tiempo son una fuente rica de problemas y actividades que servirán al profesor para mostrar a los alumnos las aplicaciones de las matemáticas y sus relaciones con otras disciplinas.

✓ Es fundamental que antes de proponer un problema a los estudiantes, el profesor busque distintas maneras de resolverlo, usando la metodología la metodología propuesta en los enfoques de George ***Polya*** (1945), Alan ***Schoenfeld*** (1983) en el desarrollo actual de la resolución de problemas.

El profesor en su planeación de clase cotidiana también deberá seguir este proceso para anticipar los posibles procedimientos de los estudiantes. Esto le dará también la posibilidad de prever algunos errores y reflexionar acerca de qué preguntas hacer o qué situación plantear para ayudar a sus alumnos durante la clase.

Organización de la clase

Es recomendable que el profesor elabore un plan de clase y lo plasme en una “Bitácora”, con la finalidad de organizar su docencia cotidiana en forma óptima y evite repetir u omitir una clase (En donde se debieras realizar determinado aprendizaje) donde basado en la Guía para el Profesor, Matemáticas II, el que contendrá solamente información útil y necesaria, a la cual pueda recurrir durante el desarrollo de la sesión.

A continuación se muestra un esquema de un plan de clase.

Plan de clase:

Nombre de Grupo______

Fecha:_______
Nombre del profesor:______
Propósito:________
Actividad:_______

Página de la Guía de profesor:______

Tiempo estimado para realizar el proceso._____

Evaluación de los aprendizajes_______
Observaciones:_______

La Bitácora de los planes de clase deberá contener el registro preciso de las situaciones problemáticas que se plantearán. Cuando se trata de un problema tomado de esta Guía y las actividades didácticas, bastará con anotar la referencia o lo que el profesor considere necesario para llevarla a cabo, pero cuando no se trate de un problema seleccionado de los materiales de apoyo, es necesario anotarlo con el fin de enriquecer el repertorio de actividades y tener presente cómo funcionaron al ser presentados a los alumnos. En ciertos casos conviene registrar textualmente las indicaciones o consignas que el profesor dará a los alumnos para evitar imprecisiones o términos que confundan o agregar palabras que orienten la resolución.

En Propósitos además se deben de incluir los recursos que se espera que utilicen los alumnos para resolver los problemas.

En el rubro Observaciones el profesor describe brevemente, después de la clase, qué tan interesante resultó la actividad o problema que propuso y por qué, con lo cual se tiene una evaluación del mismo y la posibilidad de mejorarlo.

Organización del curso

Durante todo el curso de Matemáticas II deben usarse y practicarse constantemente:

• Los procedimientos de cálculo, incluido el cálculo mental y la estimación de resultados.

• La iniciación gradual al razonamiento deductivo.

• Las construcciones geométricas y deducción de los lugares geométricos, al principio utilizando todos los instrumentos de dibujo y medida, se sugiere usar Geogebra.

• El uso de los diferentes medios de expresión matemática en la resolución de problemas: lenguaje simbólico, tablas y representaciones gráficas.

• El uso de la calculadora como recurso didáctico en la resolución de problemas. Y el uso del software propuesto para esta Guía de profesor de matemáticas II. Por ejemplo Geogebra.

En muchos cursos de matemáticas, el estudio de ciertos temas importantes es breve, de tal manera que los estudiantes no tienen más adelante la oportunidad de revisarlos y enriquecerlos, y se ven obligados a asimilar mucha información en poco tiempo.

Las investigaciones en educación matemática muestran, por el contrario, que la apropiación de las nociones y procedimientos matemáticos es un proceso gradual, en el que los nuevos conocimientos se vinculan estrechamente con lo que ya se sabe, se liga en conocimiento antiguo con el nuevo para ampliar la estructura de conocimiento, de manera que estos saberes se fortalecen, se amplían o se sustituyen. Por ejemplo, el conocimiento de la Geometría de Euclides y del Álgebra amplía las posibilidades del conocimiento de la Geometría Analítica. El conocimiento de las ecuaciones fortalece el cálculo aritmético y la multiplicación con fracciones sustituye la idea de que el producto siempre es mayor que cualquiera de los factores.

Entonces, es importante que en la planeación del curso de matemáticas el profesor ofrezca a los estudiantes la oportunidad de estar en contacto frecuente con las nociones y procedimientos básicos, en situaciones que les permitan utilizar los conocimientos anteriores, a medida que progresa gradualmente hacia conocimientos más avanzados. El profesor dispone de una buena propuesta para organizar su curso en la Guía para el Profesor, Matemáticas II. Cuando sea necesario revisar algún tema, en lugar de repetir mecánicamente explicaciones y actividades conocidas por los estudiantes, será preferible recordar brevemente las nociones principales y proponer problemas que las enriquezcan.

En las cuatro unidades de la Guía para el Profesor, Matemáticas II, en secuencias didácticas, el profesor dispone de una buena cantidad de problemas que pueden dar lugar a actividades interesantes para los estudiantes, al mismo tiempo que favorecen la comprensión de las nociones básicas y la práctica de los procedimientos.

El Trabajo Colegiado

Dado que no todos los profesores de matemáticas imparten el curso Matemáticas II, con este enfoque, es necesario asumir la responsabilidad de la educación de los estudiantes como un trabajo colegiado. Dando a conocer la Guía de Matemáticas II a los profesores del CCH, su metodología así como el uso de software de apoyo..

Repercute en el proceso global de aprendizajes, la deformación de los alumnos (aprendizajes deficientes), el proceso de los profesores de niveles anteriores, este caso del nivel secundaria. Es por esto que los profesores de esta asignatura se deben de apegar lo más posible a los programas del PEA ajustado con el fin de darle continuidad a formación matemática de los alumnos del Colegio en los cursos posteriores de matemáticas.

En ocasiones la falta de comunicación entre profesores ocasiona que se planteen situaciones repetidas a los mismos alumnos en semestres distintos, lo cual puede mermar el interés de ellos por el estudio de las matemáticas; por otra parte, conviene llevar un control y seguimiento del grado de dificultad de los problemas que se estudian a lo largo del curso de Matemáticas II.

La Evaluación

Significado de la evaluación

La evaluación es uno de los aspectos más complejos, tanto por la naturaleza misma del proceso de evaluación, como por sus implicaciones en el proceso de estudio y para los estudiantes.

Tradicionalmente la matemática han sido una asignatura con un alto grado de reprobación en todos los niveles educativos, esto ha dado como resultado que muchos estudiantes trunquen sus estudios o pasen por un periodo de frustración en algún momento de su vida escolar. Esta situación hace necesaria la reflexión acerca del sentido y los propósitos de la evaluación y qué es lo que el profesor debe realmente evaluar en sus alumnos.

El término ***e v a l u a c i ó n*** es reciente en la educación. Se introdujo, entre otros propósitos para destacar el hecho de que, con frecuencia, la información que proporcionan los exámenes es insuficiente para conocer los resultados del aprendizaje y tomar decisiones adecuadas sobre los procesos de enseñanza. Desafortunadamente, el término se ***volvió sinónimo de calificación y examen***, tanto para alumnos como para el profesor, y ha provocado la actitud poco conveniente de estudiar para acreditar un examen.

El proceso de evaluación continúa

La evaluación es un proceso continuo que se desarrolla a lo largo de todo el ciclo escolar. Su objetivo es recoger información que le sea útil al profesor para mejorar el desempeño de los alumnos y ajustar las actividades de estudio a las necesidades de aprendizaje de los mismos, así como para tratar de mejorar la práctica docente del profesor. La evaluación se puede realizar de manera informal y en forma cotidiana realizando preguntas para orientar la clase, hacia el aprendizaje de algún concepto. La formal a través de evaluar actividades con tablas de evaluación o mediante el uso de rubricas en las actividades que realizan los alumnos o en los exámenes que ellos contestan.

En este sentido, es importante que la evaluación no consista únicamente en la aplicación de uno o varios exámenes localizados en momentos fijos del curso, sino que el profesor observe constantemente el desarrollo de las actividades en clase y la participación de los estudiantes en ellas. A través de actividades individuales y en equipo, la presentación de tareas y la presentación de cómo fueron resueltos estos problemas buscando que los estudiantes sean capaces de explicar tanto oralmente como en forma escrita los procedimientos seguidos para resolver algún problema.

La información recabada permitirá mejorar, a tiempo, todos los factores que intervienen en el proceso didáctico. A pesar de lo anteriormente planteado proponemos que para ***una parte*** de la evaluación se aplique el examen propuesto en cada una de las cuatro unidades del curso de Matemáticas II y que el profesor en cuestión le dé el peso específico que crea más conveniente para la calificación final de cada uno de sus estudiantes. Para esto proponemos lo siguiente.

Coherencia de la evaluación con los propósitos y el enfoque didáctico

Es común que los profesores de matemáticas argumenten que el estudio de esta asignatura es de gran utilidad para los alumnos, porque les proporciona elementos para resolver problemas de la vida cotidiana y desarrolla sus habilidades para pensar y razonar lógicamente. Esta postura resulta contradictoria si la evaluación del aprendizaje se limita a la aplicación de exámenes cada cierto periodo de tiempo que muchas veces sólo miden conocimientos aislados y no dan cuenta del proceso de desarrollo de habilidades y, sobre todo, las dificultades que obstaculizan dicho desarrollo.

Tanto el proceso como las formas de evaluación deben ser coherentes con los contenidos, propósitos y enfoque señalados en el Plan y programas de estudio (PEA ajustado).

Por ello es necesario que al diseñar su proceso de evaluación, el profesor contemple actividades que le permitan recoger información de fuentes muy diversas, como pueden ser los exámenes escritos, los registros de observación en clase, los ensayos y exposiciones, pequeños cuestionarios respecto a tal o cual punto del programa, etcétera.

Es poco congruente que mientras el proceso de estudio tiene entre sus propósitos, promover actitudes, fomentar el trabajo en grupo y desarrollar la habilidad de los alumnos para producir, socializar y validar conjeturas —o bien busca desarrollar habilidades para comprender, interpretar y valorar ideas matemáticas presentadas en diversas formas—, la evaluación se reduzca a exámenes escritos de aplicación individual, que si bien ayudan a evaluar algunos desempeños, no permiten observar aspectos como los anteriores.

Exámenes escritos individuales

Para obtener información sobre determinados aprendizajes, algunas veces es útil recurrir a la aplicación de exámenes escritos individuales. A continuación se presentan algunas sugerencias generales que se tomaron en cuenta en la elaboración de cada uno de los exámenes propuestos al final de cada una de las cinco unidades de la Guía para el Profesor, Matemáticas II.

• Los exámenes escritos deberán elaborarse a partir de los conocimientos comunes exigibles a todos los estudiantes, procurando no darle un peso exagerado a las definiciones y los significados de ciertos vocablos. En lugar de proponer muchas preguntas, es preferible distinguir lo esencial de lo accesorio o menos importante y elaborar cuestionarios más breves.

• Tampoco conviene evaluar temas importantes en un solo examen. Es preferible que un mismo tema aparezca en varios exámenes, pues así el profesor observará cómo progresa la apropiación de conocimientos durante el desarrollo de la unidad temática.

• Cuando el profesor lo considere conveniente permitirá el uso de las calculadoras y el uso de software en los exámenes.

Finalmente, es recomendable no abusar de las preguntas de opción múltiple u otras similares. Aunque este tipo de preguntas pueden ser útiles en ocasiones y facilitar la calificación de los exámenes, su uso irreflexivo en los últimos años ha contribuido a empobrecer la enseñanza. Su inconveniente más grave es, quizá, que ocultan información valiosa para el profesor.

Al calificar un examen se debe tener en cuenta que no se trata solamente de contar el número de aciertos para asignar una calificación, sino de valorar las respuestas, es decir, revisarlas con cuidado para enterarse de los diferentes tipos de respuestas correctas que aparecen, así como de los errores más comunes. Este análisis servirá también para evaluar si las preguntas fueron las adecuadas. En particular, un análisis cuidadoso de los errores más frecuentes permitirá al profesor detectar dónde se encuentran las dificultades y diseñar actividades que ayuden a resolverlas.

La información obtenida en el proceso de evaluación deberá revertirse permanentemente a los estudiantes no sólo como una calificación, sino con la intención de que sean conscientes de sus propios aprendizajes, de sus logros y limitaciones. Junto con esto, es necesario que los estudiantes reciban las sugerencias necesarias para mejorar su aprendizaje.

Es importante que la calificación de los estudiantes no dependa solamente del resultado de uno o varios exámenes por escrito. Por el contrario, deberán tomarse en cuenta sus participaciones en clase y las informaciones recogidas por medio de otras fuentes diseñadas con este propósito.

UNIDAD 1
ECUACIONES CUADRÁTICAS

PROPÓSITO:
Al finalizar, el alumno:

Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

.

Tiempo Estimado: 15 horas.

1.0 PRESENTACIÓN

En esta parte de la Guía de Profesor de matemáticas II, se abordan los aprendizajes de la unidad I de Matemáticas II señalados por el Programa de estudios, plan 2016: Los aprendizajes que debe lograr el alumno, los contenidos de la unidad y el cómo abordarlos a través de estrategias de aprendizaje; en particular el uso de la resolución de problemas y la metodología de Polya. Se proporcionan recomendaciones acerca del nivel de tratamiento de la docencia a nivel bachillerato, el sentido de la Unidad y Conexiones de las Ecuaciones cuadráticas con otros temas de semestres posteriores y anteriores, el tiempo disponible que es de quince horas para lograr estos propósitos.

Las estrategias que se proporcionan en esta unidad son las más recomendables de acuerdo al programa de estudios vigente, para abordar cada uno de los aprendizajes, guiando al profesor para que este logre realizar su docencia abordando los principios del CCH de aprender a aprender, aprender haciendo y aprender a ser.

En cuanto a las actividades de enseñanza aprendizaje se busca que el alumno Profundice, en el conocimiento de las ecuaciones, a través del planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas, en el concepto mismo de ecuación, en lo que significa la solución, en la relación que existe entre grado de la ecuación y el número de soluciones. Mostrar las cualidades del Álgebra para encontrar tanto métodos alternos como generales de resolución de ecuaciones cuadráticas, recalcando que el tiempo disponible es de 15 horas.

Además de la traducción de un problema que se resuelve con una ecuación cuadrática , Se busca que el alumno analice las condiciones y relaciones que se establecen en el enunciado verbal de un problema y exprese las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación algebraica de segundo grado. El Material de esta unidad busca que el estudiante Reafirme estrategias generales previamente vistas en las unidades 3 y 4 del programa de estudios de la asignatura Matemáticas I; “Ecuación lineal “ y “Sistemas de ecuaciones lineales” para posteriormente ampliarlas en la unidad I de la asignatura de Matemáticas II, “Ecuaciones cuadráticas”.

En esta unidad se busca también que el estudiante maneje los métodos de completar el cuadrado, factorización como producto de binomios y el uso de la formula general para obtener la solución de la ecuación cuadrática y que éste valore cual método es más conveniente para resolver ecuaciones cuadráticas, así como también sepa comprobar sus soluciones, y determinar si el proceso seguido es correcto o incorrecto.

Posteriormente este material buscará enfrentar al alumno con problemas de aplicación que le ayuden a modelar problemas reales que abren una panorámica mayor sobre la matemática y en especial de la ecuación cuadrática.

Finalmente se proporciona una propuesta de evaluación de la Unidad con su respectiva Bibliografía tanto Básica como Complementaria.

1.2 LOS APRENDIZAJES, LA TEMÁTICA Y LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDOS POR EL PROGRAMA DE ESTUDIOS.

1.2.1 LOS APRENDIZAJES

Al finalizar la unidad, el alumno, en relación a la resolución de problemas:

- Analiza las condiciones y relaciones que se establecen en el enunciado de un problema y expresara las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación algebraica de segundo grado.

  a. Reafirma la estrategia general en la resolución de problemas de reducir un problema nuevo a otro que ya se sabe cómo resolver.

  b. Interpreta en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elige, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.

- Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico, es decir valora el método algebraico de resolución que resulta más conveniente.
  a. Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
  b. Identifica cuáles son los parámetros **a, b** y **c**, en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la Fórmula General.

- Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.

- Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución conveniente.

1.2.2 LA TEMÁTICA

1. Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

2. Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas: $x^2 = b$; $ax^2 = b$; $ax^2 + b = c$; $ax^2 + b = 0$; $a(x + b)^2 + c = d$; $(x + b)(x + c) = 0$

3. Métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
a) Factorización.
b) Método de completar cuadrados.

4. Fórmula General para resolver una ecuación cuadrática. Discriminante $b^2 - 4ac$ y la naturaleza de las raíces.

5. Problemas de aplicación.

1.2.3. LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS

Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual y colaborativo; en equipos de dos (preferentemente) o en casos singulares de tres alumnos y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

- El profesor inicia con un problema de tipo geométrico, numérico, físico u otros que lleven a los alumnos a plantear ecuaciones cuadráticas, con la finalidad de captar el interés por el estudio de la temática.

- El profesor resuelve una serie de problemas que lleven a ecuaciones del tipo que se mencionan en la temática. Organizando el trabajo en clase en parejas de alumnos, las resuelvan y compartan sus procedimientos.

- El profesor plantea la posibilidad de resolver una ecuación cuadrática completa, transformándola a una de las formas anteriores y guía la forma de hacerlo, aprovechando el momento para hacer una revisión de los productos notables y la inversión de esos procesos.

- En la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, es útil plantear ejercicios en los que se tiene un producto de dos binomios igualado a cero y analizar las condiciones en que esto es posible, haciendo notar en cada caso que la dificultad se reduce a resolver una ecuación lineal sencilla. Con el fin de promover la reversibilidad de pensamiento, se sugiere que el profesor plantee determinar una ecuación a partir de sus raíces reales.

- Introduce el método de completar cuadrados con el desarrollo de expresiones cuadráticas de la forma “$a(x \pm m)^2 = n$” que lo conduzca a una ecuación que no pueda resolver con los métodos vistos hasta el momento. Por lo que se requiere realizar el proceso inverso de completar cuadrados.

- El profesor apoye y oriente al estudiante con actividades de generalización, para que llegue a la obtención de la fórmula general de la ecuación cuadrática.

- El profesor plantee ejercicios, que conduzcan a una, dos o ninguna raíz real y pide a los alumnos analicen qué es lo que provoca tales resultados.

- El profesor plantee diversos problemas de aplicación, sugiriendo el uso de ayudas heurísticas convenientes.

5.3 SENTIDO DE LA UNIDAD V “ECUACIONES CUADRÁTICAS”

El propósito fundamental en el tratamiento y presentación de esta Unidad I “Ecuaciones cuadráticas” de la asignatura de matemáticas II, está orientada a satisfacer los requisitos institucionales del programa actualizado de matemáticas II; buscando que el estudiante resuelva ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución, modele problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones , establezca la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

También se busca que tanto el profesor que imparta esta asignatura y el alumno que la estudie puedan contar con un material que se adecue al programa de estudios y a las necesidades dentro y fuera del aula, ya que la Guía de profesor ofrece una gran variedad de problemas y ejercicios resueltos y propuestos y garantiza que les permitirá alcanzar los objetivos de la unidad. Permitiendo también que el estudioso de estos temas cuente con un material que se ajusta al programa actual del curso (plan de estudios 2016).

5.4 CONEXIÓN CON OTRAS UNIDADES DE OTRAS ASIGNATURAS.

La unidad I “Ecuaciones cuadráticas” de la asignatura de matemáticas II, tiene necesariamente antecedentes y consecuentes que es necesario establecer.

Matemáticas I
Se debe mencionar que para alcanzar los objetivos de esta unidad, el alumno debe poseer conocimientos sólidos en el campo del algebra, en especial la solución de las ecuaciones de primer grado y la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Unidades 3 y 4 de dicha asignatura.

Matemáticas II
La unidad ecuaciones cuadráticas, se relaciona directamente con la Unidad 2 del mismo programa. Funciones cuadrática, siendo ésta última la consecuente de esta unidad.

Matemáticas III
Se prosigue el estudio de las ecuaciones, en particular obtener la forma algebraica para representar a un lugar geométrico, la ecuación de la parábola; la ecuación de la circunferencia y la de la elipse, en las unidades de 4 y 5 de dicho programa de estudios.

Matemáticas IV
En la unidad I, Funciones polinomiales, como continuación de la unidad 2 de la signatura de matemáticas 2, que a su vez se relaciona con la unidad ecuaciones cuadráticas

Calculo Diferencial e Integral I
En los temas de Límites, y derivadas resultando en algunos casos expresiones cuadráticas, búsqueda de máximos y mínimos, puntos de inflexión, determinación de donde crece o decrece la curva.

Calculo diferencial e integral II.
En la solución de integrales sencillas que involucran términos algebraicos cuadráticos; o bien requieren de realizar cambios de variable y su regreso.

Estadística y probabilidad I **y** **Estadística y probabilidad II**
En apariencia pareciera que no existe ninguna conexión específica con alguno de los temas, sin embargo es indudable que para logro de los aprendizajes de los conocimientos en estas asignaturas por parte de nuestros estudiantes, se requiere para su comprensión de los conocimientos aritméticos y algebraicos, y por ende aunque de manera indirecta es útil el conocimiento de ecuaciones cuadráticas. Sería muy ingenuo pensar que no se requiere este conocimiento.
.

5.5 NIVEL DE TRATAMIENTO

El tratamiento de los temas que se abordan en este material son de un nivel básico; ya que se entiende que el alumno esta poco familiarizado con este tema y aunque lo estudia en la enseñanza secundaria, lo cierto es que lo más probable su tratamiento haya sido deficiente para la mayoría de los alumnos.

Se introduce cada tema con ejemplos y problemas muy sencillos y variados con la finalidad de ir introduciendo los conceptos de ecuación de segundo grado, para que el profesor pueda contar con ejemplos variados que le sirvan como orientación en la planeación, desarrollo de su clase, y realice la evaluación de aprendizajes.

5.6 OBSTÁCULOS PREVISIBLES

Debemos estar conscientes en la dificultad para alcanzar todos los objetivos de la unidad I, de la asignatura de matemáticas II, es de esperarse que los alumnos tenga una serie de deficiencias conceptuales y operativas. Por otra parte tenemos que tener presente que tenemos por lo general 25 alumnos en el salón de clase y cada uno es distinto en la forma que aprenden.

Por otra parte la falta de conocimientos y/o deficiencia de ellos determinara el éxito para abordar esta unidad. Sabemos que muchos alumnos que están inscritos en el segundo semestre no siempre tienen los antecedentes académicos necesarios para el buen desempeño en el aprendizaje de los temas y conceptos de matemáticas I, o que muchos de ellos ya no recuerdan los temas como resolución de ecuaciones de primer grado, ni los métodos de factorización y productos notables. Por dicha razón siempre es necesario considerar los antecedentes para abordar un nuevo aprendizaje, a veces será necesario revisar y repasar un tema, de manera rápida, antes de retomar el nuevo aprendizaje.

Otro obstáculo que se puede presentar es la falta de tiempo en el calendario de estudios ya que este tema es la última unidad del primer semestre y por consiguiente no se alcanzan a cubrir todos los temas de esta unidad.

Todas estas situaciones comentadas son salvables siempre y cuando el profesor realice una planeación de su docencia, tomando en cuenta los aprendizajes, la temática y la metodología para abordarlo (estrategias de aprendizaje), así como también los tiempos disponibles para lograr los objetivos. Si el profesor toma en cuenta el material didáctico dentro de su planeación, la cual presentamos como Guía de Profesor de matemáticas II. De esta forma ante tales contingencias se pueden realizar los ajustes necesarios para lograr los aprendizajes sugeridos por el programa de estudios (Plan 2016), en los tiempos disponibles.

5.7 SESIONES DIDACTICAS.
Usando las secuencias didácticas, de la Guía.

En el programa de matemáticas II se abordan los conceptos que no son nuevos para los alumnos del CCH. Como son los temas de las ecuaciones de segundo grado.

Si bien es cierto que el alumno en la enseñanza media básica trabajo y aplicó estos temas, éste los manejo de manera superficial y tangencial, sin realizar un análisis concreto. Ahora nos proponemos expandir y profundizar estos conceptos. Dándole un carácter no solo de aplicaciones prácticas, sino fundamentalmente como una rama de las matemáticas que tienen una estructura y fundamentos sólidos en el campo de esta ciencia. Ver y analizar a las ecuaciones cuadráticas como una unidad sólida, útil y con bases matemáticas que le permitirán al alumno abordar una gran cantidad de problemas donde se involucran este tipo de ecuaciones, las cuales trascenderán a otras más complejas, en los siguientes cursos no solo en las matemáticas que se imparten en el colegio a nivel Bachillerato, sino a otros niveles de las matemáticas que pudiera hallar en los niveles de licenciatura.

En esta unidad se toma en cuenta que el alumno tiene familiaridad con los conceptos e ideas de: relación, ecuación lineal, función lineal, comportamiento gráfico y su relación con la representación algebraica de una línea recta, uso y manejo de las operaciones algebraicas elementales de suma, resta, multiplicación de polinomios, así como los productos notables y su factorización.

En la Unidad cuyo las ecuaciones cuadráticas el alumno tendrá la oportunidad de comprender y darse cuenta de que existen métodos y procedimientos eficaces que le permiten abordar y resolver una gran cantidad de problemas donde se vean involucrados los conceptos longitud, medida, área, y sobre todo percatarse que no todas las relaciones entre variables son lineales.

En cuanto al algebra, y aritmética que abarca esta Unidad de “Ecuaciones cuadráticas” se intenta manejar estrategias generales y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema tales como:

1. Acrecentar la capacidad del alumno para resolver problemas a través del uso de estrategias generales, usadas en su solución, como en el análisis de la representación algebraica. En general que el estudiante adquiera la capacidad

para resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos y los aplique en la resolución de problemas.

2. Que el alumno preste atención para desarrollar sus posibilidades de análisis. En particular; establezca la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

3. Permitir que el alumno explore nuevas alternativas para la solución de problemas de carácter algebraico y que con ayuda de la aritmética y el álgebra para visualizar y comprender los alcances de esta nueva herramienta que le permitirá plantear y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas.

5.7.1 SESIONES.

A través de las "secuencias didácticas" de al Guía de profesor de matemáticas II

UNIDAD I

Ecuaciones cuadráticas

1.0 Introducción.

El propósito principal de esta unidad es que al finalizar el alumno, sea capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita.

Esta unidad temática pertenece al Eje Álgebra, se revisan conceptos y procedimientos que serán el fundamento en la mayoría de los cursos de matemáticas del Colegio, también se establece una liga con el tema de funciones cuadráticas (siguiente unidad) al vincularse estrechamente en sus características particulares.

Por otra parte, la relación entre estas unidades enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones: en general en la Unidad, se busca que el estudiante adquiera la capacidad para resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos y los aplique en la resolución de problemas. El tiempo destinado a cubrir estos objetivos de aprendizaje es de 15 horas

La historia de las matemáticas. Los Métodos antiguos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Comentan los historiadores que desde el siglo XX A.C. que en Mesopotamia (Cultura Babilónica) ya se resolvían ecuaciones, en el siglo XVI AC, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución.

En Egipto, El tratamiento aritmético aparece en otro documento matemático dejado por los egipcios: el Papiro de Berlín, que data de 2000 a.C. aproximadamente. Contiene ecuaciones cuadráticas que fueron resueltas usando la regla de falsa posición.

Utilizando notación moderna, explicaríamos que se desarrolló un álgebra elemental que se utilizó para plantear y resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, y cobro de impuestos en las cosechas. En particular este conocimiento lo usaban para redefinir los límites de las parcelas anegadas por el Nilo, en sus crecidas.

Posteriormente, los griegos, a partir del año 100 a.C., empezaron a resolver ecuaciones de segundo grado usando métodos geométricos, mismos que también utilizaban para resolver algunas ecuaciones de grado superior.

Dhiofanto de Alejandría (Ciudad griega en Egipto), le dio un mayor impulso al tema, aunque su método sólo proporcionaba una de las soluciones de la ecuación cuadrática.

En la India en el año 628 d.C, el matemático indio Brahmagupta resolvió la ecuación $x^2 - 10x = -9$, proponiendo el siguiente procedimiento: Multiplica el número absoluto, –9, por el [coeficiente del] cuadrado, 1; el resultado es –9.

El matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi (s. IX) utilizó una estrategia para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$. Al parecer este proceso corresponde al uso de la formula general para resolver la ecuación cuadrática tomada del trabajo del matemático hindú Bhaskara, escrita en su famoso libro en sanscrito "Siddhanta Siroman" (corona de tratados) en el año 1150.

Referencias en ficha bibliográfica citado en formato APA, que amplían el tema:

Para entrar al enlace; seleccione la dirección electrónica (en color), accione el botón derecho del "mouse" y seleccione abrir hipervínculo y de clic.

1. Varios. (2016). Ecuación cuadrática/Historia. Fecha de consulta;Septiembre, 2017, de WIKILIBROS Sitio web:https://es.wikibooks.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_cuadr%C3%A1tica/Historia

https://es.wikibooks.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_cuadr%C3%A1tica/Historia

2. Varios. (2017). Ecuación de segundo grado. (2017, 26 de septiembre). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta. Septiembre 30, 2017 Sitio web: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ecuaci%C3%B3n_de_segundo_grado&oldid=102156151.

Sesión 1

1.1 Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Aprendizajes:
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.

Estrategias de aprendizaje sugeridas.
Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas

- ✓ El profesor inicia con un problema de tipo geométrico, numérico, físico u otros que lleven a los alumnos a plantear ecuaciones cuadráticas, con la finalidad de captar el interés por el estudio de la temática.

Se ha comentado que los griegos resolvieron ecuaciones cuadráticas usando métodos geométricos. La relación entre las ecuaciones y las áreas se originó con los pitagóricos.

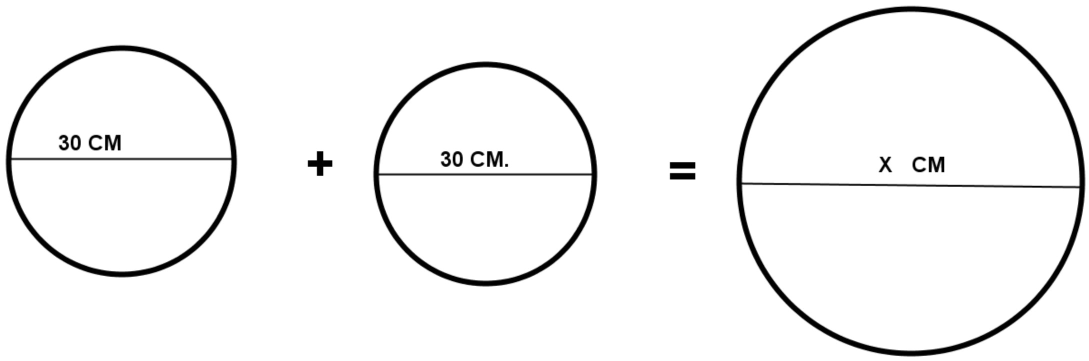
PROBLEMA 1.

En los célebres “Elementos” de Euclides, que se considera escrito en el año 300 a.C., un ejemplo es el siguiente; “Dado un segmento de línea de longitud a, córtelo en dos segmentos: uno de largo a menos x y otro de largo x, de tal manera que el cuadrado con base en x tenga un área igual a la del rectángulo de lados a y a menos x”.

¿Cómo se puede representar este problema usando el álgebra?

Ejemplo 1.

En un restaurante de comida rápida se elaboran pizzas redondas de 30 cm. De diámetro, el cocinero desea elaborar una pizza más grande con el mismo grosor de las anteriores pero que el área sea el doble de las de 30 cm. ¿De qué tamaño deberá ser el diámetro de esta nueva pizza?



Lo que se desea es que el área de dos pizzas de 30 cm de diámetro sea exactamente la misma área que una pizza mayor de diámetro de x cm.
Sabemos que el área de un circulo se obtiene por la formula
$A = \pi r^2$ Si deseamos que la suma de las dos áreas de los círculos pequeños sea igual al círculo mayor, entonces tenemos:

$$A_1 + A_2 = A_t$$

Donde A_1 y A_2 representan las áreas de las pizzas pequeñas y A_t el área de la pizza mayor.
El radio de cada pizza menor es de 15 cm y el radio de la pizza mayor es $\frac{x}{2}$ y por la fórmula del área, tenemos que:

$$\pi(15^2) + \pi(15^2) = \pi(\frac{x}{2})^2$$

ACTIVIDAD 1

Represente en forma algebraica los siguientes enunciados:

a. Dos motoristas distanciados por 130 km., parten para encontrarse. Si la velocidad de uno es de 30 km/h y la velocidad del otro es 33 más que el otro, ¿En cuánto tiempo se encontraran? . Determine la distancia recorrida por ambos antes de encontrarse y el tiempo transcurrido desde que partieron.

Nota utilice la fórmula de velocidad constante v=d/t

b. una lámina rectangular de latón de perímetro 120 cm se utiliza para confeccionar una caja sin tapa. Para ello se corta un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y se sueldan los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina usada si el volumen de la caja es de 900 cm^3?

c. Un grupo de jóvenes decide pagar por partes iguales el arriendo de $30.000 de un yate. A última hora, cuatro de los jóvenes se arrepintieron, con lo cual la cuota de cada uno de los restantes subió en $2000. a) ¿Cuántos jóvenes había en el grupo original?

1. Celia María Finazzi. (2017). La solución de las ecuaciones algebraicas: Una visión histórica. Septiembre 30, 2017, de revista de cultura científica FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO Sitio web:

http://www.revistaciencias.unam.mx/pt/165-revistas/revista-ciencias-17/1455-la-soluci%C3%B3n-de-ecuaciones-algebraicas-una-visi%C3%B3n-hist%C3%B3rica.html

2. Desconocido. (2017). Resumen y Ejercicios Ecuaciones cuadráticas. Septiembre 30, 2017, LMDE Algebra inst-mat utalca . Sitio web:

http://inst-mat.utalca.cl/tem/sitiolmde/temas/algebra/ecuaciones/ecuaciones-cuadraticas2.pdf

1.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma:

$x^2 = b;\ ax^2 = b;\ ax^2 + b = c;\ a(x + b)^2 + c = d;\ (x + b)(x + c) = 0$

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.

- ✓ El profesor resuelve una serie de problemas que lleven a ecuaciones del tipo que se mencionan en la temática. Organizando el trabajo en clase en parejas de alumnos, las resuelvan y compartan sus procedimientos.
- ✓ El profesor resuelve una serie de problemas que lleven a ecuaciones del tipo que se mencionan en la temática. Organizando el trabajo en clase en parejas de alumnos, las resuelvan y compartan sus procedimientos.
- ✓ El profesor plantea la posibilidad de resolver una ecuación cuadrática completa, transformándola a una de las formas anteriores y guía la forma de hacerlo, aprovechando el momento para hacer una revisión de los productos notables y la inversión de esos procesos.

Ejemplo 2.

La ecuación cuadrática completa tiene la forma; $ax^2 + bx + c = 0$ Para iniciar el tema pensemos en la ecuación cuadrática incompleta que sea la más sencilla de resolver.

Considere que se desea conoce que valor o valores satisfacen la ecuación: $x^2 = b$ considere que " b", por lo pronto representa un número real (cualquiera), para resolver la ecuación basta aplicar raíz cuadrada a ambos extremos de la igualdad.

En particular para la ecuación cuadrática; $x^2 = 81$, las soluciones son $x = 9$ y también $x = -9$, recalcando que tenemos dos soluciones o dos raíces de la ecuación cuadrática.

ACTIVIDAD 1.

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a. $x^2 = 144$	**b.** $x^2 = 11$	**b.** $x^2 = 0$	**d.** $x^2 = 81$

Para pensar:

¿Tiene sentido el enunciado de esta ecuación cuadrática; $x^2 = -2$?

Ejemplo 3.

Consideremos una ecuación cuadrática incompleta en la forma; $ax^2 = b$, la heurística para resolver la ecuación, se basa en el conocimiento de cómo resolver una ecuación lineal con una incógnita. Solución:

La ecuación es;	$ax^2 = b$
Por trasposición de términos :	$x^2 = \frac{b}{a}$
Aplicando el método para resolver la ecuación cuadrática del tipo; $x^2 = b$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{b}{a}}$
Simplificando;	$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ o $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$

Si consideramos la ecuación cuadrática incompleta: $3x^2 = 27$, sus raíces o soluciones son; $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$ ¿Por qué razón?

Nota 1: Sobre la notación:

Algunas personas que enseñan matemáticas, son muy estrictos y advierten que sede tener mucho cuidado en cuanto a lo que se escribe y dicen que no se debe escribir la solución en la forma: $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, porque no existe ningún número real que sea a la vez positivo y negativo, sin embargo si consideramos de que se trata de solo una notación, dentro de un proceso en el cual se escribe esta simbolización como un paso previo a los resultados finales que serían de la siguiente forma $x_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ y $x_2 = \sqrt{\frac{b}{a}}$, entonces no tiene sentido su advertencia.

Nota 2: ¿Que significa heurística?.

Su raíz etimológica de esta palabra proviene del griego *euriskô*, una palabra derivada es *¡eureka! (lo he encontrado)* que según dicen pronuncio el célebre Arquímedes en la bañera cuando resolvió un problema muy difícil que le llevo mucho tiempo en cómo resolverlo. Polya la redescubre en 1945: La intención de la heurística es estudiar los métodos y las reglas del descubrimiento y la invención".
http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/PROBLEMAS/problemas_heuristica.htm

ACTIVIDAD 2.

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a. $10x^2 = 360$	**b.** $11x^2 = 121$	**b.** $13x^2 = 0$	**d.** $25x^2 = 125$

Ejemplo 4.

Consideremos una ecuación cuadrática incompleta en la forma; $ax^2 + b = c$, también la heurística para resolver este tipo de ecuaciones, se basa en el conocimiento de cómo resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

En particular consideremos la ecuación: $-7x^2 + 148 = 8$, trasponemos el término "148", quedado la ecuación como: $-7x^2 = 8 - 148$, simplificado el extremo izquierdo se obtiene; $-7x^2 = -140$. Pero esta ecuación tiene una presentación o forma similar al del ejemplo anterior, es decir es de la forma; $ax^2 = b$.

Resolviéndola, se obtiene que las soluciones son: $x_1 = \sqrt{20}$ y $x_2 = -\sqrt{20}$.

En general consideremos la ecuación $ax^2 + b = c$:

1. La ecuación es;	$ax^2 + b = c$	3. por trasposición de términos :	$ax^2 = c - b$
2. La ecuación cuadrática se ha trasformado al tipo; $ax^2 = b$	$x^2 = \dfrac{c-b}{a}$	4. Escriba como deben de quedar las dos soluciones;	$x_1 =$ ____________ y $x_2 =$ ____________

ACTIVIDAD 3.

Compruebe que las soluciones son correctas, es decir muestre que $x_1 = \sqrt{\dfrac{c-b}{a}}$ y que $x_2 = \sqrt{\dfrac{c-b}{a}}$ son raíces o soluciones de la ecuación; $ax^2 + b = c$.

Ayuda: recuerde que la sustitución de las raíces deberá mostrar que se satisface la igualdad.

Ejemplo 5.

Consideremos una ecuación cuadrática incompleta en la forma; $3(x+4)^2-5=-3$, la heurística para resolver este tipo de ecuaciones, se basa también en cómo resolver ecuaciones lineales con una incógnita además retoma las esas estrategias de cómo se han resuelto los problemas anteriores de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma; $x^2=b$; $ax^2=b$; $ax^2+b=c$;

La ecuación cuadrática incompleta:	$3(x+4)^2-5=-3$
Trasponiendo el sumando "5" al otro extremo de la igualdad;	$3(x+4)^2=-3+5$
Simplificando los términos del extremo derecho	$3(x+4)^2=2$
Trasponiendo el factor "3" del extremo izquierdo al extremo derecho	$(x+4)^2=\frac{2}{3}$
Elevando al cuadrado;	$\sqrt{(x+4)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$
Es decir	$x+4=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
Es decir las dos raíces o soluciones son:	$x_1=-4+\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $x_2=-4+\sqrt{\frac{2}{3}}$

ACTIVIDAD 4.

Consideremos una ecuación cuadrática incompleta en la forma; $a(x + b)^2 + c = d$, con las condiciones; a, b, c, d distintos de cero. Muestra que las soluciones de dicha ecuación son; $x_1 = -b + \sqrt{\frac{d-c}{a}}$ y $x_2 = -b + \sqrt{\frac{d-c}{a}}$.

Ejemplo 6.

Consideremos una ecuación cuadrática incompleta en la forma; $(x + b)(x + c) = 0$, la heurística para resolver este tipo de ecuaciones, se basa también en cómo resolver ecuaciones lineales con una incógnita, por ejemplo usted recordara que para hallar la solución de la "dificilísima" ecuación; $x + a = 0$, bastaba con pensar que numero que fuese el inverso aditivo del término "a", en este caso "-a", que sustituido en la ecuación hace que se cumpla la igualdad.

Entonces si usted comprendió lo anterior,

¿Me podrá indicar usted que valores tendrán las raíces de la ecuación cuadrática presentada en forma factorizada; $(x + b)(x + c) = 0$?.

$x_1 =$ ___________ y $x_2 =$ ___________

En efecto, tiene usted razón las raíces de la ecuación son precisamente; $x_1 = -b$ y $x_2 = -c$, pero esto, ¿Cómo podemos justificarlo de manera formal?

Si se sustituye la primera raíz $x_1 = -a$, en la ecuación cuadrática; $(x + b)(x + c) = 0$, se observara que $(-b + b)(x + c) = 0$,cumple con la igualdad, ya que $0 \cdot (x + c) = 0$, lo mismo ocurre si se sustituye la raíz; $x_2 = -c$ en la ecuación cuadrática; $(x + b)(x + c) = 0$, es decir $(x + b)(-c + c) = 0$, como el segundo factor es cero la igualdad se cumple "$0 = 0$". Si ya entendió usted esto, entonces podrá resolver los siguientes ejercicios:

ACTIVIDAD 5.

a. $(x + 3)(x + 4) = 0$	b. $(x + 5a)(x - 8a) = 0$	c. $(x - 4)(x - 2) = 0$
d. $\left(x + \frac{7}{5}\right)\left(x - \frac{17}{6}\right) = 0$	e. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x) = 0$	f. $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{4}{7}\right) = 0$

Para pensar: si una ecuación (de tercer grado o de cuarto grado) que usted verá en los cursos más avanzados de matemáticas se pueden escribir de esta forma factorizada, entonces, no resultara difícil saber cuáles son las raíces o soluciones de estas ecuaciones cubicas y cuadráticas:

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-7)(x+2)=0 \quad , \quad (x+3)(x+4)(x+7)(x+1)=0$$

ACTIVIDAD 6.

Las raíces de la ecuación son $x_1 = b$ y $x_2 = c$, con esta información determine la ecuación cuadrática

a. $x_1 = 7 \quad x_2 = 2$	b. $x_1 = -8 \quad x_2 = -4$	c. $x_1 = 9 \quad x_2 = -1$
d. $x_1 = \frac{2}{7} \quad x_2 = -\frac{7}{3}$	e. $x_1 = 4u \quad x_2 = 7u$	f. $x_1 = -9 \quad x_2 = 12$

ACTIVIDAD 7.

Determine si las raíces satisfacen la ecuación cuadrática correspondiente:

<u>Nota. Resuelva con lápiz y papel y después compruebe sus soluciones con Geogebra</u>

a. $x^2 - 9x + 20 = 0$	$x_1 = 4 \quad x_2 = 5$
b. $x^2 - 12x + 27 = 0$	$x_1 = 4 \quad x_2 = 9$
c . $x^2 + 4x - 11 = 0$	$x_1 = -5 \quad x_2 = 11$

Sesión 2

1.3 Métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$.

- **Aprendizajes**:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ **Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.**
- ✓ Interpreta en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elige, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.
- ✓ Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.
- ✓ Generaliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- ✓ Identifica los parámetros a, b, c en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.
- ✓ Identifica la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas

- ✓ En la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, es útil plantear ejercicios en los que se tiene un producto de dos binomios igualado a cero y analizar las condiciones en que esto es posible, haciendo notar en cada caso que la dificultad se reduce a resolver una ecuación lineal sencilla. Con el fin de promover la reversibilidad de pensamiento, se sugiere que el profesor plantee determinar una ecuación a partir de sus raíces reales.
- ✓ Introduce el método de completar cuadrados con el desarrollo de expresiones cuadráticas de la forma $a(x\pm m)^2=n$ que lo conduzca a una ecuación que no pueda resolver con los métodos vistos hasta el momento. Por lo que se requiere realizar el proceso inverso de completar cuadrados.
- ✓ El profesor apoye y oriente al estudiante con actividades de generalización, para que llegue a la obtención de la fórmula general de la ecuación cuadrática.
- ✓ El profesor plantee ejercicios, que conduzcan a una, dos o ninguna raíz real y pide a los alumnos analicen qué es lo que provoca tales resultados.

A principios del siglo XVI, en la Era del Renacimiento en Italia. Se presentó el ambiente en que aconteció el descubrimiento, y solución de problemas, de tipo acertijos, modelándose como ecuaciones, en algunos casos ecuaciones de grado superior a dos.

Las tabernas y las calles constituyeron una extensión de las universidades, para la reunión, discusión y convivencia. Se reunían personas con diversas actividades, desde tahúres (jugadores de cartas y juegos de azar), espadachines matones, ladrones y algebristas, formando una sociedad pintoresca como nunca se ha dado en la historia.

De este último grupo se sabe que varios de ellos tenían actividades relacionada con las matemáticas, en su mayoría estos personajes eran autodidactas; un grupo avanzado; sagaz y oportunista , cuyo trabajo estaba relacionado con actividades tales como; la contabilidad, problemas de interés compuesto y de seguros, en este ambiente, entre tramposos y jugadores de cartas, espadachines que frecuentaban las tabernas , y que deambulaban por los callejones de las ciudades algunos aspiraban y algunas veces ocupaban cátedras en las universidades . Para darse publicidad realizaban pruebas de agilidad mental sosteniendo entre ellos competencias en la solución de problemas, para mostrar su seguridad en sus conocimientos se desafiaban entre si haciendo apuestas de dinero, depositándolo con otra persona. El ganador se lo llevaba todo.

Lectura de artículo:	http://fcm.ens.uabc.mx/~chelo/algebra/alg-8/his-esc.pdf

1.3.1 Método de Factorización

En la sección anterior se ha visto la ecuación cuadrática $(x + a)(x + b) = 0$, que pasa si la desarrollamos, ¿Qué forma tendrá?

Ecuación cuadrática en forma factorizada;	$(x + a)(x + b) = 0$
Desarrollando:	$x^2 + bx + ax + ab = 0$
Factorizando términos semejantes;	$x^2 + (a+b)x + ab = 0$

El método de factorización permite encontrar las raíces de la ecuación cuadrática por inspección. Como se mostrara en el ejemplo:

Ejemplo 7.

Determine las raíces de las ecuaciones:

$x^2+(a+b)x+ab=0$	La suma $a+b$ de los dos números es:	El producto ab de los números es:	Las raíces son
$x^2+4x+3=0$	4	3	1 y 3
$x^2-5x+4=0$	-5	4	-4 y -1
$x^2+2x-8=0$	2	-8	4 y -2

ACTIVIDAD 8.

Determine las raíces de las ecuaciones:

$x^2+(a+b)x+ab=0$	**La suma $a+b$ de los dos números es:**	**El producto ab de los números es:**	**Las raíces son**
$x^2+4x-21=0$	4	-21	
$x^2-7x+10=0$	-7	10	
$x^2+3x-4=0$	3	-4	

Solución; a. -3 y 7; b. -2 y -5; c. 4 y -1

ACTIVIDAD 9.

Escriba la ecuación correspondiente conociendo los valores de las raíces:

Las raíces son	**La suma $a+b$ de los dos números es:**	**El producto ab de los números es:**	$x^2+(a+b)x+ab=0$
2 y -6			
-1 y -7			
2 y -12			

Para reflexionar; como se podría resolver u obtener la solución de la ecuación cuadrática: $\frac{7}{2}x^2-\frac{9}{5}x-11=0$, por el método de factorización.

1.3.2 Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

EL MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS.
Existen una infinidad de ecuaciones de segundo grado que es muy difícil de factorizar, en esta sección veremos el método general del cual se deduce esta fórmula que se llama "método de completar cuadrados". ¿En qué consiste este método?
Es un método algebraico cuyo objetivo es despejar la incógnita "x" de la ecuación cuadrática una vez que ha sido expresada en su forma más simple.

Ejemplo 8.

Resuelva la ecuación cuadrática; $2x^2-10x+12=0$ por el método de completar el cuadrado

Paso 1 deshágase del termino libre pasándolo al otro extremo de la igualdad	$2x^2-10x+12=0$ $2x^2-10x=-12$
Paso 2 Factorice el coeficiente del termino cuadrático;	$2\left(x^2-5x\right)=-12$
Paso 3 Observe el coeficiente del termino libre, divídalo entre dos, elévelo al cuadrado (solo indíquelo)	$\left(\frac{-5}{2}\right)^2$
Paso 4 este término deberá agregarse al extremo derecho y al extremo izquierdo de la igualdad	$2\left(x^2-5x+\left(\frac{-5}{2}\right)^2\right)=-12\left(\frac{-5}{2}\right)^2$
El factor del extremo izquierdo de la igualdad lo trasponemos hacia extremo derecho;	$\left(x^2-5x+\left(\frac{-5}{2}\right)^2\right)=\frac{-12}{2}\left(\frac{-5}{2}\right)^2$
del lado izquierdo se tiene un trinomio cuadrado perfecto	$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-6$
Simplificando el lado izquierdo:	$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$

Por transitividad de la igualdad	$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
Aplicando raíz cuadrada a ambos extremos de la igualdad	$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$
Despejando, obtenemos dos raíces o soluciones;	$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ $x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$

Comprobación:	$2x^2-10x+12=0$	
sustituyendo x_1	sustituyendo x_1	$2(3)^2-10(3)+12=0$ $0=0$
	sustituyendo x_2	$2(2)^2-10(2)+12=0$ $0=0$

Ejemplo 9.

Paso 1 deshágase del termino libre pasándolo al otro extremo de la igualdad	$2x^2-5x+2=0$ $2x^2-5x=-2$
Paso 2 Factorice el coeficiente del termino cuadrático;	$2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)=-2$
Simplificando, trasponiendo el factor “2” del lado izquierdo:	$2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)=\frac{-2}{2}=-1$
Paso 3 Observe el coeficiente del termino libre, divídalo entre dos, elévelo al cuadrado (solo indíquelo)	$\left(\frac{\frac{-5}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{-5}{4}\right)^2$
Paso 4 este término deberá agregarse al extremo derecho y al extremo izquierdo de la igualdad	$\left(x^2-5x+\left(\frac{-5}{4}\right)^2\right)=-1+\left(\frac{-5}{4}\right)^2$

Simplificado cantidades del lado izquierdo:	$\left(x^2-5x+\left(\frac{-5}{4}\right)^2\right)=-1+\frac{25}{16}=\frac{9}{16}$
del lado izquierdo se tiene un trinomio cuadrado perfecto	$\left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$
Aplicando raíz cuadrada a ambos extremos de la igualdad	$x^2-\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$
Despejando, obtenemos dos raíces o soluciones;	$x_1=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$ $x_2=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Comprobación:	$2x^2-5x+2=0$	
sustituyendo x_1	sustituyendo x_1	$2(2)^2-5(2)+2=0$ $0=0$
	sustituyendo x_2	$2\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\frac{1}{2}\right)+2=0$ $0=0$

Ejemplo 10.

Consideremos la ecuación cuadrática completa:	$ax^2+bx+c=0$
Despejando el termino libre " c "	$ax^2+bx=-c$
Factorizando " a "	$a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)=-c$
El término $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, es el que completa el trinomio cuadrado perfecto	$a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-c$

Factorizando:	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$
Factorizando	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$
Aplicando raíz cuadrada a ambos extremos de la igualdad:	$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
Simplificando:	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
Despejando "x"	$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
factorizando , sumando las dos fracciones;	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Esta última expresión es la que corresponde a lo que se conoce comúnmente como la formula general (formula de Cardano) que resuelve cualquier ecuación de segundo grado, ya sea completa o incompleta.

ACTIVIDAD 9.

Resuelva las ecuaciones cuadráticas por el método de completar el cuadrado. Compruebe sus resultados usando el Software Geogebra.

a. $3x^2-15x-42=0$	b. $5x^2+\frac{35}{2}x-10=0$	c. $3x^2+21x+30=0$

Sol. a. 7 y -2; b. ½ y -4 c. -5 y -2

Sesión 3

1.3.3 Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.

En la sección anterior se ha deducido la formula general. En esta sección la aplicaremos para resolver de forma inmediata ecuaciones cuadráticas.

Se dice que una ecuación de segundo grado es aquella que puede reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$

Podemos observar que en función del valor de los coeficientes b y c, las podemos clasificar en incompletas si se anula b o c, o completas si no se anula ninguno de los coeficientes.

Solucionar o resolver una ecuación de segundo grado consiste en averiguar qué valor o valores al ser sustituidos por la indeterminada (incógnita) convierten la ecuación en una identidad.

La Ecuación de segundo grado completa:

Una ecuación de segundo grado se dice completa si $a,\ b\ y\ c$ son todos no nulos.
Para resolver estas ecuaciones aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 11.

Resolver la siguiente ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ aplicamos la formula descrita arriba.

La solución general de la ecuación cuadrática es:	$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Sustituyendo $a = 1$; $b =$ -5 y $c = 6$ en la solución general:	$x = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$
simplificando	$x = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 24}}{2}$
Las dos raíces son:	$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

ACTIVIDAD 10.

Resuelva las ecuaciones cuadráticas por el método de la formula general. Compruebe sus soluciones sustituyéndolas en la ecuación.

a. $3x^2-15x-42=0$	b. $5x^2+\frac{35}{2}x-10=0$	c. $3x^2+21x+30=0$

Sol. a. 7 y -2; b. ½ y -4 c. -5 y -2

1.3.3.1 Discriminante b^2-4ac y naturaleza de las raíces.

Llamamos **discriminante** a la cantidad $\Delta=b^2-4ac$ en función del signo del discriminante conoceremos el número de soluciones de la ecuación, así:

$$\begin{cases} \text{Si } \Delta< 0,\text{la ecuación no tiene soluciónes reales} \\ \text{Si } \Delta= 0,\text{hay una sola solución real} \\ \text{Si } \Delta> 0,\text{hay dos soluciones reales} \end{cases}$$

Ejemplo 11.

Qué tipo de raíces tienen las ecuaciones:

Ecuación	**discriminante** $\Delta=b^2-4ac$	Tipo de raíces:
$x^2+2x+1=0$	$\Delta=(2)^2-4(1)(1)=0$	Dos raíces reales e iguales (o una sola raíz real)
$x^2+x+1=0$	$\Delta=(1)^2-4(1)(1)<0$	Dos raíces no reales o complejas
$x^2+4x+1=0$	$\Delta=(4)^2-4(1)(1)>0$	Dos raíces reales y distintas

ACTIVIDAD 11.

Determine el tipo de raíces de las ecuaciones, usando el discriminante b^2-4ac:

a. $2x^2-2x+5=0$	b. $4x^2+4x+1=0$	c. $3x^2-6x+1=0$

Sesión 4

1.4 Problemas de aplicación.

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Establece el modelo matemático del problema y aplica el método de resolución conveniente.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas

- ✓ El profesor plantee diversos problemas de aplicación, sugiriendo el uso de ayudas heurísticas convenientes.

¿Qué es un algoritmo?

El un conjunto de operaciones sistemáticas y ordenadas que permite realizar un cálculo o hallar la solución de problema.

En el libro de Polya; "Cómo Plantear y Resolver Problemas" se puede hallar el Método de Cuatro Pasos", a continuación se proporciona un breve resumen de este algoritmo, el cual lo aplicaremos a la resolución de problemas relacionados con ecuaciones.

Paso 1: Entender el Problema. En este proceso debes entender lo que se pregunta (que se pide), verificar si ya se ha resuelto uno parecido, de esta forma replantear el problema, debes distinguir los datos y determinar si la información es suficiente para resolver el problema.

Paso 2: Configurar un Plan. Aplicando una estrategia para resolverlo, buscar patrones, conjeturar y aplicar el proceso ensayo error, hacer diagramas y/o dibujos, realizar un análisis dimensional.

Paso 3: Ejecutar el Plan. Ejecutar las estrategias que escogiste para solucionar el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o busca otra estrategia y vuelve a empezar.

Paso 4: Mirar hacia atrás. Encontrar la respuesta y comprobarla.¿ Es posible extender tu solución a un caso más general?

Es recomendable que el alumno realice la investigación de que es un dato, incógnita, proposición y ecuación.

La solución de una ecuación consiste en encontrar los valores de las incógnitas que hacen verdaderas las ecuaciones. A esos valores también se acostumbra a nombrarlas como raíces o conjunto solución de la ecuación.

Para resolver un problema que da lugar a una ecuación de primer grado (más adelante en los siguientes cursos se le llamara ecuación lineal), hay que construir el modelo y resolverlo. **Consulta el siguiente sitio para una mejor información:**

GEORGE POLYA: ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS. I.E.S. Rosa Chacel. Dpto. de Matemáticas.

http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

Para el siguiente problema, elabora el modelo y busca su resultado.

EJERCICIOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $5x^2 + 21x - 28 = 0$	b. $-x^2 + 4x - 7 = 0$	c. $x^4 + 12x^3 - 64x^2 = 0$
d. $12x^2 - 3x = 0$	e. $4x^2 - 16 = 0$	f. $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$

2.- Resuelve las ecuaciones bicuadraticas. Se sugiere realizar un cambio de variable del tipo $u = x^2$:

a. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$	b. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $(2x-3)^2 = 8x$	b. $2x(3x-4) - (1-3x)(1+x) = -2$
c. $\frac{x^2+2}{5} - \frac{x^2+x}{2} = \frac{3x+1}{10}$	d. $1 - 5x\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{x}{2}$

7.- Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$, sean iguales. Sugerencia utilice la expresión del discriminante.

8.- La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Halla dichos números.

9.- Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

10.- Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

11.- Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m².

12. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

13.- Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

14.- Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{26}{5}$.

15.- Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

16.- Dos tubos A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda a cada uno separadamente?

17.- El producto de dos números es 4, y la suma de sus cuadrados 17. ¿Cuáles son esos números?

18.- Halla una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$ cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1184.

19.- Un cliente de un supermercado ha pagado un total de $156 por 24 l de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l de aceite más 4 l de leche.

20.- Dos números que se diferencian en 3 unidades, multiplicados dan 88. Halla dichos números.

21.- Encuentra un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces ese número.

22.- El perímetro de un rectángulo es 42 cm. Si la diagonal mide 15 cm. Halla la anchura del rectángulo. (Pon un lado en función del otro).

23.- La edad de un niño será dentro de 3 años el cuadrado de la que tenía hace tres. Halla los años que tiene.

24.- Al aumentar 5 metros el lado de un cuadrado, su área aumenta en 75 m2. Calcula el lado del cuadrado.

25.- Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm. menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.

26.- Varios amigos se reparten un premio y les toca a 1500 pesos a cada uno. Si hubieran sido cuatro amigos más, le hubiera tocado a cada uno 300 pesos menos. ¿Cuántos amigos son los que intervienen en la repartición?

27.- Se tienen dos cuadrados distintos y el lado de uno de ellos es 4 cm. mayor que el lado del otro. Averigua la longitud de los dos lados sabiendo que la suma de sus áreas es 808 cm^2.

28.- Calcula la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que su área es la cuarta parte del área de otro cuadrado cuyo lado es 2 cm. mayor.

29.- Halla dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 103.

Sesión 5 (cierre)

1.8 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 1

Selecciona el inciso que corresponde a la respuesta correcta.

1. Un modelo matemático que resuelve el siguiente problema: "El producto de dos números enteros impares consecutivos es 143 y x es el impar menor"

a. $x(x+1)=143$ b. $x(x+2)=143$ c. $(x-1)x=143$

d. $x^2+x-143=0$ e. $x^2+2x-143=0$

2. Hallar dos enteros pares consecutivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 1060. El modelo matemático que resuelve este problema donde x es en número menor es:

a) $x^2+2x-528=0$ b) $x^2-2x-1060=0$

c) $(x-2)(x+2)=1060$ c) $x^2+2x-1060=0$

3. Dos tuberías de agua pueden llenar una cisterna (depósito subterráneo de agua) en 3 horas cuando trabajan juntos y al mismo tiempo. Uno de ellos puede llenar el estanque en 2 horas menos que el otro si trabaja solo. ¿Cuánto tiempo tardan en horas en llenar por separado cada tubo este estanque?

a) 4.16 y 2.16 b) 3.16 y 5.16 c) 5.16 y 7.16 d) 4.16 y 6.16 e)

4. Al resolver la siguiente ecuación $4x^2-8x-6=2x$ por el método de factorización tenemos:

a) 2(x+3)(2x-1)=0 b) $2(x-3)(2x+1)=0$

c) $2(x+1)(3x-1)$ d) $(x+1)(2x-3)=0$

5. El valor del discriminante de la ecuación $3x^2+8x+2=0$ y la naturaleza de sus soluciones es:

a) Δ=- 40, imaginarias b) Δ=50, reales y distintas

c) Δ=0, reales y doble d) Δ= 40, reales y distintas

8. Sea Δ el discriminante de la ecuación bicuadrática $ay^4+by^2+c=0$, entonces el discriminante de la ecuación que resulta de sustituir a $x=y^2$ es:

a) Mayor de cero b) Menor de cero c) Igual a Δ d) Diferente a Δ

9. Una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ ¿Podrá tener una raíz real y otra raíz imaginaria?

a) Algunas veces b) Casi siempre c) Casi nunca d) Nunca

e. solo existe un único caso

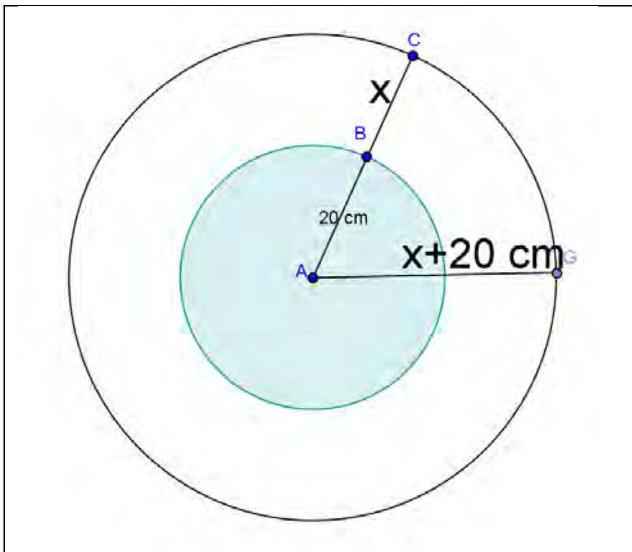
Una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ ¿Podrá tener dos raíz real y otra raíz imaginaria?

10. Las soluciones de la ecuación de segundo grado $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0$ son:

a) $1 \quad y \quad \frac{1}{m}$ b) $0 \quad y \quad m$ c) $m \quad y \quad \frac{1}{m}$ d) $-1 \quad y \quad -\frac{1}{m}$

PROBLEMA 2.

Un restaurante italiano vende pizzas redondas de 40 cm de diámetro. Desea elaborar una pizza mayor de tal manera que el área sea el doble de la original de 40 cm. ¿cuánto deberá aumentar el diámetro la nueva pizza, para que duplique su área?



El área del círculo mayor deberá ser igual al doble del área del círculo menor.

$A_2 = 2\ A_1$

Donde A_1 es el área menor y A_2 es el área mayor

Solución

Aplicamos la fórmula del área del círculo $A = \pi r^2$ y tenemos lo siguiente:

$$\pi(x+20)^2 = 2\pi(20)^2$$

Para resolver esta ecuación primero la expandimos y luego la reducimos algebraicamente para que quede en su forma general reducida.

$$(x+20)^2 = 2(20^2)$$

$$x^2 + 40x + 20^2 = 2(20^2)$$

$$x^2 + 40x - 20^2 = 0$$

$$x^2 + 40x - 400 = 0$$

Se observa que tenemos una ecuación de segundo grado completa donde a=1, b=40 y c=400. La cual se puede resolver por la formula general y tenemos lo siguiente:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(1)(-400)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 1600}}{2}$$

$$= \frac{-40 \pm \sqrt{3200}}{2}$$

$$= \frac{-40 \pm 56.57}{2}$$

$$x_1 = \frac{-40 - 56.57}{2} = -\frac{96.57}{2} = -48.28$$

$$x_2 = \frac{-40 + 56.57}{2} = \frac{16.57}{2} = 8.28$$

Desechamos la solución negativa y por lo tanto el valor de x es de 8.28 cm. lo que nos indica que el radio crecerá hasta 28.28 cm y su diámetro será de 56.56 cm, para duplicar el área de la pizza original.

PROBLEMA 3.

Un tanque se puede llenar en 4 horas cuando se usan dos llaves A y B ¿Cuántas horas requiere cada llave para llenar el tanque si la llave más pequeña necesita 3 horas más que la más grande?

Planteamiento:

A= llave más grande

B= llave más pequeña

Sea x = tiempo que tarda en llenar el tanque la llave grande A

X+3 = tiempo que tarda en llenar el tanque la llave pequeña B

$\frac{1}{x}$ = Cantidad del tanque que llena A en una hora

$\frac{1}{x+3}$ = Cantidad de tanque que llena B en una hora

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ = Cantidad de tanque que llenan A y B en una hora

$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$ = Cantidad de tanque que llenan A y B en 4 horas

Pero como en 4 horas se llena un tanque en entonces tenemos que:

$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1$ Que representa el modelo matemático que resuelve el problema.

Trabajando algebraicamente este modelo tenemos que se reduce a una ecuación cuadrática completa.

$$\frac{4(x+3)+4x}{x(x+3)}=1$$

$$4x+12+4x=x^2+3x$$

$$x^2-5x-12=0$$

Al resolver esta ecuación por los métodos ya vistos tenemos:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{73}}{2} \qquad y \qquad x_2=\frac{5-\sqrt{73}}{2}$$

Tomando solo la raíz positiva tenemos que $x \approx 6.78\ horas = 6\ horas\ 46.8\ minutos$

Solución del examen.

PREGUNTA	RESPUESTA
1	B
2	A
3	C
4	B
5	D
6	C
7	A
8	C
9	D
10	D

1.9 BIBLIOGRAFIA DE LA UNIDAD

BIBLIOGRAFIA PARA EL ALUMNO

Barnett, R. A. (2007). Precálculo, Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría. Ciudad de México: Limusa Noriega Editores.

Barnett Rich. (2003). Algebra Elemental Teoría y Problemas. Ciudad de México: Mc Graw Hill Editores Serie Schaum.

Barnett R. A. (2003). Algebra y Trigonometría. Ciudad de México: Mc. Graw Hill

Britton J. R., y Bello, I. (2006). Álgebra y Trigonometría Contemporáneas. Ciudad de México: Editorial Harla.

Jhonson L. M., y Steffensen A. R. (2004) Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Ciudad de México: Editorial Trillas.

Swokowski y Cole (2008). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.

Ciudad de México: International Thomson Editores

BIBLIOGRAFIA PARA PROFESOR

Kurosch A.G.(2017). Algebra Superior, capítulos I, II y III. Ciudad de México: Editorial MIR Moscú

Raggi, Cárdenas, Lluis, Tómas (2012). Algebra Superior .Ciudad de México: Editorial Trillas

Ayres Frank (2003). Algebra Moderna. Ciudad de México: Editorial McGraw Hill Serie Schaum,

Referencias

Para el alumno

Básica:

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Cengage

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría. México: Publicaciones Cultural.

Complementaria:

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México, Pearson.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGraw Hill, Interamericana

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: Pearson.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: Esfinge.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). Álgebra. México: Pearson.

Para el profesor

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México: Pearson.

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L.
(2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGraw
Hill, Interamericana

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: Pearson.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: Grupo Editorial Iberoamericana

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: Esfinge.

Larson, R. y Hostetler, R. (2006). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.

Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). Geometría y trigonometría. México:
Prentice Hall.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática:
razonamiento
y aplicaciones. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría.
México: Publicaciones Cultural.

Polya, G. (1981). Cómo plantear y resolver problemas (1 ̇ed., 9 ̇reimp. ed.).
México: Trillas.

Rees, P. y Sparks, F. (2005). Álgebra. México: Reverte.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). Álgebra.
México: Pearson.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría
analítica. México: Cengage

UNIDAD 2
FUNCIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES

PROPÓSITO:
Al finalizar, el alumno:

Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

Tiempo Estimado: 15 horas.

1.0 PRESENTACIÓN

En esta Unidad temática de la Guía de Profesor de matemáticas II, se abordan los aprendizajes de la unidad II de Matemáticas II señalados por el Programa de estudios, plan 2016: Los aprendizajes que debe lograr el alumno, los contenidos de la unidad y el cómo abordarlos a través de estrategias de aprendizaje; en particular el uso de la resolución de problemas y la metodología de Polya. Se proporcionan recomendaciones acerca del nivel de tratamiento de la docencia a nivel bachillerato, el sentido de la Unidad y Conexiones de las Funciones cuadráticas con otros temas de semestres posteriores y anteriores, el tiempo disponible que es de quince horas para lograr estos propósitos.

Las estrategias que se proporcionan en esta unidad son las más recomendables de acuerdo al programa de estudios vigente (plan 2016), para abordar cada uno de los aprendizajes, guiando al profesor para que este logre realizar su docencia abordando los principios del CCH de aprender a aprender, aprender haciendo y aprender a ser.

En cuanto a las actividades de enseñanza aprendizaje se busca que el alumno Profundice, en el conocimiento de las Funciones, a través del análisis del planteamiento comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros. Por otra parte se propicia el uso de los diversos tipos de registro de la función; algebraico, tabular y gráfico de esta forma a través de la contrastación de la representación gráfica y analítica, se realiza el papel de los parámetros de dicha función..

Posteriormente el estudiante Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

Está Unidad temática retoma los conocimientos vistos en la Unidad I, del mismo programa de la asignatura, en general prosigue con el proceso de traducción y modelación de un problema presentado de manera escrita para ser trasladado al lenguaje algebraico; obteniendo como resultado una función algebraica de segundo grado, en particular se revisan nuevamente el método de completar el cuadrado, la factorización como producto de binomios para darle una presentación equivalente a dicha función; útil para hallar el vértice de la parábola y el uso de la formula general para obtener las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática con el eje de las abscisas.

Este material correspondiente a la segunda Unidad “Funciones cuadráticas y aplicaciones” ayudará al profesor para que el estudiante reafirme estrategias generales previamente vistas en las unidades 3 y 4 del programa de estudios de la asignatura Matemáticas I; así como también en las unidad I de Matemáticas II; las cuales son respectivamente; “Ecuación lineal “, “Sistemas de ecuaciones lineales” y

"Ecuación cuadrática" para posteriormente ampliarlas en la presente Unidad II de la asignatura de Matemáticas II, "Funciones cuadráticas y aplicaciones" buscando que el alumno distinga las diferencias y similitudes entre las funciones lineales y las funciones cuadráticas.

Posteriormente esta Guía de profesor, buscará a través de problemas planteados en las secuencias didácticas (contenidas en ella), enfrentar al alumno con problemas de optimización que le ayuden a modelar problemas reales que abren una panorámica mayor sobre la matemática y en especial se busca que el estudiante amplié su panorama de conocimientos en el tema de funciones y pueda aplicarlo posteriormente al análisis de funciones de mayor grado.
Finalmente se proporciona una propuesta de evaluación de la Unidad con su respectiva Bibliografía tanto Básica como Complementaria.

1.2 LOS APRENDIZAJES, LA TEMÁTICA Y LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDOS POR EL PROGRAMA DE ESTUDIOS.

1.2.1 LOS APRENDIZAJES

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.
- ✓ Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. Identifica las diferencias entre variación lineal y cuadrática
- ✓ Interpreta el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.
- ✓ Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje X(eje de las abscisas), con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.
- ✓ Expresa la función $y = ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico.
- ✓ Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.
- ✓ Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

1.2.2 LA TEMÁTICA

1. Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas
2. Estudio gráfico, analítico y contextual de la función $y = ax^2 + bx + c$, en particular: $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x-h) + k$
3. Ceros de la función.
4. La función $y = ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas. Simetría, concavidad, máximo o mínimo.
5. Forma estándar y=a(x-h)^2 +k

6. Problemas de aplicación.

1.2.3. LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS.

Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual y colaborativo; en equipos de dos (preferentemente) o en casos singulares de tres alumnos y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

- El profesor inicie con problemas de área, número de diagonales en un polígono de "n" lados, estrechar la mano a un grupo de personas; cuyo modelo matemático resulte ser una función cuadrática. Esto permite que el alumno explore las condiciones, valores, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera, de manera que obtenga información, como un paso previo a establecer la representación algebraica de una función cuadrática. El profesor propone a los estudiantes trabajar en equipo.

✓ El profesor propone a los alumnos, organizados en equipo, la construcción de gráficas para analizar el comportamiento de los parámetros y posteriormente el alumno confronta mediante un software dinámico, lo realizado a lápiz y papel.

✓ A partir de una función dada, el alumno calcula los valores correspondientes para $f(x)=0$

✓ El profesor cuestiona a los alumnos sobre la simetría de la gráfica de las funciones cuadráticas, y su utilidad para determinar el valor máximo o mínimo y las coordenadas del vértice.

✓ El profesor plantea a sus alumnos la actividad de transformar una función cuadrática a la forma $y = a(x-h)+k$ y analizar su utilidad para determinar las características analíticas y gráficas de la función.

✓ El profesor resalta la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización en diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos y ganancias.

5.3 SENTIDO DE LA UNIDAD V "ECUACIONES CUADRÁTICAS"

El propósito fundamental en el tratamiento y presentación de esta Unidad II "Funciones cuadráticas y aplicaciones" de la asignatura de matemáticas II, está orientada a satisfacer los requisitos institucionales del programa actualizado de matemáticas II; buscando que el estudiante: aprenda a analizar el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica, tabular y analítica. Bajo esta consideración sepa resolver problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática contrastándolas con las del tipo de variación lineal. También se busca que tanto el profesor que imparta esta asignatura y el alumno que la estudie puedan contar con un material que se adecué al programa de estudios y a las necesidades dentro y fuera del aula, ya que la Guía de profesor ofrece una gran variedad de problemas y ejercicios resueltos, propuestos y garantizando el alcanzar los objetivos de la unidad. Permitiendo también que el estudioso de estos temas cuente con un material que se ajusta al programa actual del curso (plan de estudios 2016).

5.4 CONEXIÓN CON OTRAS UNIDADES DE OTRAS ASIGNATURAS.

La Unidad II; “Funciones cuadráticas y aplicaciones” de la asignatura de matemáticas II, tiene necesariamente antecedentes y consecuentes que es necesario establecer.

Matemáticas I
Se debe mencionar que para alcanzar los objetivos de esta Unidad, el alumno debe poseer conocimientos sólidos en el campo del algebra elemental, en especial la solución de las ecuaciones de primer grado y la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Unidades 3 y 4 de dicha asignatura.

Matemáticas II
La unidad 1, Ecuaciones cuadráticas, es antecedente y se relaciona directamente con la Unidad 2 del mismo programa, Las funciones cuadráticas, siendo ésta última la consecuente de esta unidad.

Matemáticas III
Se prosigue el estudio de las ecuaciones, en particular obtener la forma algebraica para representar a un lugar geométrico, la ecuación de la parábola; la ecuación de la circunferencia y la de la elipse, requieren el uso del método de completar el cuadrado, visto en la presente Unidad. (Unidades de 4 y 5 de dicho programa de estudios).

Matemáticas IV
En la unidad I, Funciones polinomiales, como continuación de la unidad 2 de la signatura de matemáticas 2, que a su vez se relaciona con la unidad ecuaciones cuadráticas

Cálculo Diferencial e Integral I
En los temas de Límites, y derivadas de funciones, el modelo función cuadrático, es

el más sencillo para explicar el proceso de búsqueda de máximos y mínimos, puntos de inflexión, determinación de donde crece o decrece la curva.

Cálculo diferencial e integral II.
En la solución de integrales sencillas que involucran funciones algebraicas cuadráticas; y situaciones que requieren de realizar cambios de variable y su regreso.

Estadística y probabilidad I y Estadística y probabilidad II
En apariencia pareciera que no existe ninguna conexión específica con alguno de los temas, sin embargo es indudable que para logro de los aprendizajes de los conocimientos en estas asignaturas por parte de nuestros estudiantes, se requiere para su comprensión de los conocimientos aritméticos y algebraicos, y por ende aunque de manera indirecta es útil el conocimiento de funciones cuadráticas. Sería muy ingenuo pensar que no existe la necesidad de este conocimiento.

Por ser éste un curso elemental a nivel bachillerato, la contribución o relación es a nivel funciones lineales, sin embargo tanto el conocimiento de la función cuadrática y de las funciones lineales sirve de refuerzo en la representación de puntos en el plano cartesiano (para la construcción del Diagrama de dispersión), ajuste de la línea recta (modelo lineal). Interpolación y extrapolación (relacionado con el dominio de la variable aleatoria), y como inicio a otros tipos de ajuste de curvas tales como modelo cuadrático, exponencial, logarítmico, etc., que se verán en cursos posteriores de Probabilidad y Estadística.

5.5 NIVEL DE TRATAMIENTO

El tratamiento de los temas que se abordan en este material son de un nivel básico; ya que se entiende que el alumno esta poco familiarizado con este tema y aunque se estudia en la enseñanza secundaria, lo cierto es que lo más probable su tratamiento haya sido deficiente para la mayoría de los alumnos.

Se introduce cada tema con ejemplos y problemas muy sencillos y variados con la finalidad de ir introduciendo los conceptos de función cuadrática, de la tabulación y de su grafica llamada parábola para que el profesor pueda contar con ejemplos variados que le sirvan como orientación en la planeación, desarrollo de su clase, y realice la evaluación de aprendizajes. Sin descuidar la discusión o comentario de la importancia de la determinación del dominio y rango de la función cuadrática.

5.6 OBSTÁCULOS PREVISIBLES.

Debemos estar conscientes en la dificultad para alcanzar todos los objetivos de la Unidad II, de la asignatura de matemáticas II, es de esperarse que algunos alumnos tengan una serie de deficiencias conceptuales y operativas. Por otra parte tenemos que tener presente que tenemos por lo general 25 alumnos en el salón de clase y cada uno es distinto en la forma que construye su aprendizaje.

Por otra parte la falta de conocimientos y/o deficiencia de ellos determinara el éxito para abordar esta unidad. Sabemos que muchos alumnos que están inscritos en el segundo semestre no siempre tienen los antecedentes académicos necesarios para el buen desempeño en el aprendizaje de los temas y conceptos de matemáticas II, o que muchos de ellos ya no recuerdan los temas como resolución de ecuaciones de primer grado, ni los métodos de factorización y productos notables. Por dicha razón siempre es necesario considerar los antecedentes para abordar un nuevo aprendizaje, a veces será necesario revisar y repasar estos temas, de manera rápida, antes de retomar el nuevo aprendizaje.

Otro obstáculo que se puede presentar es la falta de tiempo en el calendario de estudios, sin embargo esta situación no se presenta por ser la segunda unidad de la asignatura) el factor tiempo incide por lo general en la última unidad el programa de la signatura)

Todas estas situaciones comentadas son salvables siempre y cuando el profesor realice una planeación de su docencia, tomando en cuenta los aprendizajes, la temática y la metodología para abordarlo (estrategias de aprendizaje), así como también los tiempos disponibles para lograr los objetivos. Si el profesor toma en cuenta el material didáctico dentro de su planeación, la cual presentamos como Guía de Profesor de matemáticas II. De esta forma ante tales contingencias se pueden realizar los ajustes necesarios para lograr los aprendizajes sugeridos por el programa de estudios (Plan 2016), en los tiempos disponibles.
Los obstáculos que por lo general presenta el estudiante, son:

- Dificultades para representar puntos en el plano cartesiano.
- Problemas para traducir un enunciado oral u escrito y llevarlo a la forma algebraica.
- Errores en realización de la gráfica, en particular cuando es necesario representar valores con escalas diferentes en los ejes.
- Problemas para realizar la representación factorizada de expresiones algebraicas, y para escribir la forma desarrollada de ellos.
- Deficiencia en el planteamiento de problemas que pueden modelarse a través de un sistema de ecuaciones sencillo.
- Deficiencia en la escritura (errores de ortografía) y notación inadecuada.
- Deficiencia en la realización de operaciones entre expresiones algebraicas tales como adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios, en particular cuando se trabaja con números negativos y positivos.

Además de otros no atribuibles directamente a la asignatura tales como;

- Dificultad de entender la lectura de enunciados de problemas, lo cual lleva a interpretaciones incorrectas, carecer de un método de estudio eficaz, y de una metodología para realizar la escritura de sus apuntes.

- Carencia de orden en la cuestión operativa de sus cálculos escritos en su cuaderno (procedimiento) para resolver un problema (escriben algunas veces donde se pueda, en ocasiones ahorrando el mayor espacio en la hoja). Que posteriormente incide cuando los estudiantes utilizan su propio cuaderno para repasar o reafirmar algún tema visto en clase (no entienden lo que ellos mismos han escrito).

- Utilización de varios cuadernos para llevar nota de los apuntes a veces sin fecha de referencia. O bien utilización de una carpeta con notas mezcladas de diversas asignaturas.

- Situación que se puede remediar si el profesor revisa periódicamente los apuntes y se le da un peso en la calificación en la elaboración correcta de apuntes.

Existen otras dificultades no atribuibles a la materia, pero que inciden en el desempeño y aprendizaje del estudiante, las instancias académicas y/o autoridad escolar, las minimizan o bien niegan su existencia (por carecer de interés y de posibilidades para resolverlo).
Si bien es cierto el profesor tampoco tiene posibilidades de resolverlos, si debería tomarlos en cuenta en su planeación, ser más flexible y proporcionar las ayudas especiales a sus estudiantes consideradas como "andamiajes" para el logro de los objetivos y aprendizajes, para que de esta forma se facilite a los alumnos sus aprendizajes aun a pesar de estas contingencias.

- Problemas de carácter social y económico de la familia del estudiante.
Por ejemplo: Familias disfuncionales, donde solo está a cargo uno de los padres, y en donde nadie supervisa sus actividades escolares y académicas.

- Factores económicos que inciden en la capacidad de compra de bienes y servicios, por ejemplo para adquirir una computadora con servicio de internet, imposibilidad de compra de útiles escolares en general, etc.

- Problemas biológicos: los factores de alimentación y salud. Cambios
Hormonales debido a alimentos que actualmente se comercializan de manera legal ; alimentos chatarra cargados de grasas, azucares, insecticidas y/o hormonas, que desorganizan su régimen alimentario y provoca enfermedades inicialmente como diarrea, obesidad, gastritis en algunos casos .No por la carencia de lugares donde se vendan alimentos adecuados, sino más bien por falta de recursos para adquirirlos, de esta forma se busca lo barato y lo rápido , desafortunadamente en lugares carentes de higiene.

- Problemas Psicológicos y de conducta, generados por el entorno donde habita. La Delincuencia, el pandillerismo, las adicciones, conductas y actitudes inapropiadas y destructivas, copiadas de películas, de TV o de personas ficticias o reales de su entorno y que ellos validan como normales o usuales.

- Problemas logísticos y de transporte. Estudiantes que deben transportarse grandes distancias, bajo situaciones de carencia o de gran demanda de servicio de transporte, lentitud de tráfico, contaminación y las afecciones respiratorias que esto ocasiona, debido a una inapropiada planeación de servicios en esta ciudad.

5.7 SESIONES DIDACTICAS.
Usando las secuencias didácticas, de la Guía.

En el programa de matemáticas II se abordan los conceptos que no son nuevos para los alumnos del CCH. Como son los temas de las Funciones de segundo grado.

Si bien es cierto que el alumno en la enseñanza media básica trabajo y aplicó estos temas, éste los manejo de manera superficial y tangencial, sin realizar un análisis concreto. Ahora nos proponemos expandir y profundizar estos conceptos. Dándole un carácter no solo de aplicaciones prácticas, sino fundamentalmente como una rama de las matemáticas que tienen una estructura y fundamentos sólidos en el campo de esta ciencia. Ver y analizar a las funciones cuadráticas como una unidad sólida, útil y con bases matemáticas que le permitirán al alumno abordar una gran cantidad de problemas donde se involucran este tipo de ecuaciones, las cuales trascenderán a otras más complejas, en los siguientes cursos no solo en las matemáticas que se imparten en el colegio a nivel Bachillerato, sino a otros niveles de las matemáticas que pudiera hallar en los niveles de licenciatura.

En esta unidad se toma en cuenta que el alumno tiene familiaridad con los conceptos e ideas de: relación, ecuación lineal, función lineal, comportamiento gráfico, la representación de los puntos en el plano y su relación con la representación algebraica de una línea recta, uso y manejo de las operaciones algebraicas elementales de suma, resta, multiplicación de polinomios, así como los productos notables y su factorización.

En la Unidad 2 “Funciones cuadráticas y aplicaciones”, el alumno tendrá la oportunidad de comprender y darse cuenta de que existen métodos y procedimientos eficaces que le permitan abordar y resolver una gran cantidad de problemas donde se vean involucrados los conceptos de área, simetría, grafica , localización del vértice de la parábola y su relación con la optimización a través de la búsqueda de puntos máximos o valores mínimos y sobre todo el alumno pueda percatarse de la diferencia entre una variación lineal generada por el modelo de línea recta y la variación cuadrática. Por otra parte el estudiante Integrará a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría, dominio y rango.

En cuanto al álgebra, y aritmética que abarca esta Unidad de “Funciones cuadráticas y aplicaciones” se intenta manejar estrategias generales y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que faciliten el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema tales como:

1. Acrecentar la capacidad del alumno para resolver problemas a través del uso de estrategias generales, usadas en su solución, como en el análisis de la representación algebraica. En general que el estudiante adquiera la capacidad para analizar Funciones cuadráticas , representarlas de diversas formas equivalentes en general utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico y que este conocimiento lo aplique en la resolución de problemas preferentemente de optimización.

2. Que el alumno desarrolle y mejore sus posibilidades de análisis. En particular; establezca la diferencia que existe entre una variación lineal y una variación cuadrática.

3. Permitir que el alumno explore nuevas alternativas para la solución de problemas de carácter algebraico y que con ayuda de la aritmética y el álgebra para visualizar y comprender los alcances de esta nueva herramienta que le permitirá plantear y resolver problemas en asignaturas posteriores que involucren funciones de mayor grado.

5.7.1 SESIONES.

A través de las "secuencias didácticas" de la guía de profesor de matemáticas II

UNIDAD II

Funciones cuadráticas y aplicaciones

Contenido Temático:	**página**

Introducción.

Se puede afirmar que en general, la humanidad ha conseguido extraordinarios logros al explorar e investigar los fenómenos de la naturaleza, Desde la antigüedad hasta nuestros días, cada cierto periodo de tiempo, determinados personajes han generado nuevas teorías que mejoran conceptos y clarifican situaciones, acrecentando el conocimiento, esto es un indicio de la inquietud por conocer, entender y obtener el conocimiento de las cosas que nos rodean.

En particular con respecto a las matemáticas el desarrollo del conocimiento es acumulativo, es decir los nuevos resultados tienen fundamento en antiguas experiencias o conocimientos. En concordancia a esta tendencia, esta segunda Unidad del curso de matemáticas II del CCH, continúa con el estudio de funciones iniciado en el primer semestre en la unidad 2, “Variación directamente proporcional y funciones lineales”.

En esta unidad “Funciones cuadráticas y aplicaciones” se prosigue en el estudio de la variación, ahora en la forma cuadrática; contrastando este tipo de variación con otra ya revisada en el curso anterior de matemáticas I, la variación lineal.

En esta Unidad se analizará el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros, y se iniciara la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos; la búsqueda de máximos y mínimos de la función y los tipos de concavidades.

La parábola, es la gráfica resultante al graficar la función cuadrática, esta aparece en muchas ramas de las ciencias aplicadas. En particular las parábolas representan las trayectorias ideales de los cuerpos que se mueven bajo la influencia exclusiva de la fuerza de gravedad (ver movimiento parabólico y la trayectoria balística).

Otras de las diversas aplicaciones que tiene el estudio de esta función, la podemos encontrar en la construcción de las antenas satelitales y de los radiotelescopios las cuales concentran las señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco. Una aplicación más, de varias que existen la podemos encontrar en el diseño de cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar para la fundición de metales, en donde se concentra de la radiación solar en un punto (foco de la parábola).

Sesión 1

2.1 Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.

Aprendizajes:
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

✓ Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.

Estrategias de aprendizaje sugeridas.
Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual y colaborativo; en equipos de dos (preferentemente) o en casos singulares de tres alumnos y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

✓ El profesor inicie con problemas de área, número de diagonales en un polígono de n lados, estrechar la mano a un grupo de personas; cuyo modelo matemático resulte ser una función cuadrática. Esto permite que el alumno explore las condiciones, valores, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera, de manera que obtenga información, como un paso previo a establecer la representación algebraica de una función cuadrática. El profesor propone a los estudiantes trabajar en equipo.

PROBLEMAS INTRODUCTORIOS

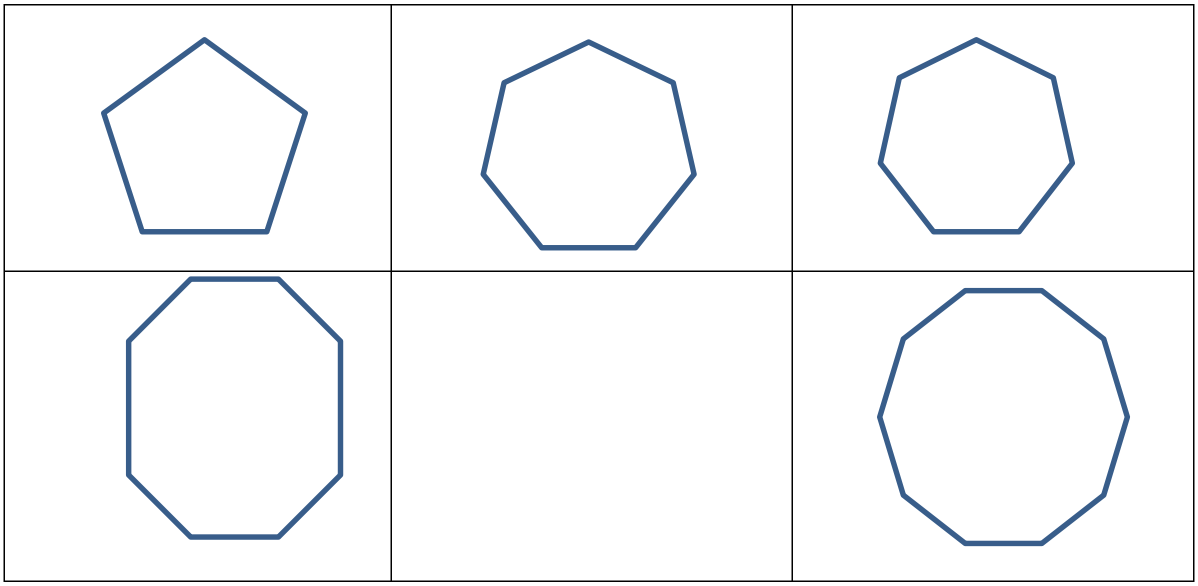
Problema 1. Número de diagonales, saludos y problemas de área.

ACTIVIDAD 1

a. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?
Empecemos con un polígono de tres lados es el mínimo…, completa la tabla.

polígono	Número de lados	Número de diagonales
triangulo	3	0
cuadrado	4	2
pentágono	5	
hexágono	6	
heptágono	7	
octágono	8	
nonágono	9	
…		
n - ágono	n	$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

Puedes utilizar las figuras:



b. ¿Cuántos saludos?

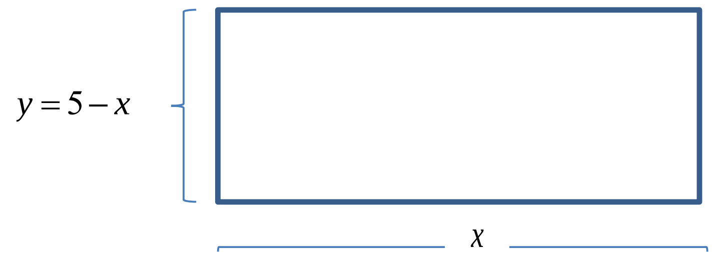
En una fiesta realizada en una casa, el primer invitado saluda al anfitrión, el segundo en llegar saluda al anfitrión a al primer invitado, así sucesivamente. Se contaron 55 saludos, cuantas personas acudieron a la fiesta. Complete la tabla:

Número de invitados	*Número de saludos*	*Número de invitados*	*Número de saludos*
1	*1*	*8*	
2	*1+2=3*	*9*	
3	*1+2+3=6*	*10*	
4		*11*	
5		*12*	
6		…	
7		*n*	$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/polidiagonal.htm

c. De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo ***p****, encontrar las dimensiones que generen el área máxima. En este proceso, se busca modelar el comportamiento del área, en términos de una variable.*

Consideremos por facilidad un perímetro de 10 unidades(p=10), de forma que el perímetro es igual a 2 veces el ancho(x *) más dos veces lo largo(* y *) , por esta razón , el semiperimetro(la mitad del valor del perímetro) será igual a ;* $5 = x + y$ *.*



Perímetro fijo

$2(x+y)=10$

Complete la tabla:

Largo x	*Ancho* $y=5-x$	*Área*	*Largo* x	*Ancho* $y=5-x$	*Área*
0	*5*	0	2.75		
0.5	*4.5*		3	*2*	*6*
1	*4*	4	3.5	*1.5*	
1.5	*3.5*		4		
2	*3*	*6*	4.5		
2.5			5	*0*	*0*

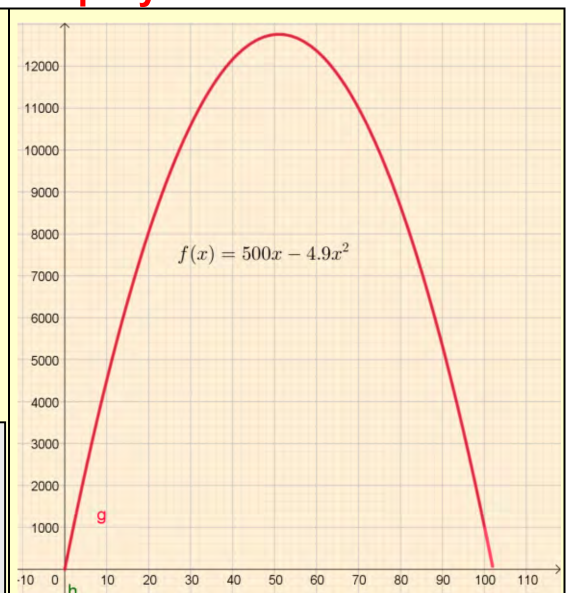
¿Por qué la variable x*, no puede ser mayor a 5?*
¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
¿La variable independiente es discreta o continua?

http://www.matedu.cinvestav.mx/~santos/atat/contexto_matematico.html

Problema 2. La altura alcanzada por un proyectil del rifle AK-47.

Se dispara una bala desde un rifle AK-47, con un ángulo de 30 grados, por simplicidad considere que la altura a la que se dispara es igual a cero.

Figura 1.1.1. Bosquejo de la función $f(x)=500x+4.9x^2$, en donde la altura "y" alcanzada por la bala está en función del tiempo "x".

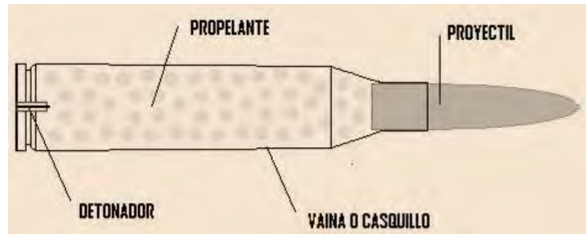


Los gases generados por la pólvora le imprimen una velocidad inicial a la bala, de 1000 metros sobre segundo, considere que la aceleración de la gravedad "g", es de aproximadamente 9.8 metros sobre segundo cuadrado, determine la altura máxima que alcanza la bala.

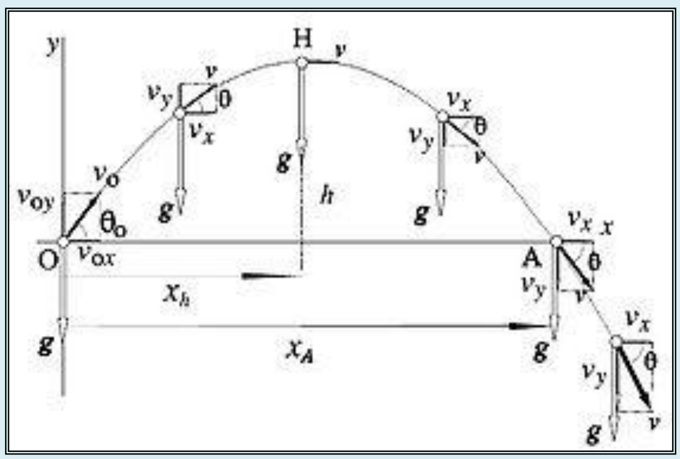
La ley física correspondiente es

$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$.

De esta forma la ecuación que relaciona la altura máxima "y" y el tiempo "x" es: $y = 500x - 4.9x^2$. La altura "y" que alcanza la bala depende del tiempo "x", que ha estado en vuelo la bala, es decir: $y = f(x)$.



El movimiento parabólico (tiro parabólico)



La trayectoria del movimiento balístico, consta de dos componentes una en la dirección horizontal (eje de las abscisas) y otra vertical (eje de las ordenadas), según libros de física coexisten ambos movimientos; el uniforme (con velocidad horizontal constante que representa el desplazamiento del proyectil horizontalmente) y otro uniformemente variado con velocidad variable debido a la aceleración de la gravedad; de esta forma un proyectil disparado con un ángulo inicial "θ", desde un punto $P(x_0, y_0)$ tiene una trayectoria parabólica. En la figura se observa que la velocidad inicial v_0 forma un ángulo inicial respecto al eje horizontal *x*; el movimiento se puede descomponer en dos tipos de movimientos:

Tipo de movimiento	Velocidad inicial	Ecuación de movimiento
Componente Horizontal.	$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$	$x = v_{0x}t$, rectilinio uniforme.
Componente vertical.	$v_{0x} = v_0 sen\theta_0$	$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ **Uniformemente acelerado , que tiene la forma general:** $y = ax^2 + bx + c$
La ecuación de movimiento completa es:	$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + \tan\theta_0 x + y_0$	

La grafica correspondiente se muestra en la figura 1.1.1, además se han tabulado algunos valores para esta función. Sin embargo la función $f(x)=500x-4.9x^2$ debe ser restringida a los valores reales, correspondientes o acordes al modelo que representa al problema, por ejemplo la altura no puede ser negativa parte de una altura igual a cero alcanza una altura máxima para un valor del tiempo determinado, y después al caer la altura nuevamente es igual a cero. Por esta razón es necesario reconsiderar el dominio de la función $f(x)=500x-4.9x^2$.

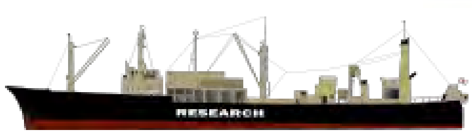
Para determinar el dominio de la función es necesario, calcular los valores del tiempo para los cuales le corresponde una altura $y=f(x)=0$. Algebraicamente esto corresponde a resolver la ecuación: $500x-4.9x^2=0$.

Por el momento no es preciso ahondar sobre el método o los métodos de solución posibles para la ecuación cuadrática, de la tabla se puede considerar que el valor máximo se alcanza entre los 40 o 60 segundos. Sin embargo se debe tener cuidado con la expresión: $500x-4.9x^2=0$, los valores de los tiempos en donde la altura es igual a cero son: $x_1=0$ y $x_2=102.0408163$, los cuales al ser sustituidos en la ecuación cumplen con la igualdad. De esta forma podemos establecer que el dominio de la función toma solamente valores entre 0 y 102.0408163 inclusive. En términos de una notación adecuada se podría escribir así el dominio de esta función: $D_f: 0 \le x \le 102.0408163$.

TABLA 1.1.1	**Altura "$y=f(x)$", contra el tiempo "x"**
x **Tiempo en segundos**	$f(x)=500x-4.9x^2$ **altura en metros**
0.00	0.00
7.20	3345.98
14.40	6183.93
19.20	7793.66
26.40	9784.89
38.40	11974.65
40.80	12243.26
60.00	12360.00
79.20	8173.05
100.80	612.86
100.04	0.00

Problema 3. Distancia mínima entre dos barcos.

En algún lugar cercano a la costa de la península de baja California; un Ballenero japonés y un Guardacostas Nacional viajan en trayectorias que se cruzan formando un ángulo recto, ambos se acercan a gran velocidad hacia el punto de cruce de sus trayectorias uno y otro desconocen su actividad.



Uno parte de cierta estación naval situada a 102 Km. del cruce; el otro, a una velocidad de 60 Km. (1 Km./minuto). Donde realizo su actividad ilícita. El segundo marcha a una velocidad de 48 kilómetros por hora (0.8 Km. /minuto), y dista del punto de cruce 85 km. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida para que las dos naves se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia mínima?

Podemos explorar la situación por medio de una tabla de valores:

x tiempo en minutos	**Distancia** d_G **Recorrida por el guardacostas Km.**	**Distancia del guardacostas al punto de cruce** $102-d_G$ **Km.**	**Distancia Recorrida por el ballenero** d_B **Km.**	**Distancia del ballenero al punto de cruce** $85-d_B$ **Km.**
10	10	92	8	77
20	20	82	16	69
30	30	72	24	61
40	40	62	32	53
50	50	52	40	45
50	60	42	48	37
70	70	32	56	29
80	80	22	64	21
90	90	12	72	13
100	100	2	80	5
110	110	-8	88	-3
120	120	-18	96	-11

El tiempo que tardarían en encontrarse debe ser cercano a los 100 minutos y la distancia mínima de separación de ambos buques debe ser de cerca seis kilómetros. Más adelante se resolverá el problema de manera exacta.

ACTIVIDAD 2

El problema del fabricante de playeras.
Un fabricante de playeras puede vender un lote de playeras a un precio de 23 pesos, cada una, pero su

ganancia es cero pesos, si la vende más cara digamos 38 pesos las personas no le compran, por considerar demasiado caro el producto. Por otra parte si la vende muy barata digamos a 23 pesos su ganancia es cero pesos. ¿Cómo puede maximizar su ganancia?, si la ganancia esta modelada por la función: $y=-x^2+58x-760$, suponga que los valores que toma la función están entre 23 y 38 pesos, donde "y", es la ganancia y "x" es precio de venta de la prenda. **Completa la tabla**

x	$y=-x^2+58x-760$
23	**0.0**
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	
36	
37	
38	**0.0**

¿Cuál será el precio de la playera que maximiza la ganancia?

Para el problema del fabricante de playeras Construye la gráfica hipotética del comportamiento, suponga que existe un precio intermedio que provoca una mayor venta del artículo.

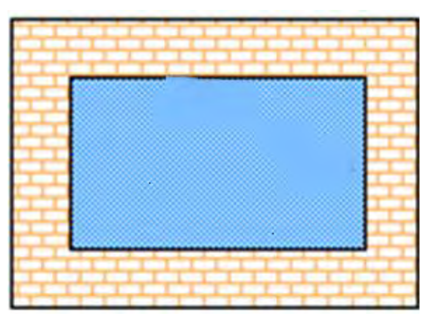
¿para el vendedor de playeras cual seria el dominio de esta función?

ACTIVIDAD 3   El problema de la piscina del hotel.

Un hotel tiene una piscina rectangular de 9 metros de largo por 6 metros de ancho, el dueño del hotel pide a su albañil que haga un camino alrededor del estanque con loseta antiderrapante como se muestra en el dibujo, la anchura del camino ha de ser constante en todo el contorno. Si x, representa lo ancho del borde alrededor de la piscina.

¿Cuál será el área A del camino alrededor de la piscina en términos de la variable "x"?

a. Si el ancho del camino puede ser cualquier cantidad entre 1 a 2 metros, ¿Cuál sería el dominio de la función?



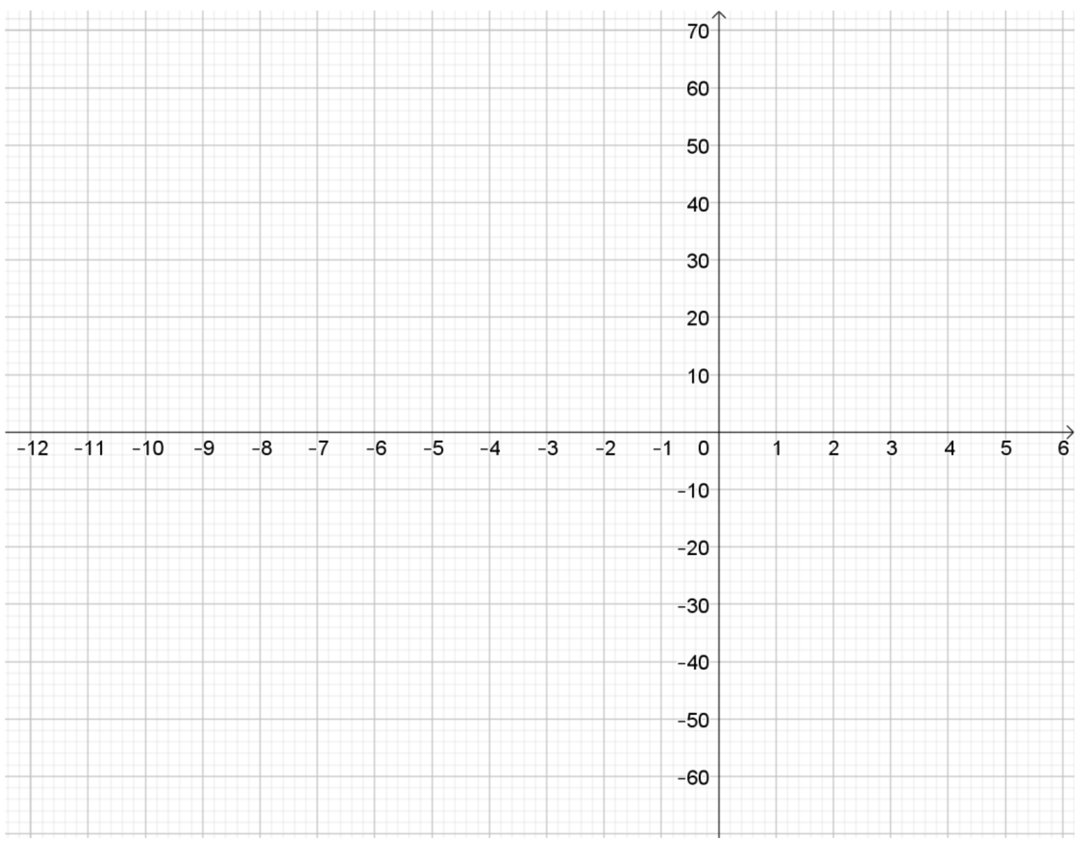
ancho 6 metros y
largo 9 metros

b. ¿Cuál sería el rango de la función, si se considera la tabla mostrada abajo? Nota: Considere que la variable toma valores de 20 centímetros en 20 centímetros, dados por la longitud del azulejo cuadrado de 20 cm de ancho y que estos, de esta forma el ancho del camino toma valores desde $1 \le x \le 2$ metros; y que por consiguiente se trata de una variable continua.

d. Si se tabulan algunos valores del ancho y se construye la gráfica para el área, ¿Qué tipo de curva se obtiene?

x, ancho	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.8	2.0
A , Área									

e. Tabula algunos posibles valores de: $f(x) = x^2 + 15x$, considerando que la amplitud "x" es una variable continua, con el paquete GEOGEBRA. ¿Qué tipo de curva se obtiene?



Sol. A(x)=54-(6-2x)(9-2x); 1<x<2 ; -2<x<6, parábola, parábola $f(x) = x^2 + 15x$.

Se realizó una prueba deportiva donde intervinieron un corredor de maratón contra un tráiler conducido por un chofer de excelencia, además experto en diversas competencias de velocidad. Por simplicidad, considere que la velocidad del corredor del maratón es constante e igual a 20 Km/hora. Se desconoce la velocidad que desarrolla el automotor, pero se sabe que la distancia "y" que recorre aumenta con el cuadrado del tiempo; "x". ¿Es posible que en el intervalo de los primeros veinte segundos, el corredor gane en algún momento al tráiler? Para facilitar el análisis de esta situación es necesario realizar una conversión de unidades:

1 kilómetro (km) = 1000 metros (m),
1 hora (h) = 3600 segundos (s).

El corredor de maratón desarrolla una velocidad de:

$$18\ \frac{km}{h} = 18\ \frac{1000m}{3600s} = \frac{18000}{3600}\frac{m}{s} = 5\ \frac{m}{s}.$$

Es decir avanza cinco metros cada segundo, la variación es lineal (directamente proporcional) con una constante de proporcionalidad (o pendiente) igual a $5\ m/s$; de manera analítica: $y = 5x$.

Para el tráiler la distancia que recorre depende del tiempo, se desconoce su velocidad, pero se sabe que la distancia recorrida varía como el cuadrado del tiempo transcurrido. $y = x^2$.

La siguiente tabla representa esta situación:

TABLA 2.2.1 para comparar el crecimiento de las funciones: $f(x) = x$; $f(x) = x^2$											
x, **Tiempo trascurrido en segundos**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$y = 5x$ **Distancia recorrida por el corredor en metros**	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
$y = x^2$ **Distancia recorrida por el tráiler en metros**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**

Se observa que en el intervalo de cero a cinco segundos, el **corredor gana al tráiler**.

Sin embargo después de los cinco segundos es imposible para el corredor del maratón alcanzar al tráiler.

Surge la necesidad de conocer con mayor detalle las propiedades y características de la función cuadrática.

Se revisara la geometría de la función cuadrática, que da origen a la curva conocida con el nombre de parábola.

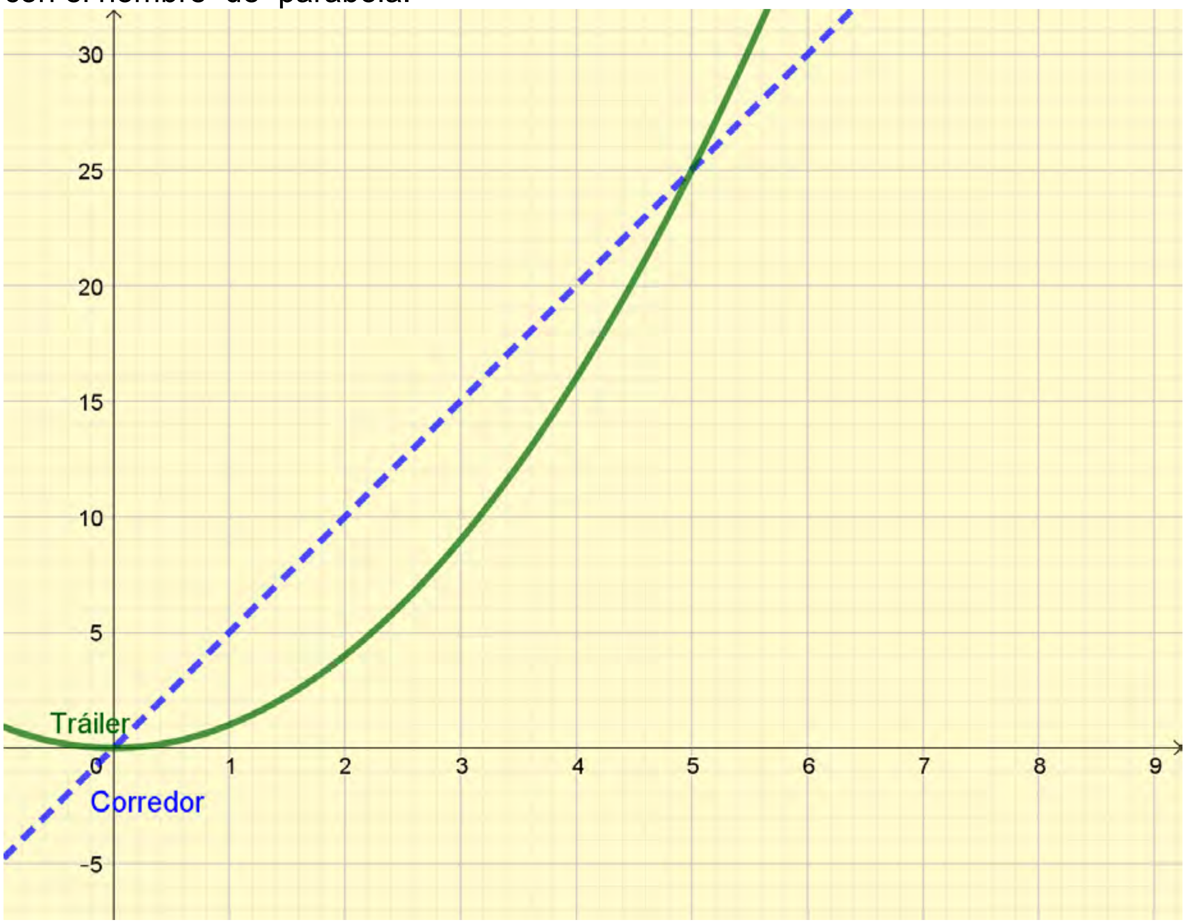


FIGURA 2.2.1 comparación del crecimiento de las funciones: $f(x)=5x$; representada por la línea recta, y $f(x)=x^2$ representada por la curva.

Comencemos con apreciar las diferencias entre la ecuación lineal y cuadrática de manera más completa.

En la figura y tabla 2.2.2 se representan las gráficas de las funciones $f(x)=x$ (lineal) y $f(x)=x^2$ (cuadrática), ambas fueron tabuladas con valores positivos y negativos en la variable independiente.

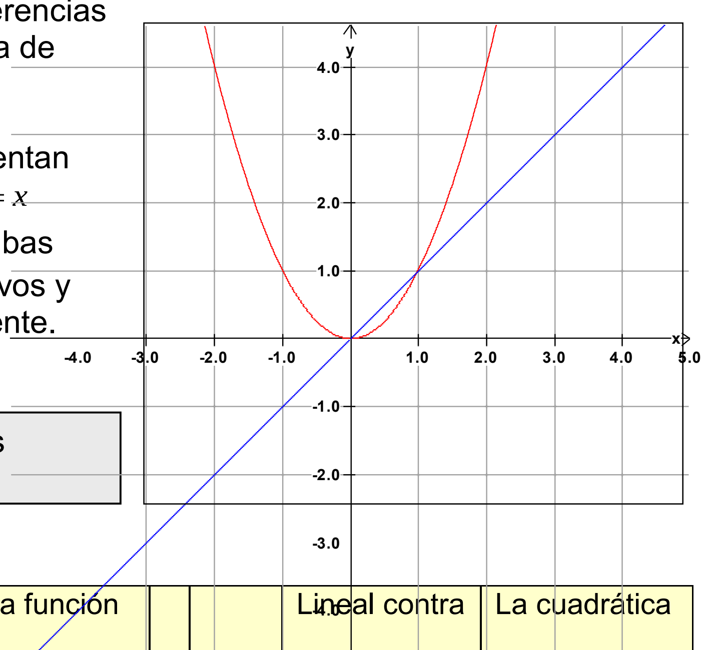


FIGURA 2.2.2: Grafica de las funciones lineal y cuadrática:

TABLA 2.2.2	Comparación	de la función			Lineal contra	La cuadrática
x	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$		x	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$
-4.5	-4.5	20.25		0.5	0.5	0.25
-4.0	-4.0	16.00		1.0	1.0	1.00
-3.5	-3.5	12.25		1.5	1.5	2.25
-3.0	-3.0	9.00		2.0	2.0	4.00
-2.5	-2.5	6.25		2.5	2.5	6.25
-2.0	-2.0	4.00		3.0	3.0	9.00
-1.5	-1.5	2.25		3.5	3.5	12.5
-1.0	-1.0	1.00		4.0	4.0	16.00
-0.5	-0.5	0.25		4.5	4.5	20.25
0.0	0.0	0.0				

ACTIVIDAD 4

Grafique las puntos que se indican. Además determine si se trata de funciones lineales.

a.

x	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	4

b.

x	2	4	6	8	10
y	1	3	5	7	9

c.

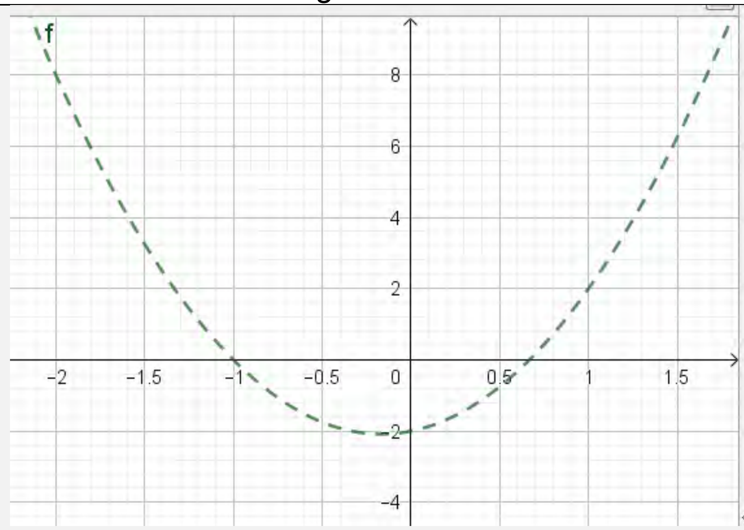
x	-6	-4	-2	0
y	0	2	4	6

ACTIVIDAD 5

Grafique las siguientes funciones, tabulando algunos puntos. Observe que los puntos trazados están situados en la silueta de la gráfica.

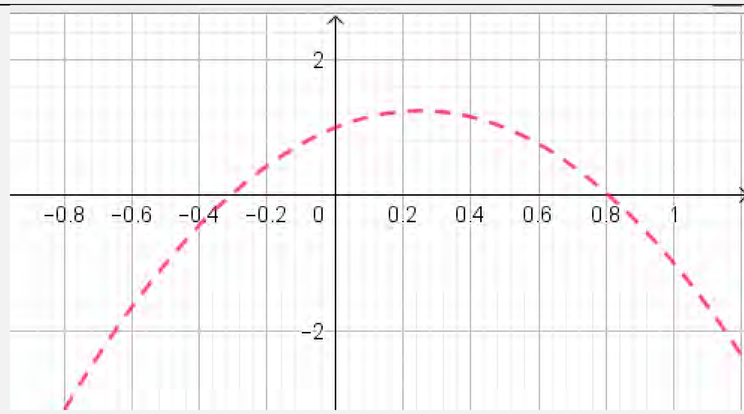
a. $f(x)=3x^2+x-2$

x	$f(x)$
-1.5	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	



b. $f(x)=-4x^2+2x+1$

x	$f(x)$
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
-1	



2.2.1 El método de diferencias Finitas.

Considere que se conoce que se desconoce la función, sin embargo se conocen algunos valores por donde pasa. Los cuales se indican en la tabla:

Considere que no se conoce que la gráfica de la función, solo se tienen algunos valores, indicados en la tabla. ¿Será posible hallar la ecuación?, la respuesta a esta pregunta es si, existe un método que

TABLA 2.3.1					
x	1	2	3	4	5

permite recuperar la expresión de la función y se llama "el método de diferencias finitas".

y	7	12	17	22	27

Para aplicar este método, es necesario que los valores sean contiguos e igualmente espaciados.

Escribamos los datos y completemos las columnas:

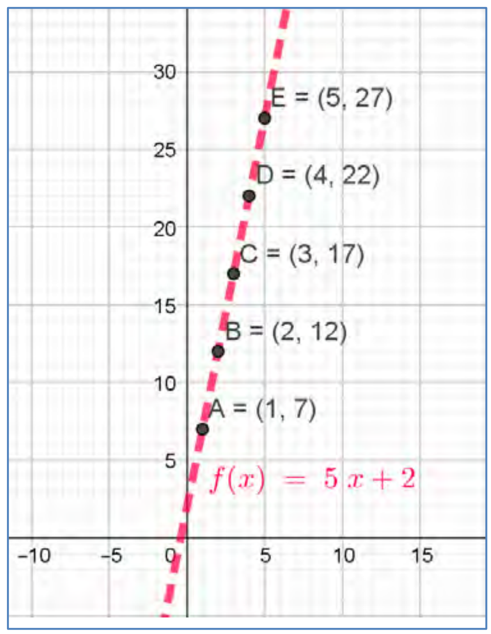
Las cantidades Δx y Δy se obtienen de las diferencias de dos valores consecutivos en la tabla **2.3.2**

TABLA 2.3.2				
x	y	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	7			
2	12	1	5	5
3	17	1	5	5
4	22	1	5	5
5	27	1	5	5

Debido a que Δy es constante la función es lineal, de la forma: $y = mx + b$, con $m = 5$, para determinar la ordenada al origen.

Tomemos la expresión:
$y = 5x + b$

Para determinar el valor de "b" (ordenada al origen), se puede seleccionar a cualquiera de los valores que tenemos disponibles, por ejemplo; el punto P(2,17), en el la variable independiente y la dependiente tienen los valores: un $x = 2$, $y = 17$, respectivamente.



Sustituyéndolos en la función: $y = 5x + b$,se obtiene: $17 = 5(2) + b$,

Despejando obtenemos: $b = 2$. La expresión buscada es una función lineal igual a $y = 5x + 2$.

Como se pude apreciar en la gráfica los puntos están sobre el modelo de la línea recta. Para hallar el cero de la función bastara igualar a cero $y = 5x + 2 = 0$, es decir: $5x + 2 = 0$, y resolver la ecuación para "x", obteniéndose; $x = -\frac{5}{2}$,la intersección de la ecuación con el eje de las ordenadas , eje "y" .

¿Cómo aplicar este método para la búsqueda de la ecuación cuadrática?

ACTIVIDAD 6 (Optativa)

Determine la función Usando el método de las diferencias finitas para las siguientes series de datos:

a.

x	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	4

Sol. y =x+6

b.

x	2	4	6	8	10
y	1	3	5	7	9

Sol. y =x-1

c.

x	-6	-4	-2	0
y	0	2	4	6

Sol. y =-x-2

d.

x	2	3	4
y	0	-1	-2

Sol. y =-x+2

Ejemplo 1

Apliquemos este método a un conjunto de valores, que no satisfacen la condición de que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una constante. Es necesario que los valores sean contiguos e igualmente espaciados. Escribamos los datos y completemos las columnas:

TABLA 2.2.1.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-1	2	1	-4	-13	-26

Se hace necesario reescribir esta tabla **2.2.1.1**, de tal manera que podamos calcular Las cantidades Δx y Δy. Obsérvese la nueva tabla; **1.2.1.4.**

TABLA 2.2.1.2					
x	$y = f(x)$	Δx $x_2 - x_1$	Δy $y_2 - y_1$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$
-3	-8				
-2	-1	1	7		
-1	2	1	3	7	-4
0	1	1	-1	-3	-4
1	-4	1	-5	-5	-4

2	-13	1	-9	-9	-4
3	-26	1	-13	13	-4

Como ya se ha dicho anteriormente, y recalcando que debido a que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no es una constante los datos no pueden corresponder a una función lineal. Por otra parte, como $\frac{\Delta\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$ es constante la función (*¡se garantiza que es cuadrática!*) es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, el coeficiente "a", es precisamente $a = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}{\Delta x}\right\}$, para los datos del ejemplo, se tiene: $a = \frac{1}{2}(-4) = -2$, de esta forma la función cuadrática queda como: $y = -2x^2 + bx + c$, faltando por determinar b , y c

Para determinar los parámetros faltantes, se pueden elegir dos cualesquiera pares de puntos.

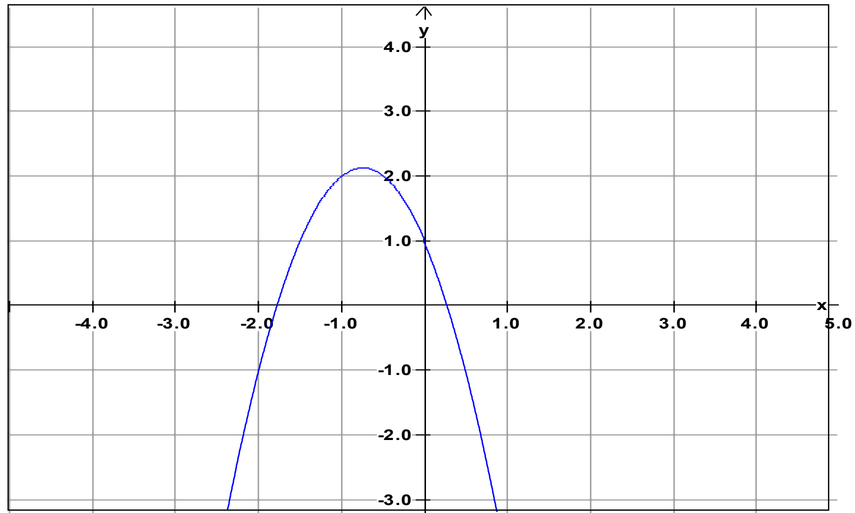
Tomemos dos pares ordenados que pertenecen a la función, por ejemplo; (-3,-8) y (1,-4) sustituyamos en la ecuación anterior:

$P(x,y)$	$y = -2x^2 + bx + c$
Para el punto: $P(-3,-8)$ $x = -3;\ \ y = -8$	sustituyendo en la ecuación los valores: $y = -2x^2 + bx + c$ $-8 = -2(-3)^2 + b(-3) + c$ Simplificando: $-3b + c - 10 = 0 \ldots\ldots$ (1)
Para el punto: $P(1,-4)$ $x = 1;\ \ y = -4$	sustituyendo en la ecuación los valores: $y = -2x^2 + bx + c$ $-4 = -2(1)^2 + b(1) + c$, simplificando: $b + c + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (2)

De la ecuaciones (1) y (2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -3b+c-10=0 \\ b+c+2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales por cualquier método, se tiene:



$b=-3$ y $c=1$ quedando la función como : $y=-2x^2-3x+1$. La cual se grafica a la derecha.

ACTIVIDAD 7

Complete la tabla y grafique la función $y=-2x^2-3x+1$ desde -3 hasta 3 de una unidad de separación entre los valores de los datos.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-8	-1	2	1			

¿Si se dispone únicamente de la tabla. Como encontrar la expresión algebraica de la función?

A continuación se muestra como se encuentra la función cuadrática, usando el método de las diferencias finitas para las siguientes series de datos:

Ejemplo 2

Ajuste la función de ser posible al conjunto de valores. Dados en la tabla anexa.

Tabla 1.2.1.3	x	-4	-3	-2	-1	0	1
	$y=f(x)$	19	11	5	1	-1	1

Completemos la tabla agregando las columnas necesarias para realizar las operaciones:

TABLA				

2.2.1.4				
x	$y=f(x)$	Δx x_2-x_1	Δy y_2-y_1	$\dfrac{\Delta\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$
-4	19			
-3	11	1	-8	
-2	5	1	-6	2
-1	1	1	-4	2
0	-1	1	-2	2
1	-1			

1. Se observa en la tabla que $\dfrac{\Delta\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$ es constante e igual a dos por lo que se garantiza que los datos o puntos pertenecen a una función cuadrática. Por consiguiente: $a=\frac{1}{2}(2)=1$, de esta forma la función queda como: $y=x^2+bx+c$, faltando por determinar b, y c	Tomemos dos pares ordenados que pertenecen a la función, por ejemplo; (-2,5) y (-1,1) sustituyamos en la ecuación anterior: $y=x^2+bx+c$ $5=(-2)^2+b(-2)+c$, simplificando: $-2b+c-1=0$...... (1) $1=(-1)^2+b(-1)+c$, simplificando: $-b+c=0$......... (2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales por cualquier método, se tiene: $b=1$ y $c=1$ quedando la función como : $y=x^2-x-1$.

¿Cómo se puede comprobar que la función que se ha encontrado es la que corresponde a los puntos de los datos?

ACTIVIDAD 8

Determine la función Usando el método de las diferencias finitas para las siguientes series de datos:

a.

x	2	3	4	5	6
y	5	10	17	26	37

Sol. $y=x^2+1$

b.

x	-1	-2	-3	-4	10
y	3	6	11	18	102

Sol. $y=x^2+1$

c.

x	-5	-4	-2	-1	0
y	-93	-58	-12	-1	2

Sol. $y=x^2+1$

d.

x	2	3	4	5
y	16	41	78	127

Sol. $y=6x^2-5x+21$

e.

x	-0	1	2	3
y	-1	1	5	11

Sol. $y=x^2+x-1$

f.

x	-1	0	1	2
y	2	2	0	-4

Sol. $y=-x^2-x+2$

Sesión 2

2.2 Estudio gráfico, analítico y contextual de la función $y=ax^2+bx+c$, en particular: $y=ax^2$; $y=ax^2+c$; $y=a(x-h)+k$

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas: Relaciona un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.

- ✓ Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. Identifica las diferencias entre variación lineal y cuadrática
- ✓ Interpreta el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

Se sugiere que el profesor organice las actividades de aprendizaje procurando, en un primer momento, la participación individual y posteriormente por equipos y grupal, en un escenario de resolución de problemas.

- ✓ El profesor propone a los alumnos, organizados en equipo, la construcción de gráficas para analizar el comportamiento de los parámetros y posteriormente el alumno confronta mediante un software dinámico, lo realizado a lápiz y papel.

2.2.1 Estudio gráfico y analítico de: $y=ax^2$

Como estrategia para realizar el análisis, se utilizará la expresión $y = ax^2$, que es la más sencilla y se analizarán las posibilidades del parámetro *a*: $a > 0$, $a < 0$, $|a| > 1$, $|a| < 1$.

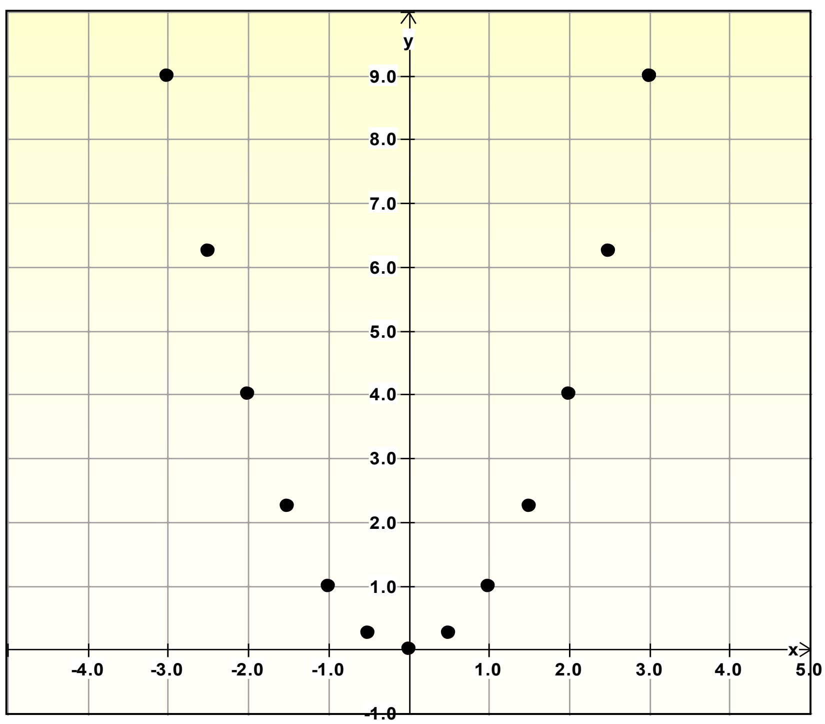
En particular se buscara averiguar en el modelo $y = ax^2$, el impacto de la constante *a*, y deducirá la orientación de la parábola, según la constante *a* sea mayor o menor que cero.

La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de parábola, en esta sección se analiza el papel que desempeñan los parámetros a, b, c de la función en la construcción de la traza o gráfica.

Comenzaremos el análisis de la ecuación cuadrática, seleccionando la expresión más sencilla: $y = x^2$, con ella tabularemos algunos valores. A continuación se muestra la tabla.

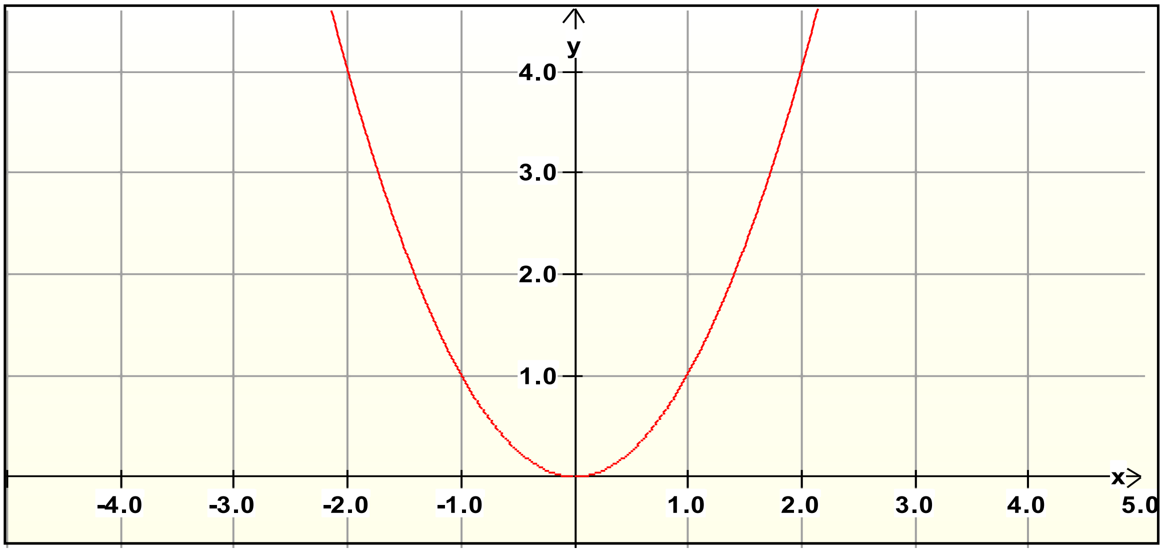
TABLA 2.4.1.1													
x	**-3.0**	**-2.5**	**-2.0**	**-1.5**	**-1.0**	**-0.5**	**0**	**0.5**	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**
$y = x^2$	**9**	**6.25**	**4**	**2.25**	**1**	**0.25**	**0**	**0.25**	**1**	**2.25**	**4**	**6.25**	**9**

La gráfica correspondiente a esta función se muestra a la derecha.

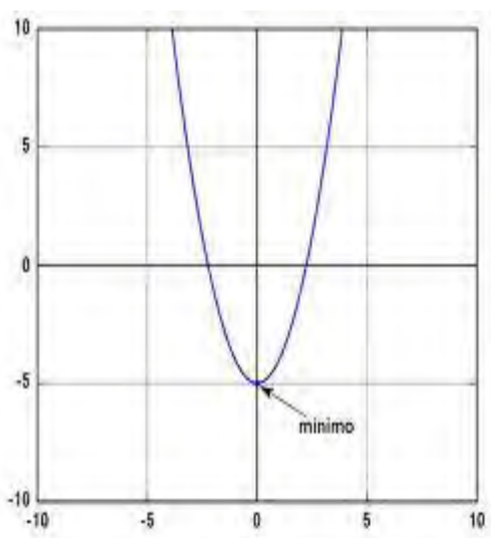


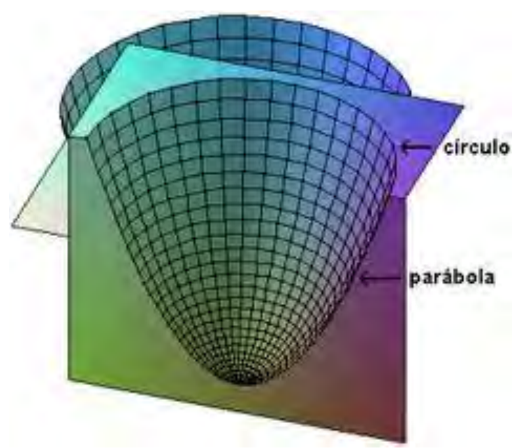
Como siguiente paso dentro del proceso se pueden tomar valores mayores a tres y menores a menos tres.

Posteriormente se pueden tomar valores intermedios entre los valores de "x" que ya se han tabulado y calculado previamente, si este proceso se realiza iteradamente de manera infinita, podremos obtener una gráfica de la función cuadrática llamada parábola como la que a continuación se presenta:



Se puede observar que existe un punto que es el más bajo de la parábola (mínimo), este punto recibe el nombre de vértice de la parábola, también se observa la existencia de un eje de simetría en este caso es el eje





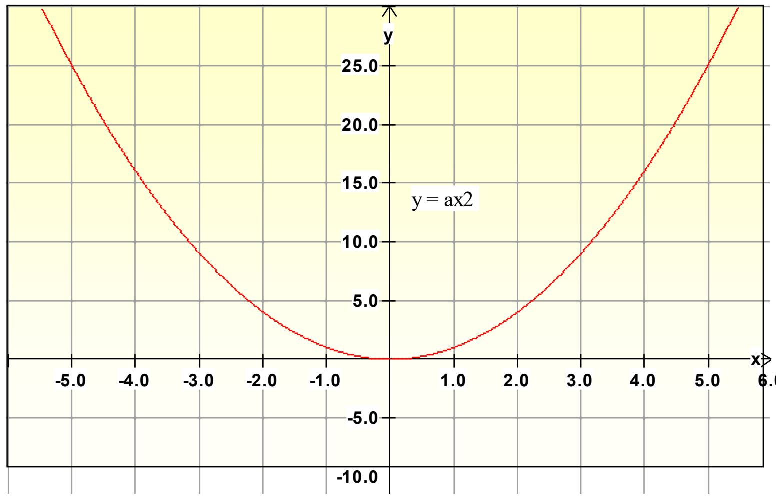
La parábola al rotar genera un figura tridimensional llamada paraboloide de revolución

de las ordenadas (eje "y") este eje de simetría. Un eje de simetría de una figura o cuerpo geométrico se caracteriza porque al ser cortado el cuerpo o figura a través de ese eje y se refleja la figura en un espejo, la figura se visualizaría como completa. En este proceso de descubrimiento de propiedades, seleccionaremos una función ligeramente más complicada, digamos: $y = ax^2$, e indagaremos qué relación existe entre la gráfica de la parábola y los valores que puede tomar el parámetro "a".

En las siguientes graficas se muestra la tabla y la traza de la función para algunos valores de la función cuadrática (parábola): $y = x^2$

TABLA 2.2.1

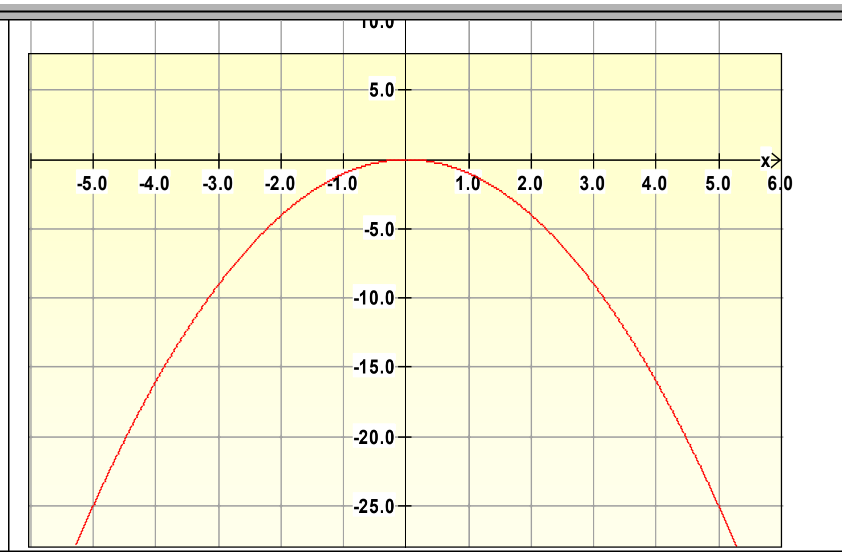
x	$y = x^2$
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



Abajo se muestra la tabla para algunos valores de la función y la correspondiente traza cuadrática (parábola): $y = -x^2$

TABLA 2.4.2

x	$y = -x^2$
-5	-25
-4	-16
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16
5	-25

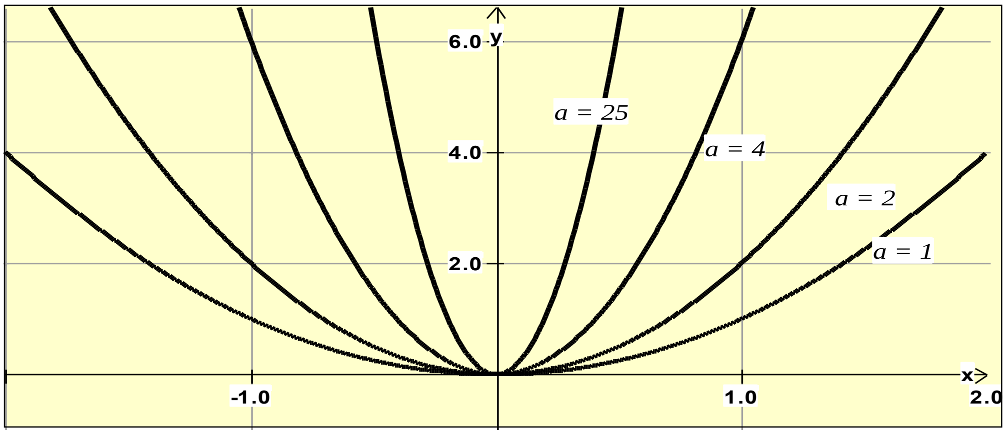


¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo? Tabla 2.4.1.2 ____________

¿Cuáles son las coordenadas del punto máximo? Tabla 2.4.1.3 ____________

Ahora revisaremos que sucede a la parábola cuando el parámetro “a” toma valores superiores a la unidad ($a > 1$) y menores a menos uno ($a < -1$). En forma compacta se puede escribir así: $|a| > 1$ (“valor absoluto de a es mayor a la unidad”

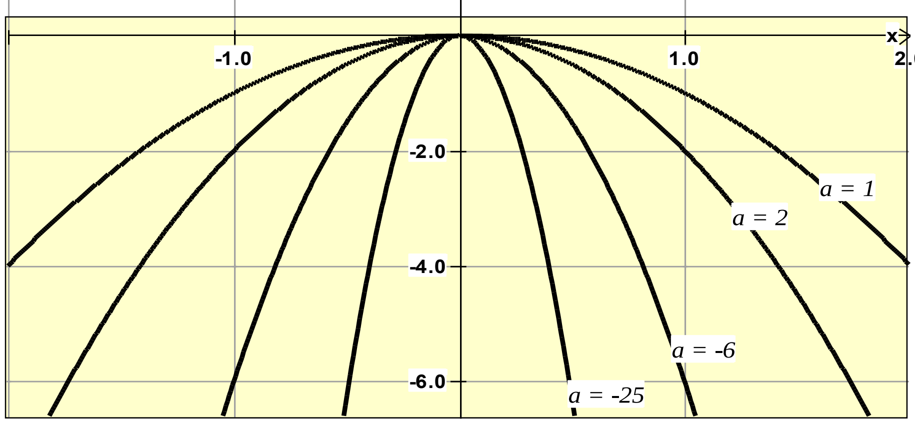
Investiguemos que sucede a la función: $y = ax^2$ cuando el parámetro "a", toma valores mayores a la unidad. Como primer paso se grafican juntas las funciones: $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 4x^2$; $y = 25x^2$.



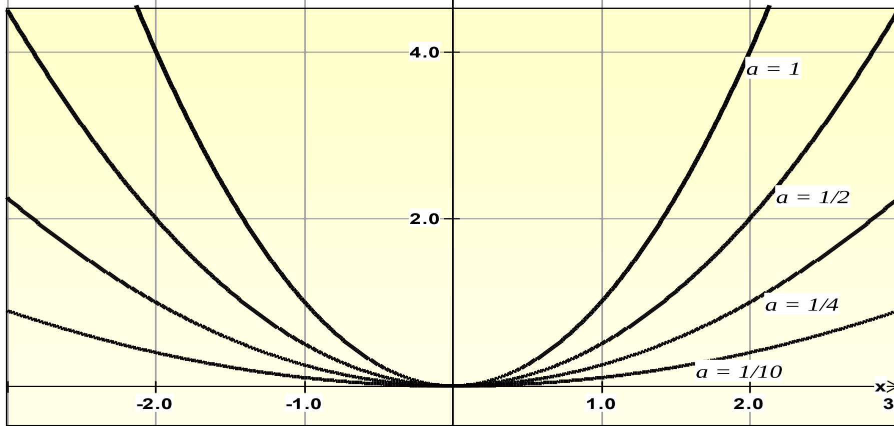
De la gráfica anterior se observa que valores positivos para a, hacen que la parábola abra hacia arriba, además para valores mayores a la unidad los valores de la función crecen más rápido, es decir geométricamente la parábola se hace más estrecha ("más estrecha").

Investiguemos ahora que sucede a la función: $y = ax^2$ cuando el parámetro "a", toma valores menores a menos uno. Para observar su comportamiento al variar el parámetro "a", se grafican juntas las funciones: $y = -x^2$; $y = -2x^2$; $y = -6x^2$; $y = -25x^2$.

En la gráfica se observa que negativos para a, hacen que la parábola abra hacia abajo, además para valores menores a la unidad los valores de la función decrecen más rápido, es decir geométricamente la parábola se hace más estrecha ("más flaca").



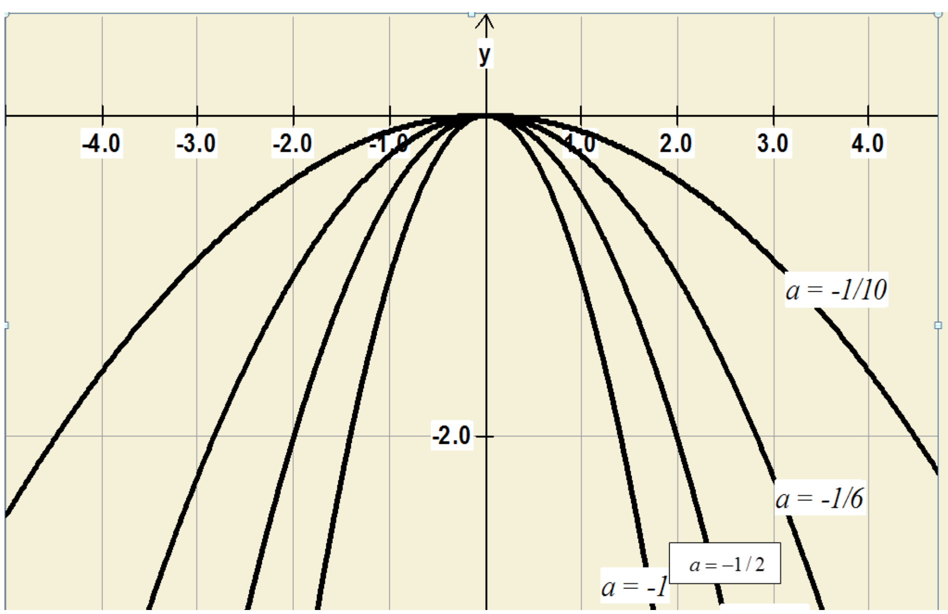
Revisemos ahora el intervalo que va desde menos uno a hasta uno ($-1<a<1$) que también puede escribirse de manera compacta como; $|a|<1$).



Considerando las funciones para esto se grafican las funciones: $y=x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=\frac{1}{4}x^2$; $y=\frac{1}{10}x^2$, para observar el comportamiento de la gráfica de la función cuando "a" está entre cero y la unidad.

En la gráfica se observa que para valores positivos la gráfica de la parábola abre hacia arriba. A medida que "a" toma valores cada vez más pequeños cercanos a cero, la gráfica de la parábola es más ancha ("más gorda").

Revisemos ahora el intervalo que va desde menos uno hasta cero ($-1<a<0$), para esto se grafican las funciones: $y=-x^2$; $y=-\frac{1}{2}x^2$; $y=-\frac{1}{4}x^2$; $y=-\frac{1}{10}x^2$.



Se observa que para valores negativos la gráfica de la parábola abre hacia abajo. A medida que "a" toma valores entre menos uno y cercanos a cero, la gráfica de la parábola es más ancha ("más gorda").

En resumen:	
Si $a > 0$	La parábola abre hacia arriba.
Si $a < 0$	La parábola abre hacia abajo.
En el intervalo $-1 < a < 1$, en forma compacta: $\|a\| < 1$	La parábola es más amplia, "más gorda".
En el intervalo $a < -1$ y $a > 1$, en forma compacta: $\|a\| > 1$	La parábola es más angosta, "más flaca".

ACTIVIDAD 9

Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $y = 2x^2$	b. $y = -3x^2$	c. $y = -4x^2$	d. $y = \frac{1}{2}x^2$
e. $y = \frac{2}{5}x^2$			

2.4.2 Estudio gráfico y analítico de la función cuadrática: $y = ax^2 + c$

Como estrategia de análisis se utilizaran tablas, expresiones algebraicas y gráficas. Se busca como aprendizaje que en el modelo $y = ax^2 + c$, se comprenda cual es el papel del parámetro c, en la traslación de la gráfica $y = ax^2$ hacia arriba o hacia abajo del eje x, según se le asignan valores positivos o negativos a c.

La grafica de la función cuadrática: $y = ax^2 + c$, con $a = 1$. Las tres ecuaciones de la parábola

Figura: Graficas de las funciones Cuadráticas:
$y = x^2 + C$.

Valor de C	Función
	$y = x^2 + C$
$C = 3$	$y = x^2+3$,
$C = 0$	$y = x^2$
$C = -3$	$y = x^2-3$

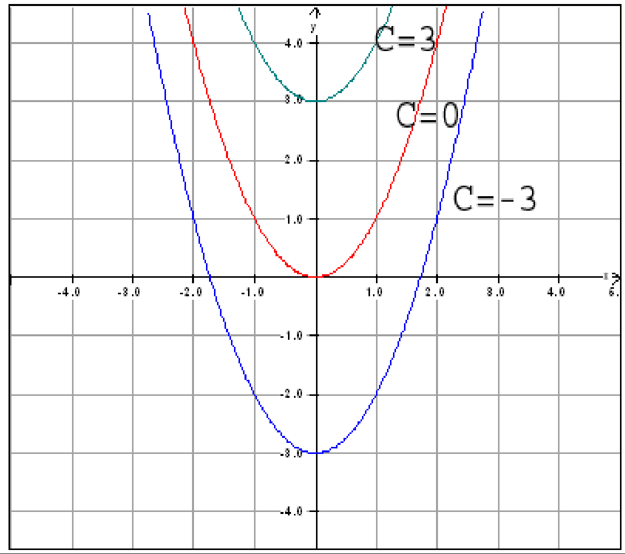
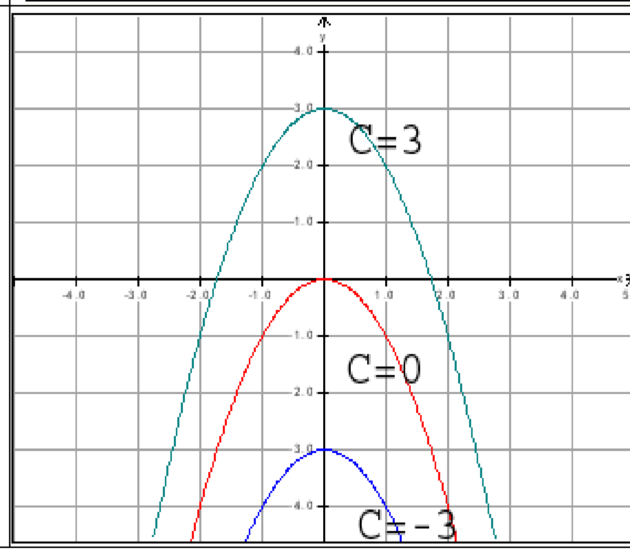


Figura: Graficas de las funciones Cuadráticas:
$y = -x^2 + C$.

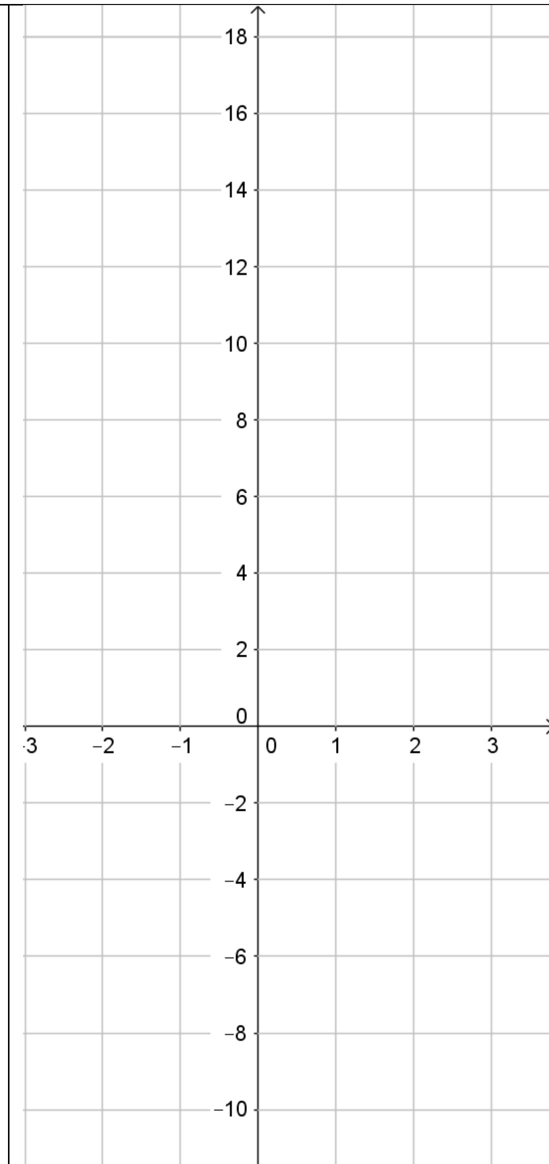
Valor de C	Función
	$y = -x^2 + C$
$C = 3$	$y = x^2+3$,
$C = 0$	$y = x^2$
$C = -3$	$y = x^2-3$



ACTIVIDAD 10

Bosqueja la gráfica de cada terna de funciones cuadráticas:

a. $y = 2x^2$; $y = 2x^2 + 1$; $y = 2x^2 + 5$	b. $y = 2x^2$; $y = 2x^2 - 2$, $y = 2x^2 - 4$



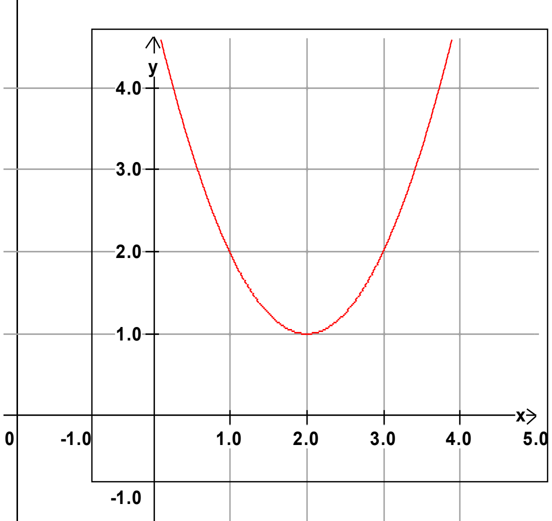
2.4.3 Estudio gráfico y analítico de la función cuadrática: $y = a(x-h)^2 + k$

Como estrategia para abordar el tema se hará uso de tablas, expresiones analíticas, y gráficas. Los aprendizajes buscados son; En el modelo $y = a(x-h)^2 + k$, el alumno interpretará el papel del parámetro $P\,(h,\,k)$, como el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Construyamos la gráfica de algunas funciones cuadráticas expresadas en la forma: $y = a(x-h)^2 + k$, por ejemplo: $y = (x-2)^2 + 1$; $y = (x-1)^2 + 4$; $y = (x+2)^2 + 1$; $y = (x+3)^2 - 1$.

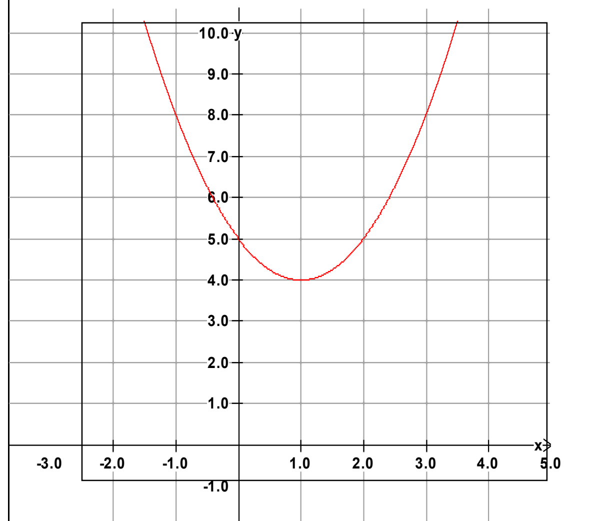
Grafica de la función $y=(x-2)^2+1$

$h=2$ y $k=1$



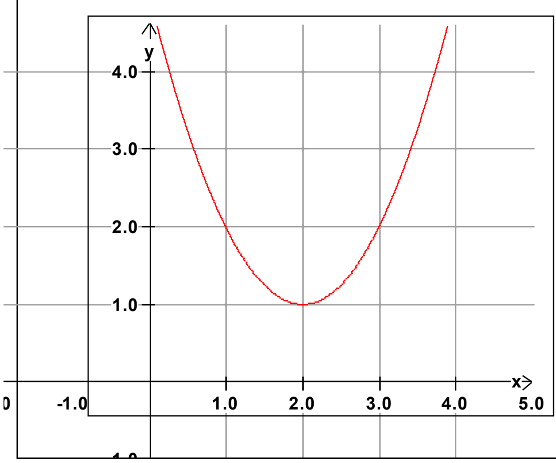
Grafica de la función $y=(x-1)^2+4$

$h=1$ y $k=4$



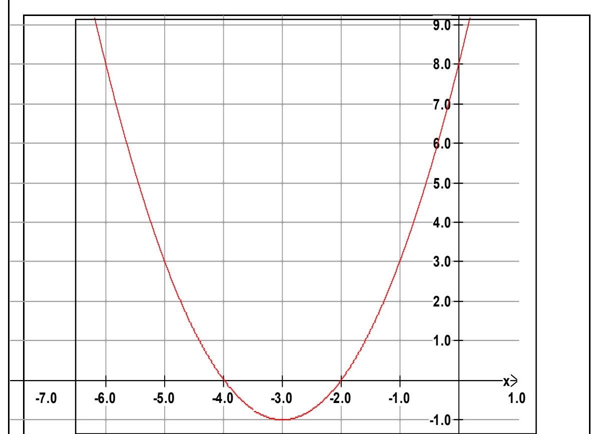
Grafica de la función $y=(x+2)^2+1$

$h=-2$ y $k=1$



Grafica de la función $y=(x+3)^2-1$

$h=-2$ y $k=1$



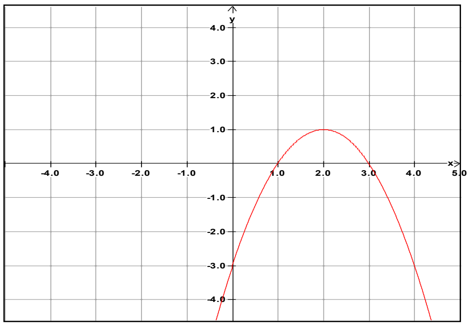
De las gráficas se observa que las funciones cuadráticas escritas de la forma:

$y=a(x-h)^2+k$, el punto $P(h,k)$, denominado vértice de la parábola representa “el punto más bajo” de la parábola, al cual más adelante se le llamara punto mínimo.

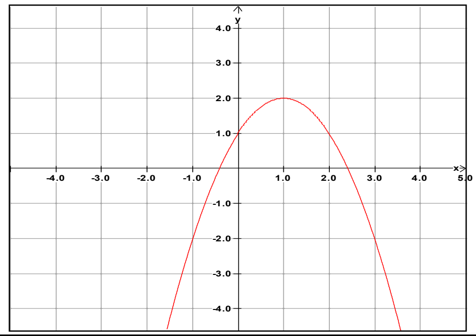
La grafica de algunas otras funciones cuadráticas expresadas en la forma: $y=a(x-h)^2+k$, son: $y=-(x-2)^2+1$; $y=-(x-1)^2+2$; $y=-(x+1)^2+1$; $y=-(x-2)^2-2$.

De acuerdo a lo visto en las secciones anteriores sabemos que las curvas o parábolas abrirán hacia abajo (debido a que $a<0$). Revisemos las gráficas.

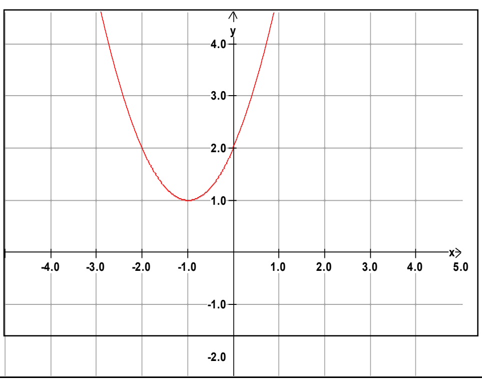
Grafica de la función $y=-(x-2)^2+1$
$h=2$ y $k=1$



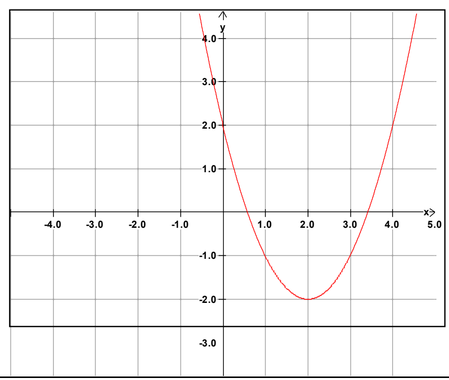
Grafica de la función $y=-(x-1)^2+2$
$h=1$ y $k=2$



Grafica de la función $y=-(x+1)^2+1$
$h=-1$ y $k=1$



Grafica de la función $y=-(x-2)^2-2$
$h=2$ y $k=-2$



ACTIVIDAD 11

Construye la gráfica de las siguientes parábolas y determina las coordenadas del vértice:

a. $y=-(x+3)^2-2$	b. $y=(x+2)^2$	c. $y=-2(x+3)^2-2$	d. $y=3(x+1)^2-2$

Se comprende por lo visto al inicio de la sección la utilidad de la expresión: $y=a(x-h)^2+k$, ya que esta forma permite hallar el vértice de la parábolas sin embargo en la mayoría de los casos se presenta la función cuadrática en la forma: $y=ax^2+bx+c$, por esta razón es necesario contar con un método que permita factorizar la función cuadrática y llevarla a la forma deseada. . Existen varias formas, pero por sencillez, se recurrirá al método de completar el cuadrado, el cual será

aplicado al extremo derecho de la igualdad de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$
.

Sesión 3

2.3 Ceros de la función.

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje x, con la naturaleza de las raíces. En particular, identifica su ausencia con la existencia de raíces complejas.

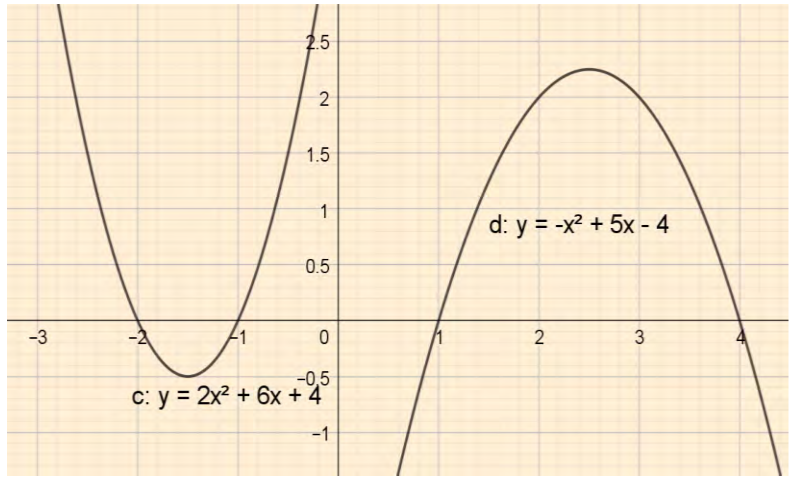
Estrategias de aprendizaje sugeridas

Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual y colaborativo; en equipos de dos (preferentemente) o en casos singulares de tres alumnos y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

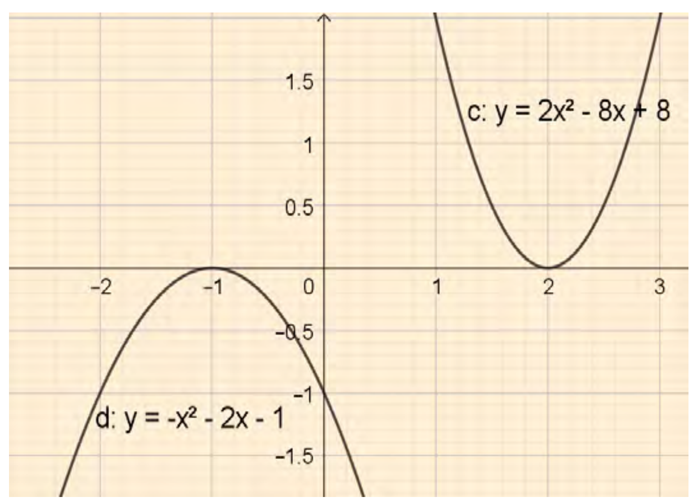
- ✓ A partir de una función dada, el alumno calcula los valores correspondientes para $f(x) = 0$

Existen algunas situaciones que permiten relacionar y diferenciar la gráfica de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$; con la solución de la ecuación cuadrática correspondiente; $ax^2 + bx + c = 0$. Precisamente las intersecciones de la función cuadrática con el Eje de las abscisas (Eje “x”) son las soluciones de la ecuación cuadrática. Todos los casos o situaciones posibles son solo tres y pueden ser:

Primera posibilidad: La función y el eje de las abscisas se intersectan en dos puntos, por lo que la ecuación cuadrática correspondiente tiene dos soluciones y son números reales. (En algunos textos se dice que: “tiene dos raíces reales e iguales”). **Las figuras muestran la intersección de la curva de la función cuadrática con el eje de las abscisas. Corta en dos puntos.**

A la izquierda la función cuadrática: $y = 2x^2 + 6x + 4$, las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura: $x_1 = -2$ y $x_2 = -1$. A la derecha la función cuadrática: $y = -x^2 + 5x - 4$ Las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura: $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$.	

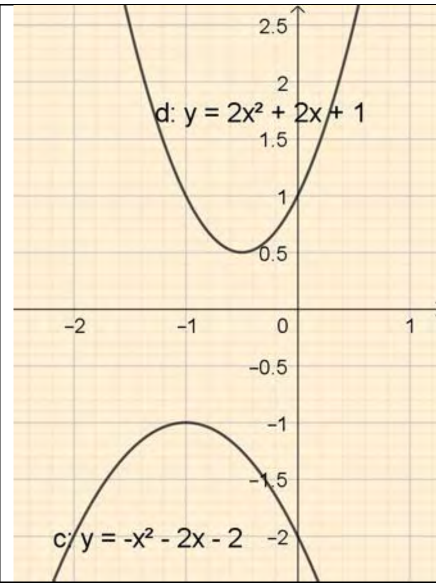
Segunda posibilidad. La función cuadrática intersecta o toca al eje de las abscisas en solo un punto, en este caso se dice que la ecuación cuadrática tiene una única solución real. Esto se esquematiza en la figura, **que muestra la intersección de la curva de la función cuadrática con el eje de las abscisas. Tocándolo en un solo punto.**

A la izquierda la función cuadrática $y = 2x^2 - 8x + 8$, Las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura: $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$. A la derecha la función cuadrática: $y = -x^2 - 2x - 1$ Las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura: $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$.	

Tercera posibilidad. La función cuadrática no intersecta al eje de las abscisas, en este caso se dice que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones complejas. **Figura que muestra que no existe intersección de la curva de la función con el eje de las abscisas.**

A la izquierda la función cuadrática $y = -x^2 - 2x - 2$, Las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura:
$x_1 = -1 - i$ y
$x_2 = -1 + i$. Con $i = \sqrt{-1}$

A la derecha la función cuadrática: $y = 2x^2 + x + 1$
Las raíces o soluciones de la ecuación cuadráticas son, de acuerdo a la figura:
$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i$ y $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i$ con $i = \sqrt{-1}$



Para hallar las raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, se puede recurrir a la expresión o formula llamada la solución general de la ecuación de segundo grado; $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Para obtener las raíces o soluciones se escribe como: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La cantidad $D = b^2 - 4ac$, recibe el nombre de discriminante y permite determinar de antemano el número de raíces o soluciones reales de la ecuación cuadrática.

En resumen:		
Número de raíces reales Distintas de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$	Número de intersecciones de la función $y = ax^2 + bx + c$, con el eje de las abscisas(Eje “x”)	Discriminante: $D = b^2 - 4ac$
2	**2**	“D” **Mayor que cero**
1	**1**	“D” **Igual a cero**
0	**0**	“D” **Menor que cero**

ACTIVIDAD 12

Determina los ceros de la función (raíces o soluciones de la ecuación cuadrática), en el caso de que estas sean reales, represéntalas en el plano cartesiano:

a. $y=x^2-4x+4$	b. $y=x^2-6x-16$	c. $y=x^2-\frac{1}{2}x+3$	d. $y=x^2-x+\frac{2}{7}$
e. $y=2x^2+x-5$	f. $y=4x^2-3x+8$	g. $y=\left(x-\frac{9}{36}\right)^2$	h. $y=4x^2-\frac{5}{3}x$

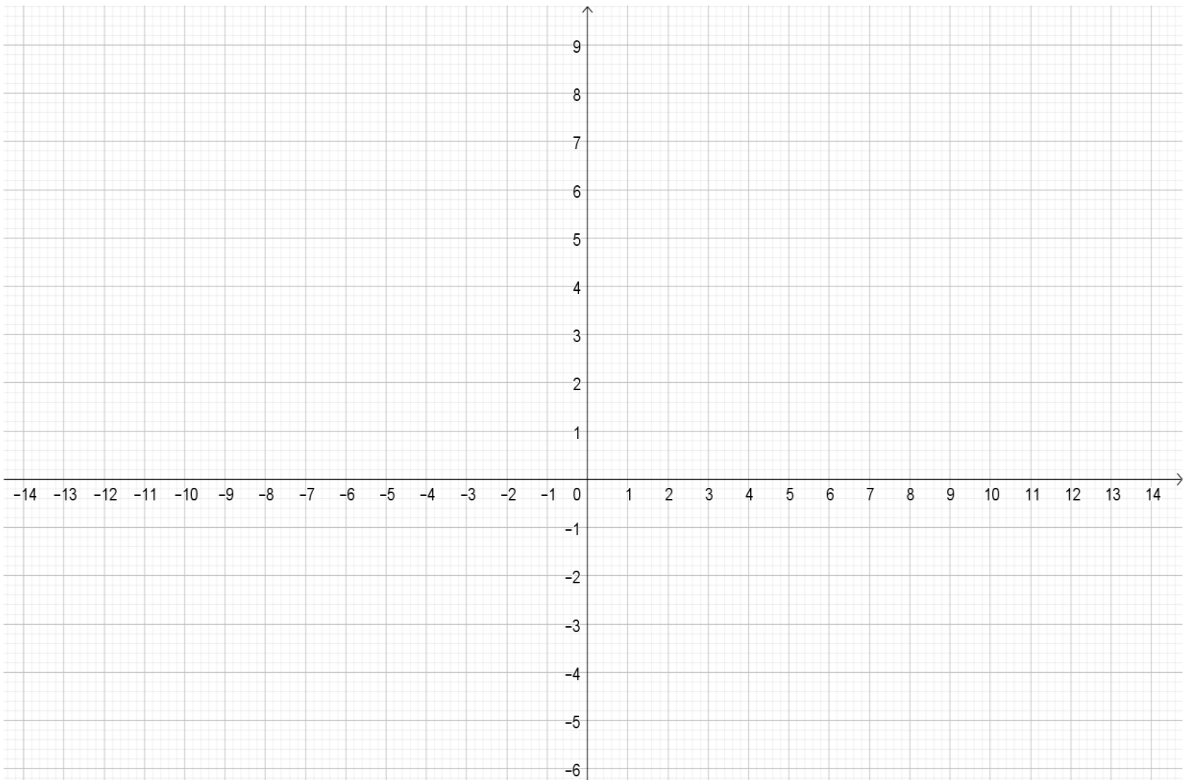
La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de parábola, en esta sección se analiza el papel que desempeñan los parámetros a,b,c de la función en la construcción de la traza o gráfica.

ACTIVIDAD 13

Determina los ceros (raíces o soluciones de la ecuación cuadrática), en el caso de que estas sean reales, represéntalas en el plano cartesiano:

a. $y=(x-4)(x-2)$	b. $y=x(x-7)$	c. $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$
d. $y=\left(x^2+x\right)(x-5)$	e. $y=4x^2-3x+8$	f. $y=\left(x^2-\frac{9}{36}\right)^2$
g. $y=x\left(x+\frac{2}{7}\right)$	h. $y=4\left(x-\frac{5}{3}\right)x=0$	

La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de parábola, en esta sección se analiza el papel que desempeñan los parámetros a,b,c de la función en la construcción de la traza o gráfica.



Sesión 4

2.4 La función $y = ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas. Simetría, concavidad, máximo o mínimo. Forma estándar $y=a(x-h)^2+k$

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Expresa la función $y = ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico.
- ✓ Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual y colaborativo; en equipos de dos (preferentemente) o en casos singulares de tres alumnos y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas.

- ✓ El profesor cuestiona a los alumnos sobre la simetría de la gráfica de las funciones cuadráticas, y su utilidad para determinar el valor máximo o mínimo y las coordenadas del vértice.
- ✓ El profesor plantea a sus alumnos la actividad de transformar una función cuadrática a la forma $y=a(x-h)^2+k$ y analizar su utilidad para determinar las características analíticas y gráficas de la función.

2.4.1 La forma estándar $y=a(x-h)^2+k$.

En la sección 2.2 se analizó se Interpretó el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, sin embargo cuando la ecuación está escrita en la forma general, se dificulta el análisis acerca de su comportamiento y por ende la construcción de la gráfica.

Por esta razón dada la necesidad de determinar con precisión el vértice de la parábola para determinar los posibles máximos o mínimos que esta tiene , es necesario llevar la ecuación general: $y=ax^2+bx+c$, a la forma: $y=a(x-h)^2+k$, *para el logro de este objetivo es necesario conocer y aprender el* método de completar el cuadrado, el cual será aplicado al extremo derecho de la igualdad de la función cuadrática:

Algoritmo: "Método de completar el cuadrado"

Considere que la función, $y=ax^2+bx+c$ se aplicara el método al extremo derecho de la igualdad (se aplicara a la variable "x").

<u>Primer paso:</u>

Factorice "a" en los dos primeros términos del extremo derecho: $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$

<u>Segundo paso:</u>

Observe cual es el termino lineal del extremo derecho de la igualdad. Seleccione el coeficiente de "x", que en este caso es: "$\frac{b}{a}$"

Tercer paso:

Divídalo entre dos: $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)$, y después elévelo al cuadrado, es decir: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Cuarto paso:

La cantidad obtenida en el paso numero tres, se suma y se resta para no alterar la igualdad: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ - $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ y se inserta después del segundo término en el extremo derecho, dentro del corchete:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

Quinto paso:

Se dejan dentro del corchete solo los tres primeros términos $y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$, los tres primeros términos forman un binomio cuadrado perfecto:

$$y = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c;$$

simplificando:

$$y = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + \left[c - \frac{b^2}{4a}\right]$$

Sexto paso:

Se compara la expresión obtenida en el quinto paso con la expresión buscada: $y = a(x-h)^2 + k$, obteniéndose:

I. $h = -\frac{b}{2a}$

II. $k = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

En donde las cantidades a, b, c son los parámetros de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$

Ejemplo 3 Factorice la siguiente función cuadrática: $y = -2x^2 - 8x + 10$. Llevándola a la forma factorizada $y = a(x-h)^2 + k$. Además y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de cada una.

Primer paso:

Se factoriza "-2" en los dos primeros términos del extremo derecho: $y = -2\left(x^2 + \frac{-8}{-2}x\right) + 10$

Segundo paso:

seleccione el coeficiente de "x", que en este caso es: "$\frac{-8}{-2} = 4$"

Tercer paso:

Cuarto paso:

Se divide entre dos: $\frac{1}{2}(4)=2$, y después se eleva al cuadrado, es decir: $(2)^2$.

La cantidad obtenida en el paso número tres, se suma y se resta para no alterar la igualdad: $(2)^2$- $(2)^2$y se inserta después del segundo término en el extremo derecho, dentro del corchete:

$$y=-2\left[x^2+4x+(2)^2-(2)^2\right]+10$$

Quinto paso:

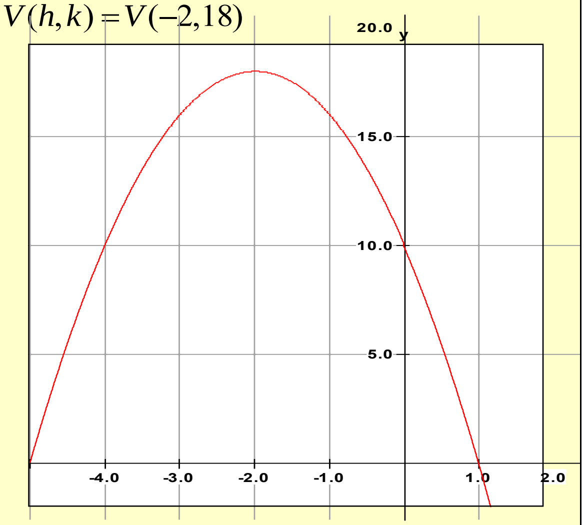
Se dejan dentro del corchete solo los tres primeros términos $y=-2\left[x^2+4x+(2)^2\right]-(-2)(2)^2+10$, los tres primeros términos forman un binomio cuadrado perfecto:

$y=-2[x+2]^2-(-2)(2)^2+10$; simplificando:

$$\boxed{y=a(x+2)^2+18}$$

Sexto paso:

Se compara la expresión obtenida en el quinto paso con la expresión buscada: $y=a(x-h)^2+k$, obteniéndose: $h=-2$ $k=18$.Por lo que las coordenadas del vértice de la parábola son $V(h,k)=V(-2,18)$



ACTIVIDAD 14

Factorice las siguientes funciones cuadráticas llevándolas a la forma factorizada $y=a(x-h)^2+k$. Utilice exclusivamente el algoritmo del método de completar el cuadrado. y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de cada una.

a. $y=x^2-5x+6$	b. $y=-x^2+5x-6$	c. $y=x^2-8x+12$
d. $y=3x^2-9x+6$	e. $y=-2x^2+6x-4$	f. $y=-2x^2+16x-30$

Ejemplo 4

Factorice la siguiente función cuadrática: $y = 4x^2 + 8x - 96$. Llevándola a la forma factorizada $y = a(x-h)^2 + k$. Además y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de la parábola. Utilice los resultados del algoritmo del método de completar el cuadrado.

Los resultados del algoritmo son:

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

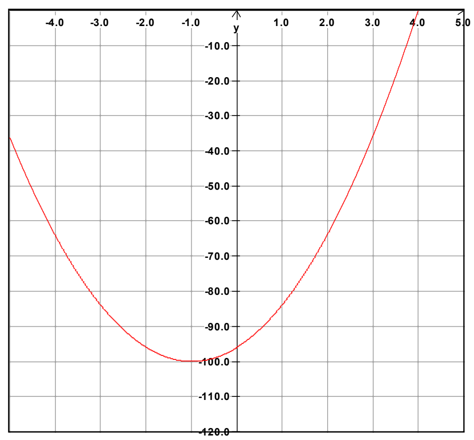
En la función cuadrática $y = 4x^2 + 8x - 96$, los parámetros tienen los valores: $a = 4; b = 8; c = -96$, sustituyendo en las ecuaciones:

$$h = -\frac{(8)}{2(4)} = -1 \qquad\qquad k = -\frac{(8)^2 - 4(4)(-96)}{4(4)} = -100$$

Las coordenadas del vértice de la parábola son: $V(h,k) = V(-1,-100)$. Sustituyendo estos valores de las coordenadas del vértice y el valor de $a = 4$. En la función cuadrática factorizada se tiene:

$y = (4)(x-(-1))^2 + (-100)$ Simplificando:

$$\boxed{y = 4(x+1)^2 - 100}$$



ACTIVIDAD 15

Factorice las siguientes funciones cuadráticas llevándolas a la forma factorizada $y = a(x-h)^2 + k$. Utilice exclusivamente las formulas:

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de cada una de las parábolas correspondiente a las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $y = x^2 - 5x + 6$	b. $y = -x^2 + 5x - 6$	c. $y = x^2 - 8x + 12$

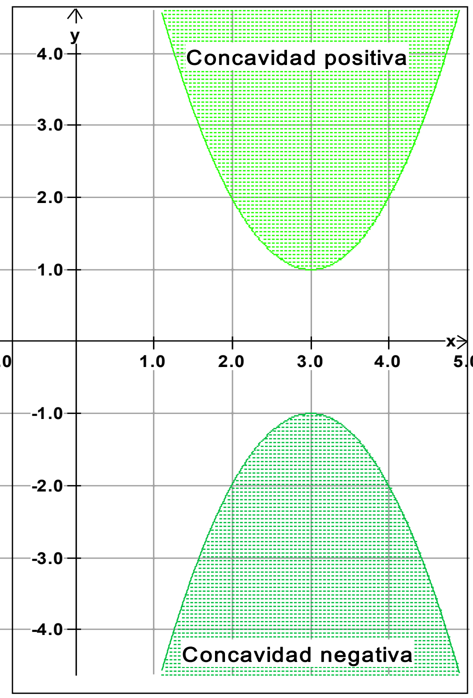
d. $y=3x^2-9x+6$	e. $y=-2x^2+6x-4$	f. $y=-2x^2+16x-30$

ACTIVIDAD 16

Factorice las siguientes funciones cuadráticas por cualquier método llevándolas a la forma factorizada $y=a(x-h)^2+k$ y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de cada una.

a. $y=3(x-3)(x-1)$	b. $y=-2(x-2)(x-1)$	c. $y=4(x-2)(x-5)$
d. $y=3(x-3)(x-1)$	e. $y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$	f. $y=3\left(x+\frac{2}{5}\right)x$

2.4.2 Concavidad, Máximo o Mínimo.



La estrategia para realizar el análisis la concavidad de la parábola será mediante el uso de distintos tipos de tablas para revisar los conceptos de máximo y mínimo.

Expresando la función cuadrática escrita en la forma general *y* = *ax*^{2} + *bx* + *c*, a la forma estándar *y* = *a*(*x* - *h*)^2 + *k*; y así poder describirla a partir del análisis de sus parámetros.

Se le llama concavidad a la oquedad que presenta la curva, imaginemos un recipiente cuya silueta tiene la forma de parábola, como la que se muestra en la figura adjunta. Si este recipiente se colocara en un determinado momento cuando llueve, esta parte se llenaría de líquido. La parte sombreada es la concavidad de la parábola, esta recibe el adjetivo de positiva cuando puede acumular el líquido. En caso contrario la parábola tiene concavidad negativa.

La relación que existe entre la concavidad de la parábola y el punto mínimo, se puede observar en la parte superior de la figura. Asimismo la relación que existe entre la concavidad de la parábola y el punto máximo se esquematiza en la parte inferior de la figura. En resumen:

CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA	TIPO DE VALOR EXTREMO
Positiva (+), La parábola se abre hacia arriba si El coeficiente del termino cuadrático es negativo $a>0$	Máximo
Negativa(-), La parábola se abre hacia abajo si	Mínimo

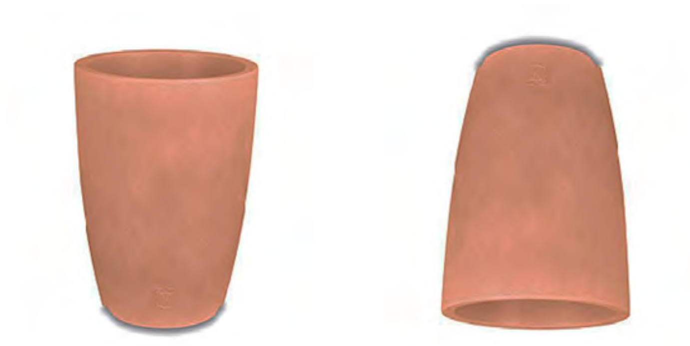
El coeficiente del termino cuadrático es negativo $a<0$	

ACTIVIDAD 17

Determine el tipo de concavidad y el tipo de valor extremo de las siguientes funciones cuadráticas funciones.

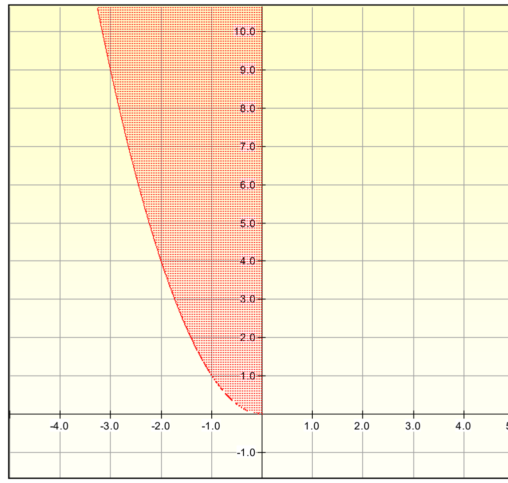
a. $y=x^2-4x+2$ concavidad___	b. $y=-x^2+5x+6$ concavidad___	c. $y=x^2-8x+12$ concavidad___

En forma grafica se reprenta las concavidades; la concavidad es positiva si el vaso puede recibir agua . La concavidad es negativa si el vaso no puede captar agua.



2.4.3 La Simetría de la parábola.

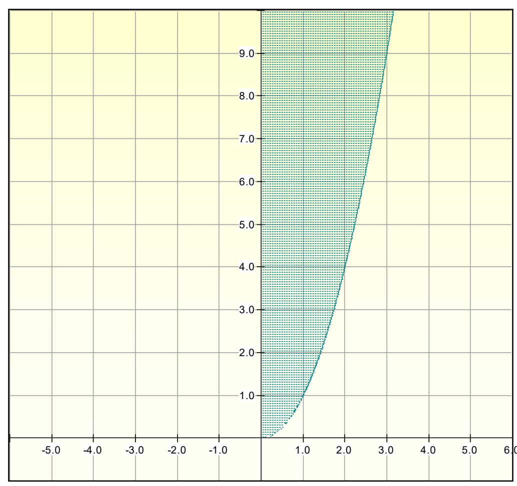
Se busca que como aprendizaje, el alumno integre a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría. Dará significado a las coordenadas del vértice en términos del valor máximo o mínimo de la función.



Aunado a lo visto en la sección 1.4 la parábola es una curva tiene la propiedad de simetría con respecto a un eje, al cual se le llamara eje focal o simplemente eje de simetría.

La simetría es una la propiedad que te permite trazar una parte faltante de una gráfica, por ejemplo, si se revisa la función $f(x)=x^2$ la cual esta graficada en la siguiente figura, se observara que solo aparece el lado izquierdo de ella.

Algunos de los valores de la función cuadrática cuya grafica se llama parábola, son por ejemplo: $f(-1)=1$; $f(-2)=2$; $f(-3)=9$, se podrían encontrar los valores en el otro extremo; de manera gráfica, si la mitad esta graficada en papel bastaría doblar la hoja sobre el eje de simetría (eje de las ordenadas o eje "y").



Al tabular se obtendría que algunos valores del dominio de la función tienen la misma imagen: $f(-1)=f(1)=1$; $f(-2)=f(2)=4$; $f(-3)=f(3)=9$, en general; $f(x)=f(-x)$ y se podría duplicar la cantidad de distintos numero tabulados. ciertas funciones $f(x)$, denominadas "pares" que cumplen la condición:

Sí $f(x)$, es una función par entonces se cumple que $f(-x)=f(x)$. En particular una función cuadrática:

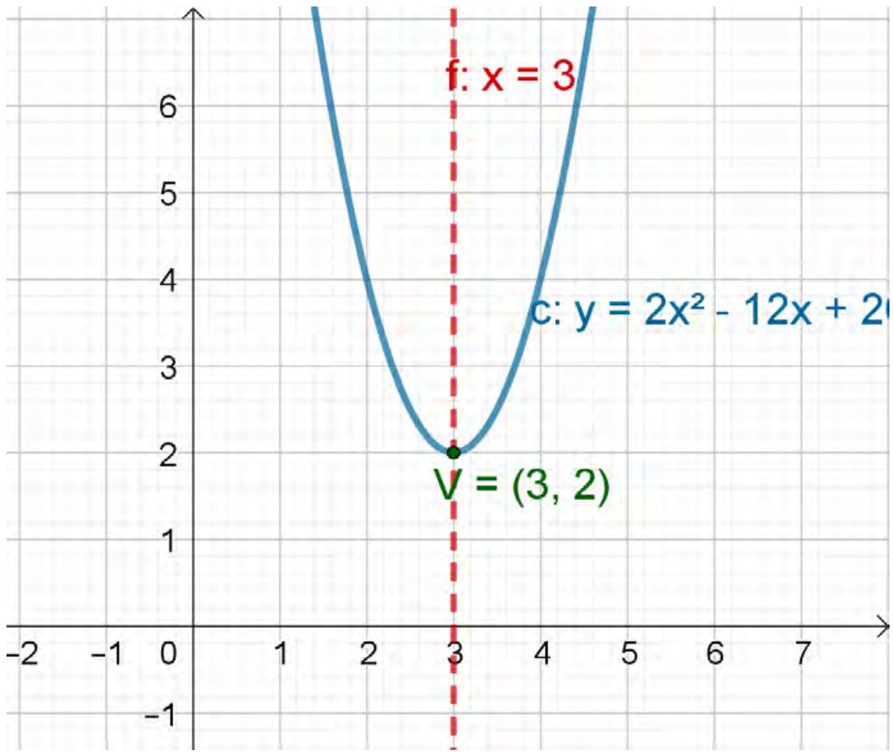
$y=f(x)=ax^2+bx+c \quad , con: \; a\neq 0$

Es una función par, por lo general las gráficas de estas funciones son simétricas respecto al eje "y" (eje de las ordenadas).

Cuando se ha encontrado y determinado el vértice de la parábola, es posible hallar el eje de simetría.

Ejemplo 5

La función cuadrática $y = 2(x-3)^2 + 2$ La función cuadrática tiene punto mínimo en el punto V (3,6). Si se traza una línea recta perpendicular al eje de las abscisas y que pase por el vértice, entonces esta recta se llamara el eje focal (más adelante se justificara el nombre), esta recta representa el eje de simetría de la curva.



ACTIVIDAD 16

Factorice las siguientes funciones cuadráticas por cualquier método llevándolas a la forma factorizada $y = a(x-h)^2 + k$ y determine las coordenadas del vértice $V(h,k)$ de cada una, trace una línea recta perpendicular al eje de las abscisas y nómbrelo como eje de simetría.

a. $y=(x-3)(x-1)$	b. $y=(x-2)(x-1)$	c. $y=(x-2)(x-5)$
d. $y=3(x-3)(x-1)$	e. $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$	f. $y=\left(x+\frac{2}{5}\right)x$
g $y=-2(x+5)^2-7$	$y=5(x-3)^2+6$	

2.4.4 El Dominio y el Rango de la función cuadrática.

Para revisar este tema se utilizara como estrategia Analizar distintos tipos de tablas para revisar los conceptos de Dominio y rango de una función, y con esta lograr los aprendizajes del alumno que amplíen su conocimiento sobre el tema de funciones, rescatando conocimientos vistos con anterioridad.

Analicemos el dominio de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$. La variable independiente "x" puede tomar valores localizados en la recta real desde menos infinito "$-\infty$", hasta más infinito "$+\infty$", en forma compacta: $D_f = \{x | x \in -\infty < x < +\infty\}$, lo cual se lee como:

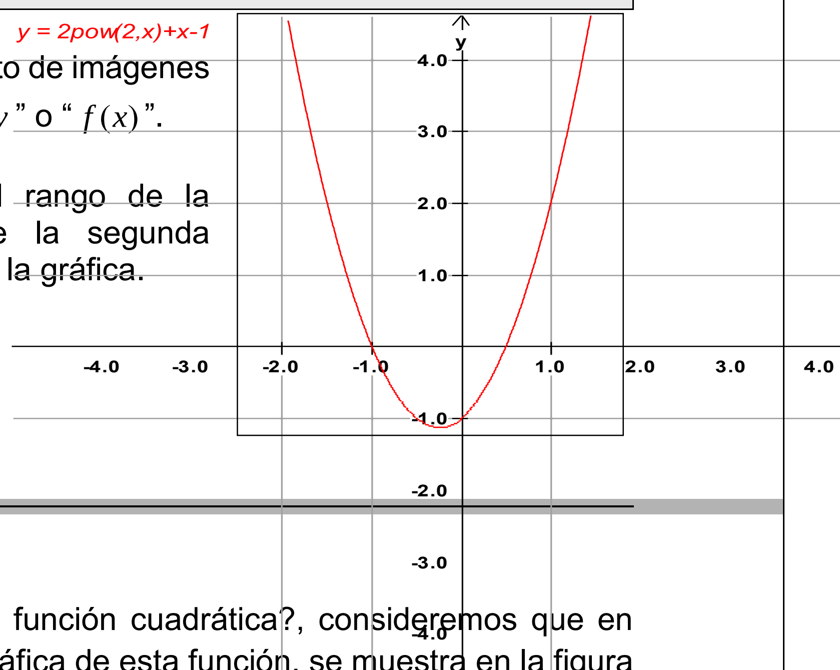
El dominio de la función D_f está formado por los valores de la variable independiente "x" que pertenecen "$\in$" al intervalo abierto de menos infinito a mas infinito "$-\infty < x < +\infty$".

En resultados de teoremas que se verán en cursos superiores se concluirá que para toda función polinomica (entre ellas las lineales y las cuadráticas) su dominio es el conjunto de números reales.

En particular la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, tiene por dominio natural al intervalo abierto: $-\infty < x < +\infty$, es decir todos los números reales .

El rango de la función (R_f) es el conjunto de imágenes o valores de la variable dependiente: "y" o "$f(x)$".

Gráficamente se puede encontrar el rango de la función, si se considera solamente la segunda coordenada de los puntos que integran la gráfica.



Ejemplo 6

¿Cómo se encuentra el rango de una función cuadrática?, consideremos que en particular la función: $y = 2x^2 + x - 1$, la gráfica de esta función, se muestra en la figura anexa.

De la gráfica se observa que el rango de la función comienza en un valor cercano a menos uno y sigue hasta más infinito ($+\infty$). Parra hallar con mayor precisión el extremo inferior del rango de la función es necesario factorizar la ecuación: $y = ax^2 + bx + c$ y llevarla a la forma: $y = a(x-h)^2 + k$.

Primer paso:

Factorice "2" en los dos primeros términos del extremo derecho: $y=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-1$

Segundo paso:

El coeficiente de "x", que en este caso es: "$\frac{1}{2}$"

Tercer paso:

Dividiendo entre dos: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$, y después se eleva al cuadrado, es decir: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Cuarto paso:

La cantidad obtenida en el paso número tres, se suma y se resta para no alterar la igualdad: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ - $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ y se inserta después del segundo término en el extremo derecho, dentro del corchete:

$$y=2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]-1$$

Quinto paso:

Se dejan dentro del corchete solo los tres primeros términos $y=2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]-2\left(\frac{1}{4}\right)^2-1$, los tres primeros términos forman un binomio cuadrado perfecto:

$$y=2\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-2\left(\frac{1}{4}\right)^2-1;$$

simplificando:

$$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{8}$$

Sexto paso:

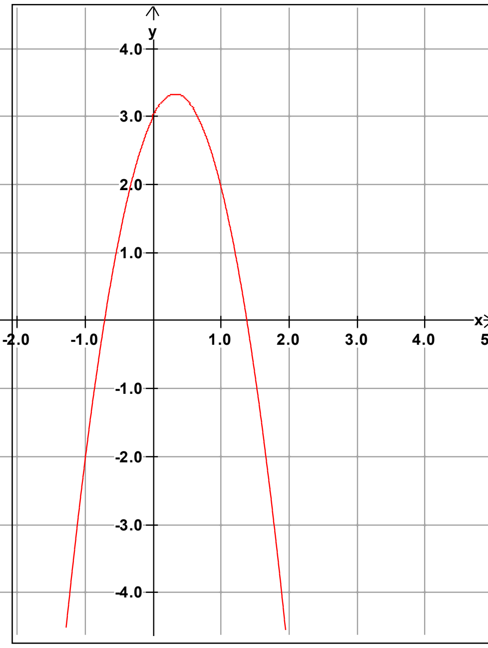
Se compara la expresión obtenida en el quinto paso con la expresión buscada: $y=a(x-h)^2+k$, obteniéndose:

$$h=-\frac{1}{2}$$

$$k=-\frac{9}{8}$$

Así que el rango de la función va desde $-\frac{9}{8}$ hasta más infinito ($+\infty$), en forma compacta: $R_f=\left\{y \mid \mathrm{y} \in \quad -\frac{9}{8}<y<+\infty\right\}$. Como se podrá notar, es de gran utilidad conocer el vértice de la parábola.

Ejemplo 7



Determina el Rango de la función: $y=-3x^2+2x+3$, la gráfica de esta función, se muestra en la figura anexa. Se puede apreciar en la gráfica que el rango de la función está localizado entre menos infinito ($-\infty$) y un valor superior a tres. Para determinar el valor extremo superior, es necesario, recurrir al método de completar el cuadrado en la variable independiente o utilizar la fórmula para determinar el valor de la ordenada del vértice de la parábola $V(h,k)$, encontrado en la sección 1.4.4:

$$k=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Los parámetros de la ecuación cuadrática son; $a=-3; b=2; c=3$, sustituyendo en la ecuación para determinar el valor de la ordenada del vértice de la parábola: $k=-\frac{(2)^2-4(-3)(3)}{4(-3)}=\frac{10}{3}$. El rango de la función cuadrática: va de menos infinito hasta $\frac{10}{3}$. En forma compacta: $R_f=\left\{y \,\middle|\, \text{y} \in \quad -\infty<y<\frac{10}{3}\right\}$.

¿Será posible hallar el rango de la función cuadrática sin conocer específicamente los valores de los parámetros?

¿Porque si es posible?

Consideremos nuevamente: $y=ax^2+bx+c$ y llevémosla a la forma factorizada: $y=a(x-h)^2+k$.

En la sección 1.4.4 se obtuvo $y=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+\left[c-\frac{b^2}{4a}\right]$ en donde : $h=-\frac{b}{2a}$:

$k=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, que a su vez son las coordenadas del vértice de la parábola $V(h,k)$.

La coordenada k del vértice nos daría la máxima altura si la parábola tiene concavidad negativa. La coordenada k del vértice nos daría la mínima altura si la concavidad es positiva. Escribamos esto en una tabla:

Concavidad	**Tipo**	**Rango (R) de la función cuadrática: $y=ax^2+bx+c$.**

	de valor extremo	
Positiva + “la curva abre hacia arriba”	Mínimo	$R_f = \left\{ y \middle| \text{y} \in \quad \frac{b^2-4ac}{4a} < y < +\infty \right\}$
Negativa - “la curva abre hacia abajo”	Máximo	$R_f = \left\{ y \middle| \text{y} \in \quad -\infty < y < \frac{b^2-4ac}{4a} \right\}$

ACTIVIDAD 18

Determine el Dominio y Rango las siguientes funciones.

a. $y = x^2 - 4x + 2$	b. $y = -x^2 + 5x + 6$	c. $y = x^2 - 8x + 12$
d. $y = -5x^2 - 7x + 6$	e. $y = -2x^2 + 2x - 4$	f. $y = -2x^2 + 16x - 30$

2.4.5 Dominio restringido de la función cuadrática.

Como estrategia se analizaran distintos tipos de tablas y graficas con la finalidad de revisar los conceptos de Dominio y rango de una función. Como aprendizaje se busca que el estudiante pueda ampliar su conocimiento sobre el tema de funciones, rescatando conocimientos vistos con anterioridad, Adquiriendo las herramientas para el proceso de análisis y modelación de problemas reales.

En algunos problemas reales se utiliza la Ecuación cuadrática para modelar un problema, de esta forma establecer la posterior solución del mismo.

En la sección 1.1 se comentó un problema en donde se dispara un proyectil (bala) con cierto ángulo, en esta situación es necesario determinar la altura de este proyectil.

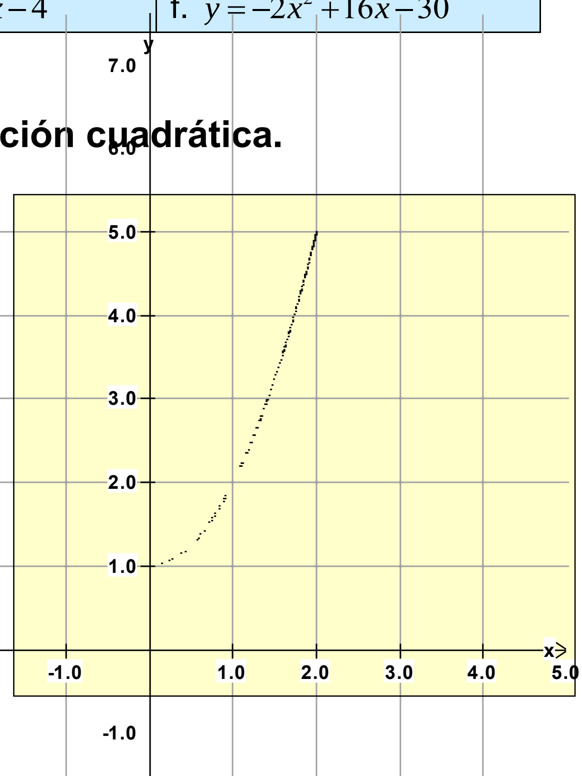


Figura: gráfica de la función:
Con dominio restringido a
$D_f = \{ x | x \in \ 0 < x < 2 \}$

El tiempo es la variable independiente y necesariamente parte de cero, no tiene sentido que la variable tome valores negativos. Por otra parte cuando el proyectil cae al suelo, el tiempo posterior a ese instante tampoco interesa. Por esta razón se debe distinguir entre la función cuadrática y el modelo que se pretende crear. La ecuación cuadrática tiene por dominio natural el intervalo: $-\infty < x < +\infty$, mientras que en el modelo su dominio es $0 < x < 102.0408 \text{ metros}$.

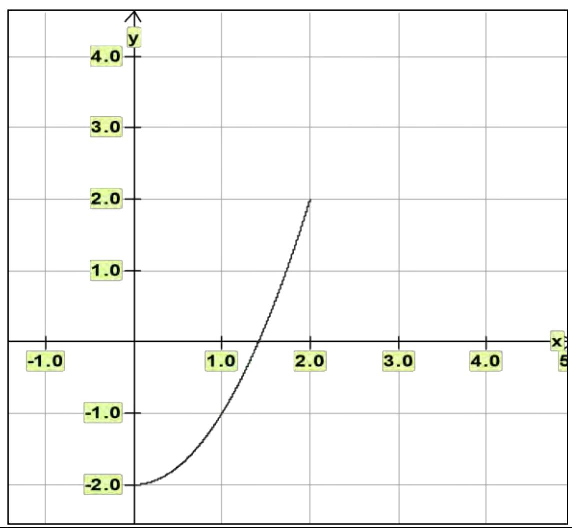
Si se reducen valores o se quitan intervalos del dominio de la función cuadrática, se dice que se ha restringido el dominio de la función.

Ejemplo 8

Determine los valores que puede tomar la función $y = x^2 - 2$ si el dominio está entre cero y 2 inclusive (en forma compacta: $D_f = \{x | x \in \; 0 < x < 2\}$. De la gráfica se observa que el rango de esta función esta entre 0 y dos unidades. Sin embargo, no es muy conveniente utilizar exclusivamente la gráfica, cuando se requiere más precisión, lo más adecuado es evaluar la función en los valores extremos:

0	$y(0) = (0)^2 - 2 = -2$
2	$y(2) = (2)^2 - 2 = 0$

Se observa que el rango de esta función está entre 0 y 2 unidades. El rango de la función $y = x^2 - 2$, escrito de manera compacta es:
$R_f = \{y | \text{ y} \in \; 0 < y < 2\}$



Ejemplo 9

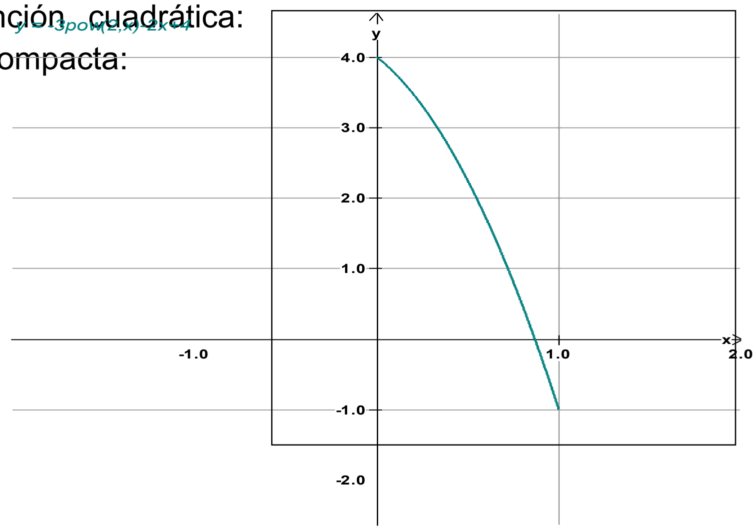
Determine los valores que puede tomar la función $y = -3x^2 - 2x + 4$ si el dominio está entre cero y la unidad, inclusive (en forma compacta: $D_f = \{x | x \in \; 0 < x < 1\}$).

x	$y = -3x^2 - 2x + 4$
0	$y = -3(0)^2 - 2(0) + 4 = 4$
1	$y = -3(1)^2 - 2(1) + 4 = -1$

De la gráfica se observa que el rango de esta función esta entre menos uno y cuatro.

Escrito el Rango de la función cuadrática: $y=-3x^2-2x+4$, de manera compacta:

$$R_f=\{y|\ \mathrm{y}\in\quad 0<y<2\}$$



ACTIVIDAD 19

Determine el Dominio y Rango las siguientes funciones. Considere el dominio natural: $-\infty<x<+\infty$

a. $y=x^2-4x+2$	b. $y=-x^2+5x+6$	c. $y=x^2-8x+12$
d. $y=-5x^2-7x+6$	e. $y=-2x^2+2x-4$	f. $y=-2x^2+16x-30$

ACTIVIDAD 20

Determine el Rango las siguientes funciones. Considere el dominio restringido indicado en cada inciso.

a. $y=x^2-4x+2$ $D_f=\{x\|x\in\ -1<x<1\}$	b. $y=-x^2+5x+6$ $D_f=\{x\|x\in\ -1<x<0\}$	c. $y=x^2-8x+12$ $D_f=\{x\|x\in\ -2<x<1\}$
d. $y=-5x^2-7x+6$ $D_f=\{x\|x\in\ 0<x<3\}$	e. $y=-2x^2+2x-4$ $D_f=\{x\|x\in\ 0<x<12\}$	f. $y=-2x^2+16x-30$ $D_f=\{x\|x\in\ -\infty<x<0\}$

Sesión 5 y Cierre

2.6 Problemas de aplicación.

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- ✓ Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

Estrategias de aprendizaje sugeridas

- ✓ El profesor resalta la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización en diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos y ganancias.

¿Qué es un algoritmo?

El un conjunto de operaciones sistemáticas y ordenadas que permite realizar un cálculo o hallar la solución de problema.

En el libro de Polya; "Cómo Plantear y Resolver Problemas" se puede hallar el Método de Cuatro Pasos", a continuación se proporciona un breve resumen de este algoritmo, el cual lo aplicaremos a la resolución de problemas relacionados con ecuaciones.

Paso 1: Entender el Problema. En este proceso debes entender lo que se pregunta (que se pide), verificar si ya se ha resuelto uno parecido, de esta forma replantear el problema, debes distinguir los datos y determinar si la información es suficiente para resolver el problema.

Paso 2: Configurar un Plan. Aplicando una estrategia para resolverlo, buscar patrones, conjeturar y aplicar el proceso ensayo error, hacer diagramas y/o dibujos, realizar un análisis dimensional.

Paso 3: Ejecutar el Plan. Ejecutar las estrategias que escogiste para solucionar el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o busca otra estrategia y vuelve a empezar.

Paso 4: Mirar hacia atrás. Encontrar la respuesta y comprobarla.¿ Es posible extender tu solución a un caso más general?

Es recomendable que el alumno realice la investigación de que es un dato, incógnita, proposición y ecuación.

La solución de una ecuación consiste en encontrar los valores de las incógnitas que hacen verdaderas las ecuaciones. A esos valores también se acostumbra a nombrarlas como raíces o conjunto solución de la ecuación.

Para resolver un problema que da lugar a una ecuación de primer grado (más adelante en los siguientes cursos se le llamara ecuación lineal), hay que construir el modelo y resolverlo. **Consulta el siguiente sitio para una mejor información:**

GEORGE POLYA: ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS. I.E.S. Rosa Chacel. Dpto. de Matemáticas.
http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

Ejemplo 10

Obtenga la traza o grafica de la función cuadrática (parábola), sin tabular: $y=(x-2)(x-6)$.

Se puede apreciar de inmediato que las raíces o ceros de la ecuación cuadrática $(x-2)(x-6)=0$ son: $r_1=2;\ \text{y}\ \ r_1=6$, es decir las intersecciones con el eje de las abscisa son: $P_1(2,0)$ y $P_2(6,0)$, Considerando la simetría en particular para esta función cuadrática, se puede considerar que esta tiene un punto medio situado a la misma distancia de una y otra raíz, en el eje de las abscisas.

Para calcularlo se hace lo siguiente: $x_m=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{2+6}{2}=4$ este valor es una de las coordenadas del vértice de la parábola, para hallar la otra coordenada se sustituye en la función cuadrática: $y=(2-2)(2-6)=(2)(-4)=-8$ por lo que las coordenadas del vértice son $V(4,-8)$.

ACTIVIDAD 21

Obtenga la traza de la gráfica sin tabular

a. $y=(x-3)(x-4)$.	**b.** $y=(x-1)(x+1)$	**c.** $y=(x+3)(x-1)$
d. $y=x(x-4)$	**e.** $y=(x+3)(x+4)$	**f.** $y=(x-1)(x+2)$

Cuestionario 2.1

1. Considera que en un problema se obtuvo que el vértice de la parábola está ubicado en: $V(-2,-8)$. ¿Es suficiente con conocer la segunda coordenada para determinar que la función es un mínimo?

2. Considera que en un problema uno de tus compañeros obtuvo que el vértice de la parábola está ubicado en: $V(2,-1)$ y que tú obtuviste las intersecciones con el eje

de las abscisas y estas se ubican en $P_1(-1,0)$ y $P_2(9,0)$. ¿Consideras correcto o consistente los cálculos o datos tuyos y el de tu compañero?

2. Considera que en un problema se obtuvo que el vértice de la parábola está ubicado en: $V(9,-3)$ y que las intersecciones con el eje de las abscisas y estas se ubican en $P_1(-5,0)$ y $P_2(9,2)$. ¿Es suficiente con conocer la segunda coordenada para determinar que la función es un máximo?

Deducción de una expresión o fórmula para hallar el vértice de la parábola.

En general pensemos en una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que tiene dos raíces reales y distintas. Las intersecciones de la parábola con los el eje coordenado de las abscisas (eje de las "x"), en el caso de que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones es:

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, r_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ El punto medio se define como la suma de los dos valores r_1, r_2, divididos entre dos, y se calcula como $x_m = \frac{r_1+r_2}{2}$, sustituyendo los valores para r_1, r_2:

$x_m = \frac{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{-\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$, este valor x_m se sustituye en la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$; $y = ax^2 + bx + c$

$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c$ Desarrollando el cuadrado: $y = a(\frac{b^2}{4a^2}) + b(-\frac{b}{2a}) + c$

$y = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$, $y = \frac{b^2}{4a} - \frac{2}{2}\frac{b^2}{2a} + \frac{4a}{4a}c$; $y = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$; $y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$

Simplificando términos semejantes; $y = \frac{-b^2+4ac}{4a}$; es decir; $y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

Las coordenadas del valor extremo son:

$V(x,y) = V(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$, este resultado concuerda con la expresión algebraica hallada para el vértice de la parábola en la sección 2.4.4.

Ejemplo 11 Para la ecuación cuadrática: $y = 4x^2 \quad a = 4; b = 0; c = 0$ Sustituyendo:

$$V(x, y) = V(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) = V(0,0)$$

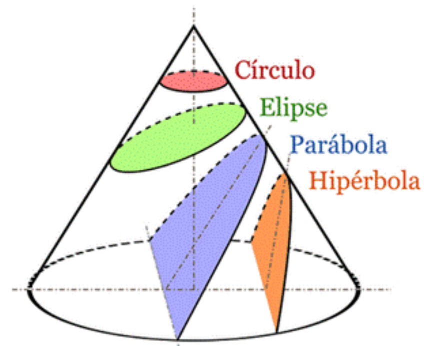
ACTIVIDAD 22

Encuentre el vértice de las parábolas:

a. $y = (x-1)(x-3)$	b. $y = (x-4)(x+3)$	c. $y = (x-3)(x-9)$

En cursos posteriormente se verá que existe una relación entre la función cuadrática, su grafica denominada parábola y el cono.

A continuación se presentan algunas aplicaciones frecuentes de la parábola en la vida diaria.



Ejemplo 12

Regresando al problema 2, La altura de la bala.

Se dispara una bala desde una pistola, con un ángulo de 30 grados, La función que relaciona la altura alcanzada y el tiempo empleado es: $y = 500x - 4.9x^2$, reacomodando los términos: $y = -4.9x^2 + 500x$ se puede observar en la función que esta tiene un máximo ya que el coeficiente de x^2 es negativo. Aplicando el método de completar cuadrados tenemos:

$y = -4.9x^2 + 500x$	Factorizando: -4.9
$y = -4.9\left(x^2 + \frac{500}{-4.9}x\right)$	Completando el cuadrado $\left(\frac{1}{2}\left[\frac{500}{-4.9}\right]\right)^2 = \left(\frac{250}{-4.9}\right)^2$
$y = -4.9\left(x^2 + \frac{500}{-4.9}x + \left(\frac{250}{-4.9}\right)^2 - \left(\frac{250}{-4.9}\right)^2\right)$	Sumando y restando el término encontrado para completar el cuadrado. Seleccionando los tres primeros términos.
$y = -4.9\left(x^2 + \frac{500}{-4.9}x + \left(\frac{250}{-4.9}\right)^2\right) + (4.9)\left(\frac{250}{-4.9}\right)^2$	Factorizando:
$y = -4.9\left(x - \frac{250}{4.9}\right)^2 + (4.9)\left(\frac{250}{-4.9}\right)^2$	Simplificando:

$y=-4.9\left(x-\frac{250}{4.9}\right)^2+\frac{62500}{4.9}$	Comparando con la expresión factorizada de la función cuadrática: $y=a(x-h)^2+k$
$h=\frac{250}{4.9}$; $k=\frac{62500}{4.9}$	**Aproximadamente se requiere un tiempo de 51.0204, y la altura máxima alcanzada: 12755.1020**

Ejemplo 13

Regresando al problema 3. Distancia mínima entre dos barcos.

El Ballenero japonés y un Guardacostas Nacional viajan en trayectorias que se cruzan formando un ángulo recto. Uno parte de cierta estación naval situada a 102 Km. del cruce; el otro, a una velocidad de 60 Km.(1 Km./minuto). Donde realizo su actividad ilícita. El segundo marcha a una velocidad de 48 kilómetros por hora (0.8 Km./minuto),y dista del punto de cruce 85 km. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida para que las dos naves se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia mínima?

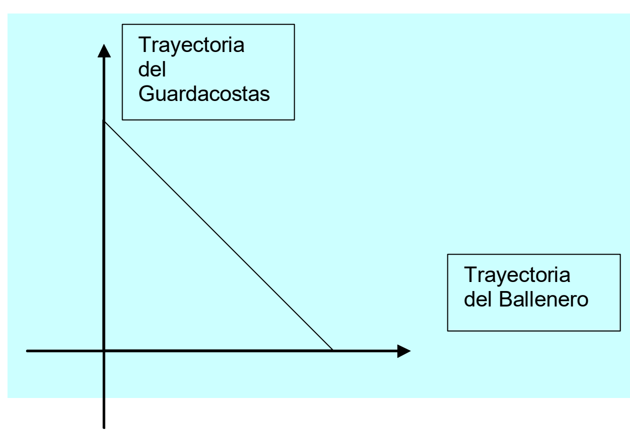
El tiempo varía para el guardacostas como:

Tabla 1.6.1	Velocidad Km./minuto	Tiempo Minutos: x	Distancia recorrida en función del tiempo empleado hasta llegar al punto de cruce (x).
Guardacostas	1	1	$102-x$
Ballenero	0.8	1	$85-0.8x$

La distancia d se acorta minuto a minuto Siguiendo la relación descrita por el teorema de Pitágoras: $A^2+B^2=C^2$, despejando:

Sustituyendo los valores para A, B:

$(102-x)^2+(85-0.8x)^2=C^2$



La cantidad C^2 por lo pronto se tratara como el valor de y (debemos recordar que es el cuadrado de la distancia de separación entre los dos buques).

$y=(102-x)^2+(85-0.8x)^2$.

Tabulando esta función y graficando, se tiene:

Tabla 1.6.2		
x minutos	$f(x)=(102-x)^2+(85-0.8x)^2 \equiv$ $y=1.64x^2-340x+17629$ Cuadrado de la distancia de separación entre los dos buques. Km.	$f(x)=\sqrt{(102-x)^2+(85-0.8x)^2}$ Separación entre los dos buques. Km.
1.16488	17235.16619	131.28277
12.63740	13594.19836	116.59416
24.10992	10384.93992	101.90653
35.58244	7607.39086	87.22036
47.05496	5261.55119	72.53655
58.52748	3347.42090	57.85690
70.00000	1865.00000	43.18565
81.47252	814.28848	28.53574
92.94504	195.28636	13.97449
104.41756	7.99361	2.82730
115.89008	252.41025	15.88742
127.36260	928.53628	30.47189

Grafica correspondiente:

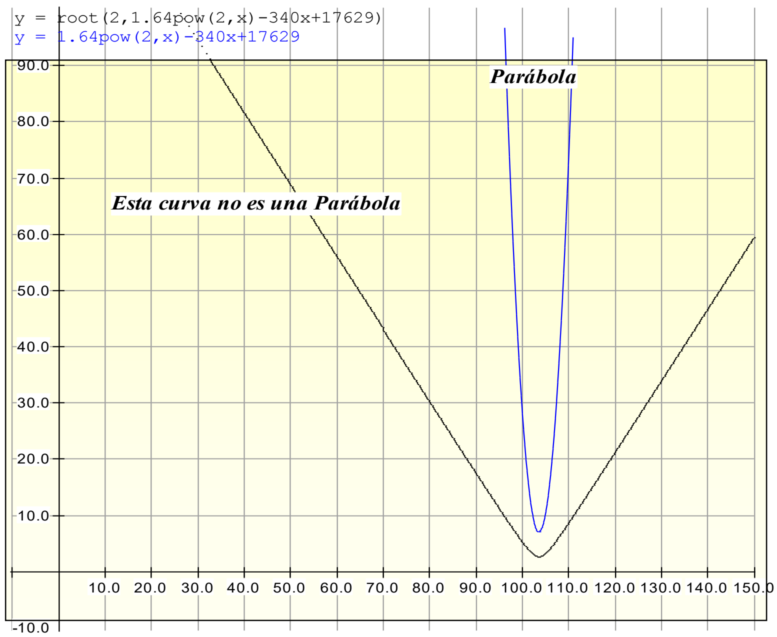


Figura 1.6.3 Grafica de la parábola: $y = 1.64x^2 - 340x + 17629$ **y de**

La función: $f(x) = \sqrt{(102-x)^2 + (85-0.8x)^2}$ **, se observa que, esta función no es una parábola.**

Tratemos de resolver el problema algebraicamente: considere que $y = (102-x)^2 + (85-0.8x)^2$. Desarrollando los binomios cuadrados:

$y = 102^2 - 204x + x^2 + 85^2 - 136x + 0.8^2 x^2$ Agrupando términos semejantes:

$y = (1+.8^2)x^2 + (-204-136)x + (102^2 + 85^2)$ Simplificando:

$f(x) = \sqrt{(102-x)^2 + (85-0.8x)^2}$ Se aplicará el método de completar el cuadrado, sin embargo también se realizarán algunas operaciones aritméticas que simplificaran el proceso.

Consideremos la expresión de la función cuadrática

$$y = 1.64(x^2 - \frac{340}{1.64}x) + 17629$$

Para no trabajar con decimales, y no perder precisión, $\frac{-340}{1.64}$ lo manejaremos como:

$\frac{-34000}{164} = \frac{-8500(4)}{41(4)} = -\frac{8500}{41}$. Además: $1.64 = \frac{164}{100}$, Sustituyendo:

$y = \frac{164}{100}(x^2 - \frac{425}{41}x) + 17629$, la mitad del coeficiente de x es:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{8500}{41}\right) = -\frac{4250}{41}$$

Esta cantidad se eleva al cuadrado, se suma y resta dentro de paréntesis:

$y=\frac{164}{100}\left(x^2-\frac{9100}{41}x+\left(-\frac{4250}{41}\right)^2-\left(-\frac{4250}{41}\right)^2\right)+17629$, seleccionando los tres primeros términos:

$y=\frac{164}{100}\left(x^2-\frac{9100}{41}x+\left(\frac{4250}{41}\right)^2\right)-\frac{164}{100}\left(\frac{4250}{41}\right)^2+17629$ Completando el cuadrado

$y=\frac{164}{100}\left(x-\frac{4250}{41}\right)^2-\frac{164}{100}\left(-\frac{4250}{41}\right)^2+17629$.

En particular el termino se puede reducir a: $-\frac{164}{100}\left(-\frac{4250}{41}\right)^2=-\frac{722500}{41}$ sumando algebraicamente esta fracción con 17629 : $-\frac{722500}{41}+17629=\frac{289}{41}$ De esta forma la función cuadrática queda como: $y=\frac{164}{100}\left(x-\frac{4550}{41}\right)^2+\frac{289}{41}$, el tiempo que tardan en acercarse lo mas cercano posible es de $\frac{4450}{41}$, aproximadamente: 108.54 minutos y la distancia mínima entre ellos es de $\sqrt{\frac{298}{41}}$ recuerde que es el cuadrado de la distancia de separación entre los dos buques, o sea aproximadamente 2.65 Kilómetros. Para cerciorarnos de que el resultado es consistente con la realidad, podemos comparar nuestro resultado con el mostrado en la Tabla 1.6.2 y con la gráfica correspondiente.

GRUPO DE EJERCICIOS 2.1

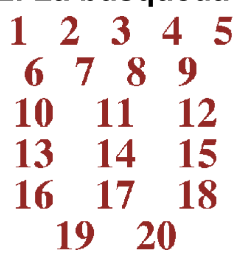
1. Determinar las dimensiones más adecuadas para la construcción de una habitación de área máxima.

Se desea construir una nueva habitación en la casa y se desea determinar cuáles son las dimensiones más adecuadas para maximizar el área, suponga que el material disponible alcanza para construir las paredes de un habitáculo rectangular de longitud 14 metros de perímetro. Considere que el ancho se representa como “x” y el largo como “y”, ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha habitación para obtener la máxima área, si

a. Los valores posibles para las dimensiones de dicha habitación van desde 2.0 metros hasta 5.0.

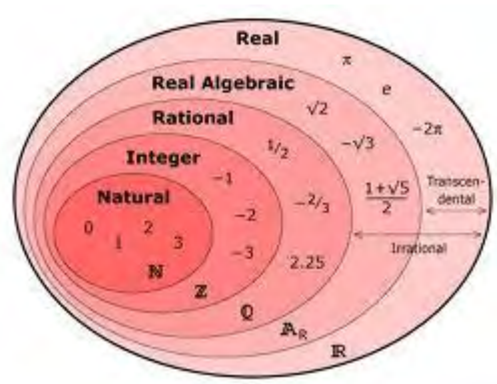
b. Determine la función cuadrática y localice de acuerdo a los métodos utilizados anteriormente el vértice de la parábola.

2. La búsqueda de dos números que cumplen cierta condición.



Se desconoce el valor de dos números de tal manera que sumados dan 17 y se busca que ambos tengan el máximo valor al ser multiplicados. ¿Cuáles son esos números, si
a. Son números reales?
b. Son números enteros?
c. compare las gráficas en los incisos a y b y diga si son iguales o no los respectivos dominios y rangos.

3. La búsqueda de dos números fraccionarios.
Dos números sumados dan la unidad y ambos son positivos, multiplicados dan el máximo valor, ¿Cuál son esos números?



4. Maximizar las ganancias.
Un granjero desea tener una granja para engordar vacas y borregos. Las vacas cuestan $10 mil pesos y los borregos $ 3 mil pesos. El granjero tiene espacio para 80 animales máximo y tiene $500 mil pesos para gastar. Cuando venda los animales le pagaran $13 mil por cada vaca y 5 mil cada borrego. ¿Cuantas vacas y borregos deberá comprar para maximizar su ganancia?.

Compra $ 10,000 c/u Vende a $ 13,000 c/u 	Compra $ 3,000 c/u Vende a $ 5,000 c/u 

5. Ejercicio algebraico.

Hallar el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$ de manera aproximada tabulando valores entre 0 y 2, incrementando de 0.2 en 0.2.

6. Segundo Ejercicio algebraico.

Hallar el mínimo de la función: $f(x)=2x^2+\dfrac{4}{x}$ con $x>0$

7. Costos de manufactura.

Suponga que el costo de manufactura de pastelitos sigue la función: $y=x^2-12x+50$ donde y reprenda el costo y x el número de pastelitos producidos, Determine cuál es el costo mínimo y la cantidad de pastelillos producidos al día.

8. El costo de la modernidad: El aserradero.

Suponga que una regla para determinar cuántos pies cúbicos se obtendrán de un árbol está dado por la siguiente regla: $y=0.22x^2-0.71x$ donde x representa el diámetro del tronco en pulgadas y y es el número de pies de madera hecha polines y tabla. ¿Cuál será el número máximo de pies de madera y para que grosor de tronco ocurre?

9. Un taxista astuto.

Considere que una persona dedicada a manejar un taxi debe pagar una cuota diaria al dueño del vehículo, si utiliza por mayor tiempo el vehículo deberá pagar más. Suponga que el taxista levanta pasajeros y les pregunta su destino y de manera mental calcula el tiempo que empleara en la dejada del pasajero. Si no le conviene niega el servicio alegando cualquier excusa. Considere que la función que permite calcular el ingreso económico es: $y=\frac{1}{5}(x-2)(x-12)+10$ donde y representa el ingreso económico y x el tiempo que emplea en dejar al pasajero. Determine el tiempo en donde su ingreso es mínimo.

10. El tronco de mayor volumen

De un tronco cilíndrico debe sacarse una viga rectangular del máximo volumen. ¿Qué forma ha de tener su sección?

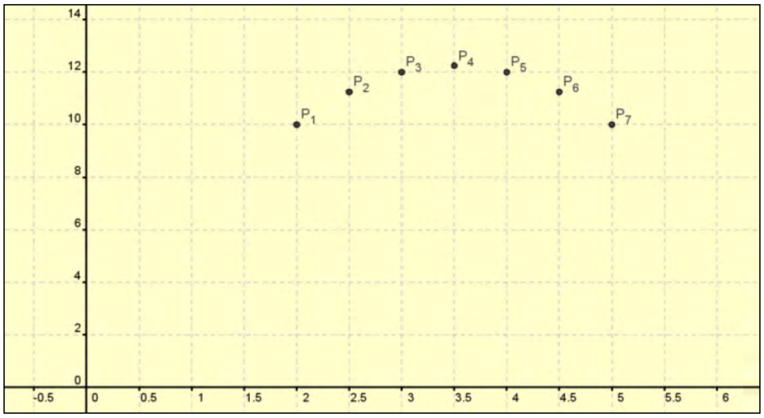
11. Dos parcelas de tierra (problema uno)
¿Qué forma ha de tener una parcela rectangular de un área dada, para que la longitud de su cerca sea la menor posible?

12. **Dos parcelas de tierra (problema dos)**
¿Qué forma debe tener una parcela rectangular para que, con una longitud fija de su cercado, tenga aquélla la mayor área posible?

SOLUCIONES AL GRUPO DE EJERCICIOS 2.1

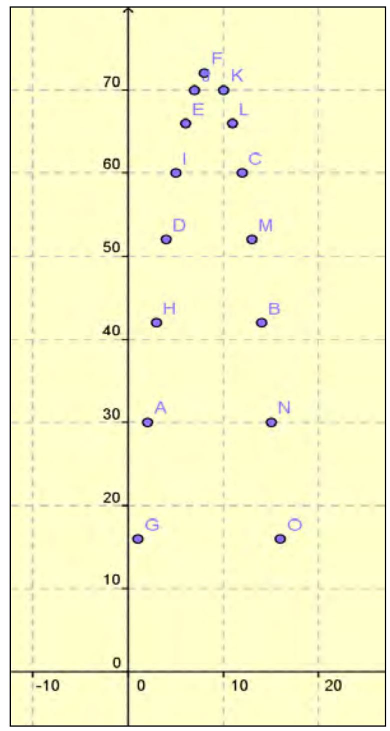
1. construyendo una tabla que vaya desde 2.0 a 5.0 m incrementando desde 0.5 m para las dimensiones x y y , además considerando que el perímetro es fijo, tenemos;
$2x+2y=14$ o bien $x+y=7$

x	y	$x+y$	**Producto** $f(x)=x\cdot y$ $f(x)=x(7-x)$ $f(x)=-x^2+7x$
2.0	**5.0**	**7**	**10.0**
2.5	**4.5**	**7**	**11.25**
3.0	**4.0**	**7**	**12.00**
3.5	**3.5**	**7**	**12.25**
4.0	**3.0**	**7**	**12.00**
4.5	**2.5**	**7**	**11.25**
5.0	**2.0**	**7**	**10.00**



a. la solución obtenida de manera numérica es: $x = 3.5$, $y = 3.5$.

b. En general tenemos que el perímetro $2x + 2y = 14$, es decir; $x + y = 7$, sustituyendo en $f(x) = x \cdot y = x(7 - x) = -x^2 + 7x$, la función es una parábola, llevándola a la forma: $f(x) = A(x-h)^2 + k$, se tiene que $f(x) = -(x-3.5)^2 + 3.5$ por lo que el vértice corresponde a un máximo localizado en $V(3.5, 3.5)$



2.

a. los números reales los podemos representar por x y por y, sumados resultan $x + y = 7$, y se busca que multiplicados den un valor máximo, por lo que $f(x) = x \cdot y = x(17 - x) = -x^2 + 17x$, llevándola a la forma: $f(x) = A(x-h)^2 + k$ o aprovechando la simetría de la curva: $x = \frac{17}{2} = 8.5$ y $y = f(x) = -x^2 + 17x = -(8.5)^2 + 17(8.5) = 72.25$

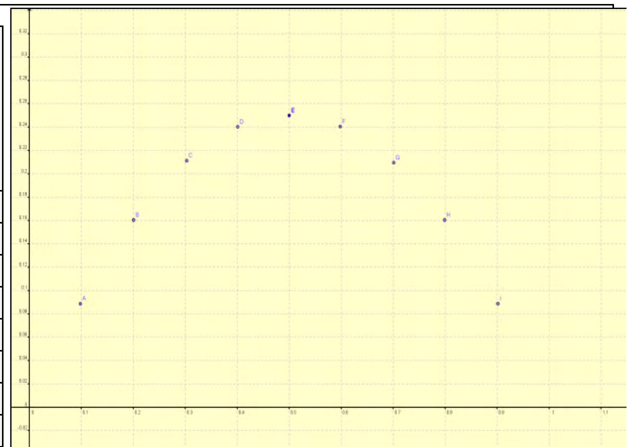
b. los dos números enteros podemos buscarlos con ayuda de una tabla.

x	y	$x+y$	Producto $f(x) = x \cdot y$ $f(x) = x(17-x)$ $f(x) = -x^2 + 17x$
1	16	17	16
2	15	17	30
3	14	17	42
4	13	17	52
5	12	17	60

6	11	17	66
7	10	17	70
8	9	17	72
9	8	17	72
10	7	17	70
11	6	17	66
12	5	17	60
13	4	17	52
14	3	17	42
15	2	17	30
16	1	17	16

c. los respectivos dominios y rangos de las funciones del inciso a y b son distintos.
3.
Nuevamente construimos una tabla de valores

x	y	$x+y$	Producto $f(x)=x\cdot y$ $f(x)=x(1-x)$ $f(x)=-x^2+x$
0.1	0.9	1	0.09
0.2	0.8	1	0.16
0.3	0.7	1	0.21
0.4	0.6	1	0.24
0.5	0.5	1	0.25
0.6	0.4	1	0.24
0.7	0.3	1	0.21
0.8	0.2	1	0.16
0.9	0.1	1	0.09



El máximo de la función se alcanza en $V(0.5,0.5)$.

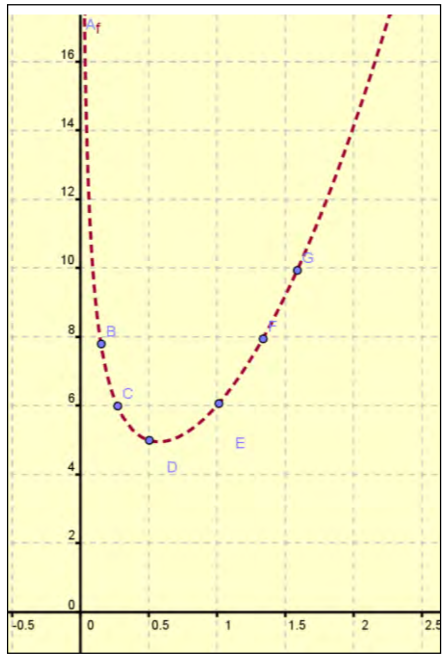
4. Consideremos que x, representa el número de vacas y y representa el número de borregos, el granjero puede comprar cuando mucho 80 animales con los 500,000 pesos. Para abreviar quitemos tres ceros, es decir una vaca cuesta 10, un borrego cuesta 3 y el granjero tiene 500 para comprar.

x	y	**Costo de la compra**	**venta**	**Ganancia**
0	80	(0)10+(80)3=240	(0)13+(80)5=400	400-240=160
1	79	(1)10+(79)3=247	(1)13+(79)5=408	408-247=161
2	78	(2)10+(78)3=254	(2)13+(78)5=416	416-254=162
3	77	(3)10+(77)3=261	(3)13+(77)5=424	424-261=163
4	76	(4)10+(76)3=268	(4)13+(76)5=432	432-268=164
5	75	(5)10+(75)3=275	(5)13+(75)5=440	440-275=165
10	70	$10(10)+3(70)=310$	$13(10)+5(70)=480$	480-310=170

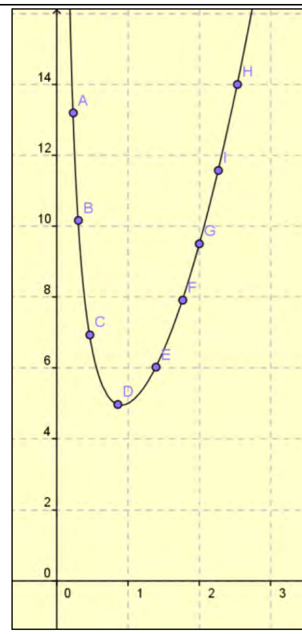
20	60	$10(20)+3(60)=380$	$13(20)+5(60)=560$	180
30	50	450	640	190
35	45	485	680	195
Para un valor arbitrario entre 1 y 80 n	$80-n$	$10n+3(80-n)=500$	$13n+5(80-n)=B$	$13n+5(80-n)-$ $\{10n+3(80-n)\}=$ $3n-2(80-n)=$ $5n-160=B-A$
		Le conviene comprar más borregos, son más baratos y proporcionan mayor ganancia		
47	3	(47)10+(3)3=479	(47)13+(3)5=626	626-479=147
48	2	(48)10+(2)3=486	(48)13+(2)5=634	634-486=148
49	1	(49)10+(1)3=493	(49)13+(1)5=642	642-493=149
50	0	(50)10+(0)3=500	(50)13+(0)5=650	650-500=150
51		Compra imposible		

5. la curva en realidad no es una parábola, se puede observar que tiene un mínimo pero carece de simetría, el dominio, de dicha función son valores mayores a cero (hasta infinito) y el rango toma valores desde de aproximadamente 5 hasta infinito.

x	y
0.15	7.79
0.27	5.98
0.50	4.99
1.01	6.05
1.34	7.95
1.59	9.93



x	y	$x+y$	Producto $f(x)=x\cdot y$ $f(x)=x(1-x)$ $f(x)=-x^2+x$
0.1	0.9	1	0.09
0.2	0.8	1	0.16
0.3	0.7	1	0.21
0.4	0.6	1	0.24
0.5	0.5	1	0.25
0.6	0.4	1	0.24
0.7	0.3	1	0.21
0.8	0.2	1	0.16
0.9	0.1	1	0.09



EVALUACION DE LA UNIDAD

INSTRUCCIONES: Selecciona la respuesta que consideres correcta y no olvides justificarla.

1.- ¿Cuál es la solución de la ecuación: $2x^2 - \frac{11}{2} = 0$?

$(a) x_1 = \frac{11}{2}$, $x_2 = \frac{11}{2}$ $(b) x_1 = \frac{11}{4}$, $x_2 = -\frac{11}{4}$ $(c) x_1 = 4$, $x_2 = -4$ $(d) x_1 = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{11}}{2}$ $(e) x_1 = \sqrt{11}$, $x_2 = -\sqrt{11}$

2.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática incompleta $10x^2+6x=0$?

$(a) x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{5}$ $(b) x_1 = 1$, $x_2 = 0$ $(c) x_1 = 10$, $x_2 = 3$ $(d) x_1 = 3$, $x_2 = 5$ (e) *no tiene solución*

3.- ¿Cuál es la factorización correspondiente a la ecuación $x^2-19x+34=0$?
a. (x-1)(x+2) b. (x-3)(x-4) c. (x-2)(x-17) d. (x-2)(x-16) e. No es factorizable.

4.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática $6x^2 + 10x - 4$

$(a) x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $(b) x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$ $(c) x_1 = 2$, $x_2 = 0$ $(d) x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$ $(e) x_1 = 2$, $x_2 = -1$

5.- Si se considera la ecuación $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} - 3 = 0$ ¿Cuál es la ecuación cuadrática correspondiente?
a. $x^2 - 19x + 34 = 0$ b. $9x^2 - 25x - 8 = 0$ c. $x^2 - 9x + 4 = 0$ d. $3x^2 + x - 3 = 0$
e. ninguna de las anteriores

6.- Las soluciones de la ecuación general de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$(a) x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $(b) x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$ $(c) x_1 = 0$, $x_2 = -1$

$(d) x_1 = \frac{bx + c}{a}$, $x_2 = x$ $(e) x_1 = \frac{c + ax^2}{b}$, $x_2 = 1$

7.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$?

$(a) x_1 = 1$, $x_2 = 3$ $(b) x_1 = -1$, $x_2 = -3$ $(c) x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $(d) x_1 = 3$, $x_2 = -1$ $(e) x_1 = 0$, $x_2 = 7$

8.- Una persona dispone de 64m. lineales de malla ciclónica para cercar un espacio donde se colocaran dos tigres. Si se desea que la cerca tenga forma de rectangulo. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el espacio cerrado para que los animales disfruten de la mayor cantidad de espacio?

(a) 16 y 16 (b) 22 y 16 (c) 24 y 8 (d) 26 y 6 (e) 28 y 4

9.- Si en el problema anterior llamamos "x" al ancho entonces ¿Cuál es la forma de expresar lo largo de la cerca (L) en función de su ancho (x)?

a. $L(x)=\dfrac{64-x}{2}$ b. $L(x)=\dfrac{64-x^2}{2}$ c. $L(x)=\dfrac{64-2x}{2}$ d. $L(x)=\dfrac{64-2x^2}{2}$ e. $L(x)=\dfrac{64-3x}{2}$

10.- Con los datos de la pregunta uno y considerando, que el ancho es x, ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área en función del ancho?

a. $x^2 + 32x$ b. **$-x^2 + 32x$** c. $x^2 - 32$ d. $-x^2 - 32$ e. $x + 32x^2$

11.- ¿Cuál es el punto más alto en la gráfica de la curva? A(x)= $\dfrac{64x-2x^2}{2}$

(a) (10,220) (b) (8,190) (c) (16,256) (d) (6,156) (e) (4,112)

12.- ¿Qué tipo de curva forma el dibujo de la gráfica de la función cuadrática $f(x)=ax^2$?

a. Parábola b. Elipse c. hipérbola d. Circunferencia e. Línea recta

13.- ¿Hacia dónde abre la siguiente función $f(x)=ax^2$, si a<0?

a. Arriba b. Abajo C, Izquierda d. Al centro e. Infinito

14.- ¿Cuál es el vértice de la función f(x) = $2x^2 - 3$?

(a) (0, -3) (b) (0, -4) (c) (0, -5) (d) (0, -6) (e) (0, -7)

15.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la función f(x) = $x^2 + 6x + 9$?

(a) (4, 0) (b) (5, 0) (c) (2, 0) (d) (1, 0) (e) (-3, 0)

16.-¿Cuántas unidades se traslada el vértice de la parábola f(x) = $-\frac{1}{2}(x+3)^2$ del origen hacia la izquierda?

(a) 5 unidades (b) 3 unidades (c) 4 unidades (d) 2 unidades (e) 0 unidades

17.- ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la función f(x) = $3x^2 - 12x +$ expresada de la forma f(x) = $a(x-h)^2 +$ c.

(a) $3(x+2)^2$ (b) $3(x+2)^2+1$ (c) $(x+2)^2+2$ (d) $3(x-2)^2+3$ (e) $3(x-2)^2+5$

18.- Es el valor máximo de la función? $f(x)=15x-\dfrac{7}{2}x^2$

a. 25/14 b. 20/14 c. 15/14 d. 10/14 e. 225/14

19.- ¿Cuáles son los valores de dos números positivos simbolizados como “x”, “y “que sumados den como resultado 70 y su producto sea máximo?

a. x=5, y=65 b. x=25, y=45 c. x=30, y=40 d. x=33, y=57 e. x=35, y=35

20.-¿A qué tasa de interés compuesto se debe invertir $2000 pesos para que estos se dupliquen en dos años?
a. 0.22251 b. 0.251201 c. 0.414214 d. 0.45000 e. 0.463812

21.- ¿A qué tasa de interés compuesto capitalizable mensualmente, se deben invertir 3000 pesos para que en 2 meses se tenga un capital de 3200 pesos?
a. .0405 b. .0503 c. .0328 d. .060 e. .095

22.- ¿Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 49m/s. ¿Cuál es la altura máxima “h” a la que puede llegar, y cuál es el tiempo que tarda caer (tiempo de vuelo “t”)?
a. h= 100m , t = 10s b. h = 145m, t = 10s c. h = 110m, t = 10s d. h = 123m, t = 10s e. h = 118m, t = 10s

23.- Un equipo de remeros puede viajar a una velocidad V, 16 Km río abajo. En ir y regresar tarda un total de seis horas, si se sabe que la velocidad de la corriente es de 2km/h. ¿Cuál es la velocidad con la que el equipo rema en aguas tranquilas?
a. v = 6km/h b. v = 5km/h c. v = 4km/h d. v = 3km/h e. v = 2km/h

24.- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - ax + 2bx - 2ab = 0$?
a. {a,b} b. {-a,b} c.{-a,-b} d.{a,-2b} e. {2,b}

25.- Se sabe que la base de un rectángulo mide 4 unidades más que el doble de su altura, considerando que el área del rectángulo es 448m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo
(a) altura = 14m base = 32m (b) altura = 15m base = 33m (c) altura = 16m base = 32m (d) altura = 17m base = 32m (e) altura base =32m

26.- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 3x + 1$?
a. V(1/4, 1/4) b. V(3/4, -2/16) c. V(-3/4, -2/16) d. V(-3/4, -2/16) e. V(1/2, -2/16)

SOLUCIONES DE LA EVALUACION DE LA UNIDAD:

Problema 1	d	Problema 11	c	Problema 21	c
Problema 2	a	Problema 12	a	Problema 22	b
Problema 3	c	Problema 13	b	Problema 23	a
Problema 4	b	Problema 14	a	Problema 24	d
Problema 5	a	Problema 15	e	Problema 25	a
Problema 6	a	Problema 16	e	Problema 26	b
Problema 7	a	Problema 17	e		
Problema 8	a	Problema 18	e		
Problema 9	c	Problema 19	e		
Problema 10	b	Problema 20	c		

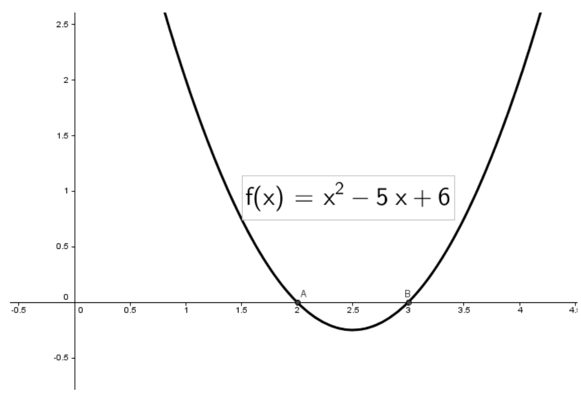
2.9 BIBLIOGRAFIA DE LA UNIDAD

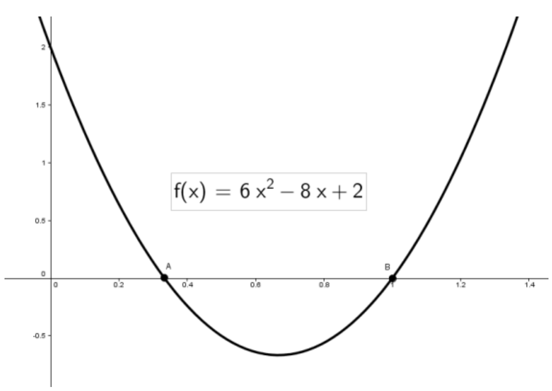
BIBLIOGRAFIA PARA EL ALUMNO
Barnett, R. A. (2007). Precálculo, Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría. Ciudad de México: Limusa Noriega Editores.
Barnett Rich. (2003). Algebra Elemental Teoría y Problemas. Ciudad de México: Mc Graw Hill Editores Serie Schaum.
Barnett R. A. (2003). Algebra y Trigonometría. Ciudad de México: Mc. Graw Hill
Britton J. R., y Bello, I. (2006). Álgebra y Trigonometría Contemporáneas. Ciudad de México: Editorial Harla.
Jhonson L. M., y Steffensen A. R. (2004) Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Ciudad de México: Editorial Trillas.
Swokowski y Cole (2008). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Ciudad de México: International Thomson Editores
BIBLIOGRAFIA PARA PROFESOR
Kurosch A.G.(2017). Algebra Superior, capítulos I, II y III. Ciudad de México: Editorial MIR Moscú
Raggi, Cárdenas, Lluis, Tómas (2012). Algebra Superior .Ciudad de México: Editorial Trillas
Ayres Frank (2003). Algebra Moderna. Ciudad de México: Editorial McGraw Hill Serie Schaum,

Apéndice 1

SESIÓN 3: MÉTODO GRÁFICO

Finalmente es importante tratar un método que se basa en la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que como sabemos nos genera una parábola





1. En particular elaboraremos la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ cuadrática que nos genera la siguiente parábola.

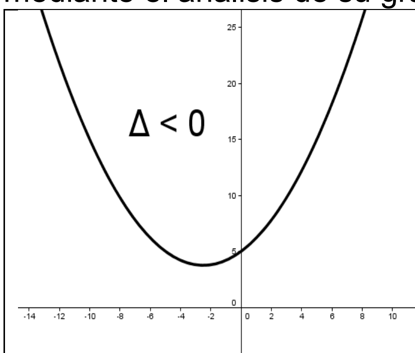
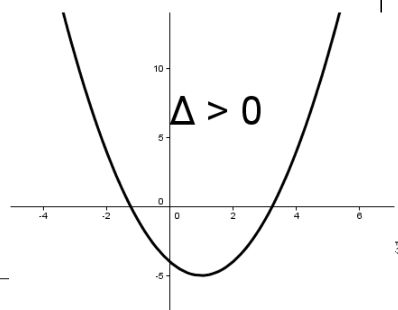
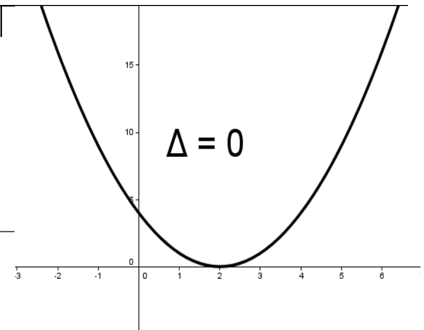
Si observamos los puntos donde la curva corta al eje X encontramos que $x \approx 2$ y $x \approx 3$

Que corresponden a la solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ como ya fue resuelto anteriormente.

2. Otro caso es la siguiente ecuación: $6x^2 - 8x + 2 = 0$ Que para resolverla gráficamente primero elaboramos la grafica de la función cuadrática $f(x) = 6x^2 - 8x + 2$ y tenemos lo siguiente:

Que viendo la gráfica y observando donde corta la curva al eje horizontal se ve que los valores de estos puntos A y B son aproximadamente $x_1 \approx 0.33 \quad y \quad x_2 \approx 1.0$ solución que se puede corroborar al resolver la ecuación por alguno de los métodos vistos anteriormente

La naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado se puede observar mediante el análisis de su gráfica y su relación con el valor del discriminante Δ

		
La grafica no toca el eje X y por lo tanto no tiene soluciones reales, solo imaginarias.	La grafica toca en dos puntos al eje X y tiene dos raíces reales y diferentes	La grafica toca en un solo punto al eje X(tangente) y tiene una sola solución real o solución doble

Nota. Las parábolas también pueden abrir hacia abajo, es decir tienen un máximo, el discriminante muestra pero son también tres situaciones equivalentes a los casos anteriores.

Apéndice 2 La ecuación bicuadrada:

Una ecuación bicuadrada tiene la siguiente estructura; $ax^4 + bx^2 + c = 0$ .Para su resolución se realiza el **cambio de variable:** $y = x^2$ quedando la ecuación $ay^2 + by + c = 0$, Se resuelve la ecuación de segundo grado obteniéndose dos soluciones; y_1, y_2, luego deshacemos el cambio; $y = x^2$ para determinar las soluciones de x . Por ejemplo; $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; introduciendo el cambio de variable: $y = x^2$, quedaría en la forma: $y^2 - 5y + 4 = 0$. Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \text{ teniendo como soluciones:}$$

$y_1 = 4$ y $y_1 = 1$, invirtiendo el proceso del cambio de variable: $x = \pm 2$ y $x = \pm 1$; las posibles soluciones son $S = \{(-2,4),(2,4),(1,1),(-1,1)\}$.

UNIDAD 3
Elementos básicos de geometría plana

PROPÓSITO:
Al finalizar, el alumno:

Al finalizar, el alumno: Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

.

Tiempo Estimado: 25 horas.

1.0 PRESENTACIÓN

En esta parte de la Guía de Profesor de matemáticas II, se abordan los aprendizajes de la unidad I de Matemáticas II señalados por el Programa de estudios, plan 2016: Los aprendizajes que debe lograr el alumno, los contenidos de la unidad y el cómo abordarlos a través de estrategias de aprendizaje; en particular el uso de la resolución de problemas y la metodología de Polya. Se proporcionan recomendaciones acerca del nivel de tratamiento de la docencia a nivel bachillerato, el sentido de la Unidad y Conexiones de las **Elementos básicos de geometría plana** con otros temas del mismo semestres posteriores y anteriores, el tiempo disponible que es de veinticinco horas para lograr estos propósitos.

Las estrategias que se proporcionan en esta unidad son las más recomendables de acuerdo al programa de estudios vigente, para abordar cada uno de los aprendizajes, guiando al profesor para que este logre realizar su docencia abordando los principios del CCH de aprender a aprender, aprender haciendo y aprender a ser.

En cuanto a las actividades de enseñanza aprendizaje se busca que el alumno Profundice, en el conocimiento de los **Elementos básicos de geometría plana**, a través del planteamiento y resolución de problemas. La Geometría Euclidiana, ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades; contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, explora, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establecen relaciones entre ellas por la vía deductiva, sin llegar a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

El Material de esta unidad busca que el estudiante Reafirme estrategias generales también sepa comprobar sus soluciones, y determinar si el proceso seguido es correcto o incorrecto.
Posteriormente este material buscará enfrentar al alumno con problemas de aplicación que le ayuden a modelar problemas reales que abren una panorámica mayor sobre la matemática y en especial de la ecuación cuadrática.

Finalmente se proporciona una propuesta de evaluación de la Unidad con su respectiva Bibliografía tanto Básica como Complementaria.

1.2 LOS APRENDIZAJES, LA TEMÁTICA Y LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDOS POR EL PROGRAMA DE ESTUDIOS.

1.2.1 LOS APRENDIZAJES

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Conoce el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización
- Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa en forma verbal y escrita.
- Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz.
- Clasifica los ángulos por su medida y su relación con otros.
- Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.
- Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.
- Aplica los conceptos anteriores en la resolución de problemas.
- Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos.
- Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.
- Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo:
- Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.
- Distingue las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo.
- Determina geométricamente la distancia de un punto a una recta.
- Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles.
- Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares).
- Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.
- Calcula el perímetro y área de un polígono regular.

- Identifica las líneas notables de la circunferencia.
- Localiza el centro de una circunferencia.
- Aproxima el perímetro y área del círculo.
- Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.
- Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.

1.2.2 LA TEMÁTICA

1. Bosquejo histórico de la Geometría.

2. Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.

3. Construcciones con regla y compás.
• Segmentos. • Ángulos. • Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: -Que pertenece a ella o fuera de ella. • Mediatriz de un segmento. • Bisectriz de un ángulo. • Recta paralela a otra que pasa por un punto dado • Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano). • Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice)

4. Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes..

5. Postulado de las rectas paralelas y su inverso.

6. Problemas de aplicación.
7. Geometría del triángulo
Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo). Desigualdad del triángulo. Propiedades del triángulo: • Suma de los ángulos interiores es igual a 180°. • Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°. • Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente. Problemas de aplicación. Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura. • Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro. • Construcción de las rectas y puntos notables. . Distancia de un punto a una recta.
8. Propiedades del triángulo isósceles: • Los ángulos adyacentes a la base son iguales. • La altura y la mediana de la base coinciden. • La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

8. Polígonos

Polígonos regulares e irregulares. Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores. Número de triángulos que se forman al interior del polígono. •

Perímetro y área. • Fórmula de Herón. • Rectas y segmentos. • Localización del centro de una circunferencia. • Perímetro y área del círculo. Problemas de aplicación.

1.2.3. LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS

- Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas. El profesor propondrá usar el software de geometría dinámica para que el alumno visualice, descubra y/o conjeture propiedades y características de figuras geométricas.
- El profesor inicia con una revisión del origen de la Geometría Euclidiana y la forma como se sistematiza este conocimiento.
- El profesor orienta al alumno a que establezca propiedades y características de figuras geométricas, a través de construcciones con regla y compás.
- El profesor define los tipos de ángulos y solicita a los alumnos que los identifiquen, en casos concretos.
- El profesor define los ángulos formados por dos rectas cortadas por una transversal y pide a los alumnos que los identifiquen en figuras concretas.
- El profesor pide a sus alumnos que usen un software dinámico para que verifiquen que en el caso de tener rectas paralelas, los ángulos alternos internos son congruentes. Posteriormente, se les solicita que muestren que los ángulos correspondientes y los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Para el inverso, se propone que el profesor parta de dos rectas no paralelas cortadas por una transversal y utilizando el software dinámico, proponga que el alumno modifique la posición de una recta, hasta que los ángulos alternos internos sean congruentes y observe que las rectas resultan paralelas.
- El profesor propone a discusión la resolución de problemas geométricos, algebraicos y numéricos.
- El profesor propone las definiciones de estas clasificaciones y plantea a sus alumnos actividades de identificación y construcción.
- El profesor propone ejercicios dando tres segmentos de recta, para que el estudiante construya los triángulos correspondientes y descubra cuando no es posible.
- El profesor utiliza material concreto (recorte y doblado de papel), para mostrar alguna propiedad del triángulo. El alumno muestra las otras.
- El profesor propone a discusión la resolución de problemas geométricos, algebraicos y numéricos.
- El profesor define las rectas y puntos notables y solicita a sus alumnos actividades de identificación y construcción argumentando sobre la validez de

las construcciones realizadas y las explique de forma oral y escrita. Hace notar a los alumnos, que algunos puntos notables de un triángulo, están alineados.

- Dada una recta y un punto fuera de ella, el profesor propone para trabajo grupal, se dibuje el segmento que representa la distancia de ese punto a la recta. Genere la discusión sobre la importancia de la noción de perpendicularidad en este tema.
- El profesor utilice material concreto (recorte y doblado de papel), para mostrar alguna propiedad del triángulo isósceles y propone al alumno que muestre las otras. Además, propone problemas donde se apliquen las propiedades del triángulo isósceles. Sugiere al alumno apoyarse en construcciones de figuras que permitan visualizar las propiedades que se quieren demostrar. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida. El profesor, durante la discusión, resalta la diferencia entre mostrar y demostrar; así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos.
- El profesor propone a los alumnos una investigación sobre los polígonos regulares e irregulares y su clasificación. Posteriormente se plantean actividades de clasificación de diversos polígonos.
- El profesor oriente para que el alumno encuentre la expresión general para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n–lados, mediante la propiedad de suma de los ángulos interiores de un triángulo. • El profesor proporciona los recursos trigonométricos necesarios para calcular el perímetro y área de un polígono regular. El profesor propone al alumno investigar la obtención de áreas de polígonos irregulares utilizando la fórmula de Herón,
- El profesor oriente y conduce al alumno para la obtención aproximada del perímetro y área del círculo, mediante polígonos regulares inscritos, haciendo uso de un software dinámico.
- El profesor propone problemas de aplicación y sugiere que los alumnos los resuelvan en parejas, aplicando las estrategias sugeridas por Polya.

5.3 SENTIDO DE LA UNIDAD V “ECUACIONES CUADRÁTICAS”

El propósito fundamental en el tratamiento y presentación de esta Unidad 3 Elementos básicos de geometría plana.de la asignatura de matemáticas II, está orientada a satisfacer los requisitos institucionales del programa actualizado de matemáticas II; buscando que el estudiante , a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno: Adquiera la capacidad para resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado, percibiendo que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno. Identificando las relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas e infiera algunas conexiones entre resultados, valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico

También se busca que tanto el profesor que imparta esta asignatura y el alumno que la estudie puedan contar con un material que se adecue al programa de estudios y a las necesidades dentro y fuera del aula, ya que la Guía de profesor ofrece una gran variedad de problemas y ejercicios resueltos y propuestos y garantiza que les permitirá alcanzar los objetivos de la unidad. Permitiendo también que el estudioso de estos temas cuente con un material que se ajusta al programa actual del curso (plan de estudios 2016).

5.4 CONEXIÓN CON OTRAS UNIDADES DE OTRAS ASIGNATURAS.

La unidad 3 “Elementos básicos de geometría plana.” de la asignatura de matemáticas II, tiene necesariamente antecedentes y consecuentes que es necesario establecer.

Matemáticas I
Sin conexión aparente. Sin embargo históricamente en la civilización griega se estableció un puente entre la aritmética y la geometría. La Unidad 1 I: El significado de los números y sus operaciones básicas corresponde a la Aritmética.

Matemáticas II
La unidad 3, Elementos básicos de geometría plana, se relaciona directamente con la Unidad 4 Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras, del mismo programa., siendo ésta última la consecuente de esta unidad.

Matemáticas III
Se prosigue el estudio de la geometría, en particular la representación geométrica de un lugar geométrico, tales como altura, bisectriz. También en la deducción de las ecuación de la parábola; la ecuación de la circunferencia y la de la elipse, al usarse el concepto de rectas, e igualdad de longitud de segmentos de recta, en las unidades de 4 y 5 de dicho programa de estudios. Se aplica la geometría para deducir las ecuaciones de estos lugares geométricos.

Matemáticas IV
Sin conexión aparente. Sin embargo es necesario el manejo de conversiones de ángulos a Radianes al tabular y graficar funciones en la Unidad IV: Funciones trigonométricas.

Calculo Diferencial e Integral I
En los temas de Límites, y derivadas de funciones trigonométricas, al hablar del concepto de ángulo.

Calculo diferencial e integral II.
En la solución de integrales sencillas que involucran el uso de un esquema geométrico o un dibujo (heurística) calcular áreas.

Estadística y probabilidad I y Estadística y probabilidad II
En apariencia pareciera que no existe ninguna conexión específica con alguno de los temas, sin embargo es indudable que para logro de los aprendizajes de los conocimientos en estas asignaturas por parte de nuestros estudiantes, se requiere para su comprensión de los conocimientos aritméticos y algebraicos, y geométricos en particular en la deducción de la Moda para datos agrupados, la construcción de grafica de barras (en particular en el cálculo de la media aritmética de datos agrupados, que requieren la obtención de las marcas de clase) y ojivas y aunque de manera indirecta es útil en el razonamiento y aplicación del proceso de prueba de hipótesis. Esto último por el tipo de argumentación hipótesis – contrastación y conclusión.

5.5 NIVEL DE TRATAMIENTO

El tratamiento de los temas que se abordan en este material son de un nivel básico; ya que se entiende que el alumno esta poco familiarizado con este tema y aunque lo estudia en la enseñanza secundaria, lo cierto es que lo más probable su tratamiento haya sido deficiente para la mayoría de los alumnos.

Se introduce cada tema con ejemplos y problemas muy sencillos y variados con la finalidad de ir introduciendo los conceptos de geometría plana euclidiana, para que el profesor pueda contar con ejemplos variados que le sirvan como orientación en la planeación, desarrollo de su clase, y realice la evaluación de aprendizajes.

5.6 OBSTÁCULOS PREVISIBLES

Debemos estar conscientes en la dificultad para alcanzar todos los objetivos de la Unidad 3, de la asignatura de matemáticas II, es de esperarse que los alumnos tenga una serie de deficiencias conceptuales y operativas. Por otra parte tenemos que tener presente que tenemos por lo general 25 alumnos en el salón de clase y cada uno es distinto en la forma que aprenden.

Por otra parte la falta de conocimientos y/o deficiencia de ellos determinara el éxito para abordar esta unidad. Sabemos que muchos alumnos que están inscritos en el segundo semestre no siempre tienen los antecedentes académicos necesarios para el buen desempeño en el aprendizaje de los temas y conceptos de matemáticas I, o que muchos de ellos ya no recuerdan, o bien han olvidado varios de los conceptos de geometría vistos en niveles anteriores(secundaria). Por dicha razón siempre es necesario considerar los antecedentes para abordar un nuevo aprendizaje, a veces será necesario revisar y repasar un tema, de manera rápida, antes de retomar el nuevo aprendizaje.

Otro obstáculo que se puede presentar es la falta de tiempo en el calendario de estudios ya que este tema es la última unidad del primer semestre y por consiguiente no se alcanzan a cubrir todos los temas de esta unidad.

Todas estas situaciones comentadas son salvables siempre y cuando el profesor realice una planeación de su docencia, tomando en cuenta los aprendizajes, la temática y la metodología para abordarlo (estrategias de aprendizaje), así como también los tiempos disponibles para lograr los objetivos. Si el profesor toma en cuenta el material didáctico dentro de su planeación, la cual presentamos como Guía de Profesor de matemáticas II. De esta forma ante tales contingencias se pueden realizar los ajustes necesarios para lograr los aprendizajes sugeridos por el programa de estudios (Plan 2016), en los tiempos disponibles.

5.7 SESIONES DIDACTICAS.
Usando las secuencias didácticas, de la Guía.

En el programa de matemáticas II se abordan los conceptos que no son nuevos para los alumnos del CCH. Como son conceptos de geometría plana euclidiana.

Si bien es cierto que el alumno en la enseñanza media básica trabajo y aplicó estos temas, éste los manejo de manera superficial y tangencial, sin realizar un análisis concreto. Ahora nos proponemos expandir y profundizar estos conceptos. Dándole un carácter no solo de aplicaciones prácticas, sino fundamentalmente como una rama de las matemáticas que tienen una estructura y fundamentos sólidos en el campo de esta ciencia. Ver y analizar los conceptos Elementos básicos de geometría plana. Como una unidad sólida, útil y con bases matemáticas que le permitirán al alumno abordar una gran cantidad de problemas donde se involucran este tipo de problemas, las cuales trascenderán a otras más complejas, en los siguientes cursos no solo en las matemáticas que se imparten en el colegio a nivel Bachillerato, sino a otros niveles de las matemáticas que pudiera hallar en los niveles de licenciatura.

En esta unidad se toma en cuenta que el alumno tiene familiaridad con los conceptos e ideas de: línea, triangulo, polígono, perímetro y área, así como las clasificaciones correspondientes para diversos tipos de triángulos y polígonos.

En la Unidad cuyo las Elementos básicos de geometría plana. El alumno tendrá la oportunidad de comprender y darse cuenta de que existen métodos y procedimientos eficaces que le permiten abordar y resolver una gran cantidad de problemas donde se vean involucrados los conceptos de perímetro, área, y aunque no se exige en el presente programa de esta asignatura, ampliarlo al concepto de volumen.

En esta unidad temática se busca desarrollar en el estudiante de habilidades para el manejo de estrategias generales y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema tales como:

- incrementar su capacidad de resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado.
- Percibir que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno.
- Que pueda Identificar relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiera algunas conexiones entre resultados.
- Que Valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico.
- Que Aplique conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana para resolver problemas.

5.7.1 SESIONES.

A través de las "secuencias didácticas" de la Guía de profesor de matemáticas II

UNIDAD 3

Elementos básicos de geometría plana

Contenido Temático:	**página**
1.1 1. Bosquejo histórico de la Geometría. Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera	
1.2 Construcciones con regla y compás. **Segmentos. • Ángulos. • Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: - Que pertenece a ella o fuera de ella. • Mediatriz de un segmento. • Bisectriz de un ángulo. • Recta paralela a otra que pasa por un punto dado • Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano). • Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice). Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes.**	
***1.3.* Postulado de las rectas paralelas y su inverso. Problemas de aplicación. Geometría del triángulo.**	
***1.4.* Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo). Desigualdad del triángulo. Propiedades del triángulo: • Suma de los ángulos interiores es igual a 180°. • Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°. • Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente. Problemas de aplicación. Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura. • Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro. • Construcción de las**	

rectas y puntos notables. . Distancia de un punto a una recta.	
1.5. **Propiedades del triángulo isósceles: • Los ángulos adyacentes a la base son iguales. • La altura y la mediana de la base coinciden. • La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.**	
1.6. **Polígonos regulares e irregulares. Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores. Número de triángulos que se forman al interior del polígono. • Perímetro y área. • Fórmula de Herón. • Rectas y segmentos. • Localización del centro de una circunferencia. • Perímetro y área del círculo. Problemas de aplicación.**	

Introducción.

La palabra geometría es una palabra compuesta por dos vocablos de origen griego según la etimología; *geō* (tierra) y *metrón* (medir). Lo que podría significar literalmente algo como; la medida de la tierra. La geometría es una rama de las matemáticas que trata de **las propiedades y medida del espacio o del plano**, fundamentalmente, su utilidad práctica consistía en resolver problemas de medición, Por ejemplo calcular longitudes, áreas o volúmenes, en figuras dibujadas en un plano.

La Geometría, que originalmente surge, de la observación de las características que nos rodean. En particular del análisis de los objetos d nuestro entorno, las "Formas de las Cosas", realizando una síntesis o idea producto de la abstracción para simbolizarla o representarla , en nuestro caso como una figura dibujada en un plano, para posteriormente realizar una medición de cada una de sus características y cualidades.

La idea de figura dibujada en un plano es una abstracción de un objeto real, despojado de su extensión espacial, bajo esta consideración de que; el espacio tiene tres dimensiones, una superficie solo dos, una recta una dimensión y un punto carece de dimensiones. La geometría solo se ocupa solo de la medición de la forma de un objeto independientemente de las demás propiedades intrínsecas (composición química, densidad, etc.).

La utilidad práctica de la geometría es muy variada variedad, desde la muy conocida aplicación en la Arquitectura: Diseños Industriales, la creación de Dibujos Artísticos, considerando variados conceptos relacionados de Composición y Perspectiva, por ejemplo el efecto de profundidad en una pintura de Rembrandt, así como también del manejo de los recursos artísticos para lograr un diseño lo más realista posible, mejorando la representación de la realidad en el papel, tela etc. Por ejemplo en los diseños de ***(teselado de pisos y ropa)*** en donde se muestran armonías y complejidades en las composiciones.

Otra área de aplicación quizá desconocida por algunas personas, se presenta en la llamada "cristalografía", la cual estudia los posibles patrones geométricos de la estructura (arreglo) de localización de los electrones de un compuesto químico, perteneciente al área de conocimiento de la física-química que se conoce como "Física del Estado-Sólido".

El propósito principal de esta unidad es que al finalizar el alumno, sea capaz de

describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades; y que estos conomientos contribuyan de manera significativa a favor de un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, explore, identifique propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construya y proporcione argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establezca las relaciones entre ellas por la vía deductiva, sin buscar un rigor axiomático propio de estudios más especializados. En consecuencia, en la unidad "Elementos básicos de Geometría plana", se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar. Esta unidad está comprendida en el eje temático Eje 2: Geometría Euclidiana. El tiempo destinado a cubrir estos objetivos de aprendizaje es de 25 horas

Geometría, que originalmente surgió, como toda ciencia se propone, de la

Referencias:

Definista.(Marzo 7, 2015). Definición de Geometría. 25 de agosto 2018, de Venemedia. Sitio web: https://conceptodefinicion.de/geometria/

Geometría. Sitio: Importancia.org. Fecha: 01/04/2013. Autor: Editorial. URL: https://www.importancia.org/geometria.php

Unidad 3. Elementos básicos de geometría plana

Propósito:

Al finalizar la unidad, el alumnado comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

Tiempo:

25 horas

Temática

Bosquejo histórico de la Geometría.

Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.

Construcciones con regla y compás

Segmentos.

Ángulos.

Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: Qué pertenece a ella o fuera de ella.

Mediatriz de un segmento.

Bisectriz de un ángulo.

Recta paralela a otra que pasa por un punto dado.

Ángulos

Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano).

Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).

Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes.

Postulado de las rectas paralelas y su inverso

Problemas de aplicación.

Geometría del triángulo

Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo).

Desigualdad del triángulo.

Propiedades del triángulo: Suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.

Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente.

Problemas de aplicación.

Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura.

Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.

Construcción de las rectas y puntos notables.

Distancia de un punto a una recta.

Propiedades del triángulo isósceles.

Los ángulos adyacentes a la base son iguales.

La altura y la mediana de la base coinciden.

La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

Polígonos

Polígonos regulares e irregulares

Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores.

Número de triángulos que se forman al interior del polígono.

Perímetro y área.

Fórmula de Herón.

Círculo y circunferencia

Rectas y segmentos.

Localización del centro de una circunferencia.

Perímetro y área del círculo.

Problemas de aplicación.

Desarrollo:

Bosquejo histórico de la Geometría.

Historia de la geometría

La **geometría** es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente, constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. En el antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de Heródoto, Estrabón y Diodoro Sículo, Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos: la geometría euclidiana descrita en *Los Elementos*.

La Geometría como una de las Artes Liberales y Euclides.

La geometría en Babilonia

La Civilización Babilónica se les atribuye la invención de la rueda, es por eso que además se les otorga su contribución a la investigación de la longitud de las circunferencias en relación con su diámetro, siendo este el número 3, este descubrimiento permitió a los Babilónicos considerar que la longitud de las circunferencias era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscrito y circunscrito en una circunferencia. Mediante el uso de la astronomía, ya que el año se dividía 360 días establecieron que la circunferencia se dividía en 360 partes, obteniendo el grado sexagesimal. Se les atribuye el conocimiento de cómo trazar un hexágono regular inscrito, además de hallar el área del trapecio rectángulo

La geometría en el Antiguo Egipto

Papiro de Ahmes.

Geometría en el Antiguo Egipto

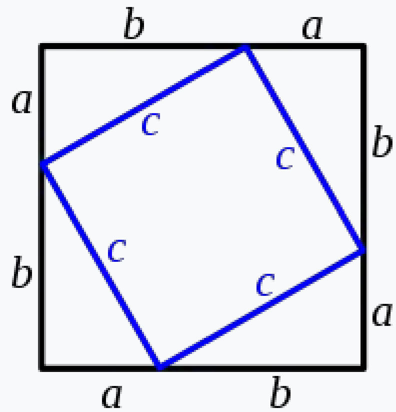
Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco ciertos conocimientos geométricos de carácter eminentemente práctico. La geometría en el antiguo Egipto estaba muy desarrollada, como admitieron Heródoto, Estrabón y Diodoro, que aceptaban que los egipcios habían "inventado" la geometría y la habían enseñado a los griegos; aunque lo único que ha perdurado son algunas fórmulas –o, mejor dicho, algoritmos expresados en forma de "receta"– para calcular volúmenes, áreas y longitudes, cuya finalidad era práctica. Con ellas se pretendía, por ejemplo, calcular la dimensión de las parcelas de tierra, para reconstruirlas después de las inundaciones anuales. De allí el nombre *γεωμετρία*, *geometría*: "medición de la tierra" (de γῆ (gê) 'tierra' más μετρία (metría), 'medición').

Los denominados Papiro de Ahmes y Papiro de Moscú muestran conjuntos de métodos prácticos para obtener diversas áreas y volúmenes, destinados al aprendizaje de escribas. Es discutible si estos documentos implican profundos conocimientos o representan en cambio todo el conocimiento que los antiguos egipcios tenían sobre la geometría.

Los historiadores antiguos nos relataron que el conocimiento de esta civilización sobre geometría –así como los de las culturas mesopotámicas– pasó íntegramente a la cultura griega a través de Tales de Mileto, los pitagóricos y, esencialmente, de Euclides.

La Geometría griega

La Geometría griega antes de Euclides



La primera demostración del teorema de Pitágoras Probablemente usó un diagrama como el que se muestra.

La Geometría Griega fue la primera en ser formal. Parte de los conocimientos concretos y prácticos de tesis. La veracidad de la tesis dependerá de la validez del razonamiento con el que se ha extraído (esto será estudiado por Aristóteles al crear la Lógica) y de la veracidad de las hipótesis. Pero entonces debemos partir de hipótesis ciertas para poder afirmar con rotundidad la tesis. Para poder determinar la veracidad de las hipótesis, habrá que considerar cada una como tesis de otro razonamiento, cuyas hipótesis deberemos también comprobar. Se entra aparentemente en un proceso sin fin en el que, indefinidamente, las hipótesis se convierten en tesis a probar.

Euclides y *Los elementos*

Fragmento de uno de los Papiros de Oxirrinco con unas líneas de *Los elementos* de Euclides.

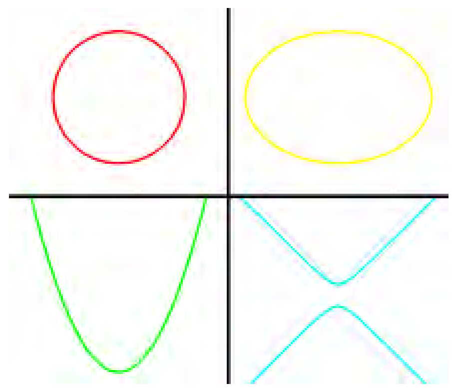
Euclides, vinculado al Museo de Alejandría y a su Biblioteca, zanja la cuestión al proponer un sistema de estudio en el que se da por sentado la veracidad de ciertas proposiciones por ser intuitivamente claras, y deducir de ellas todos los demás resultados. Su sistema se sintetiza en su obra cumbre, *Los elementos*, modelo de sistema axiomático-deductivo. Sobre tan sólo cinco postulados y las definiciones que precisa construye toda la Geometría y la Aritmética conocidas hasta el momento. Su obra, en trece volúmenes, perdurará como única verdad geométrica hasta entrado el siglo XIX.

Entre los postulados en los que Euclides se apoya hay uno (el quinto postulado) que trae problemas desde el principio. No se ponía en duda su veracidad, pero tal y como aparece expresado en la obra, muchos consideran que seguramente podía deducirse del resto de postulados. Durante los siguientes siglos, uno de los principales problemas de la Geometría será determinar si el V postulado es o no independiente de los otros cuatro, es decir, si es necesario considerarlo como un postulado o es un teorema, es decir, puede deducirse de los otros, y por lo tanto colocarse entre el resto de resultados de la obra.

Después de Euclides

Euclides casi cierra definitivamente la geometría griega –y por extensión la del mundo antiguo–, a excepción de las figuras de Arquímedes y Apolonio de Perge.

Arquímedes analizó exhaustivamente las secciones cónicas, e introdujo en geometría otras curvas como la espiral que lleva su nombre, aparte de su famoso cálculo del volumen de la esfera, basado en los del cilindro y el cono.



Esquema de las tres secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola(más la circunferencia).

Apolonio trabajó en varias construcciones de tangencias entre círculos, así como en secciones cónicas y otras curvas.

Los tres problemas geométricos de la Antigüedad

La geometría griega era incapaz de resolver tres famosos problemas geométricos (que heredarán los matemáticos posteriores), puesto que debían ser resueltos utilizando únicamente la regla y compás «ideales», únicos instrumentos válidos en la geometría griega. Estos tres problemas son los siguientes:

La duplicación del cubo

Cuenta la leyenda que una terrible peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Una embajada de la ciudad fue al oráculo de Delfos, consagrado a Apolo, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al Oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Prontamente, los atenienses construyeron un altar cúbico cuyos lados eran el doble de las del altar de Delos, pero la peste no cesó, se volvió más mortífera. Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino ocho veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su lado $(2l)^3=8l^3$. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos (no así la enfermedad).

La trisección del ángulo

La cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo consiste en tratar de obtener un cuadrado cuya área mida exactamente lo mismo que el área de un círculo dado. Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda. Fue apresado por explicar diversos fenómenos que los griegos atribuían a los dioses. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés David Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía suficientes conocimientos matemáticos, y nunca aceptó que sus métodos no funcionaban.

La Geometría en la Edad Media

Durante los siguientes siglos la Matemática comienza nuevos caminos de la mano de hindúes y árabes en Trigonometría y Álgebra (el uso de la notación posicional y del cero), aunque relacionadas con la Astronomía y la Astrología; pero en geometría apenas hay nuevas aportaciones. En Occidente, a pesar de que la Geometría es una de las siete Artes liberales (encuadrada en el Quadrivium), las escuelas y universidades se limitan a enseñar los "Elementos", y no hay aportaciones.

La Geometría Proyectiva

Es en el Renacimiento cuando las nuevas necesidades de representación del arte y de la técnica empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos instrumentos que les permitan representar la realidad. Aquí se enmarca la figura del matemático y arquitecto Luca Pacioli, de Leonardo da Vinci, de Alberto

Durero, de Leone Battista Alberti, de Piero della Francesca, por citar sólo algunos. Todos ellos, al descubrir la perspectiva y la sección, crean la necesidad de sentar las bases formales en la que cimentar las nuevas formas de Geometría que ésta implica: la Geometría proyectiva, cuyos principios fundamentales aparecen de la mano de Desargues en el siglo XVII. Esta nueva geometría de Desargues fue estudiada ampliamante ya por Pascal o por de la Hire, pero debido al interés suscitado por la Geometría Cartesiana y sus métodos, no alcanzó tanta difusión como merecía hasta la llegada a principios del siglo XIX de Gaspard Monge en primer lugar y sobre todo de Poncelet.

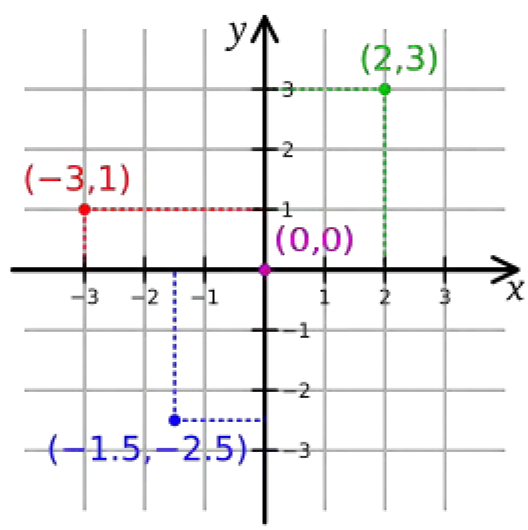
La Geometría Cartesiana

René Descartes.

Pero es sin duda la aparición de la geometría analítica lo que marca la Geometría en la Edad Moderna. Descartes propone un nuevo método de resolver problemas geométricos, y por extensión, de investigar en geometría.

El nuevo método analiza la geometría utilizando ecuaciones algebraicas. Se cambia la regla y compás clásicos por expresiones numéricas que se pueden representar mediante coordenadas cartesianas. Utilizando notación actual, dicho método se expresa así:

En un plano se trazan dos rectas perpendiculares (ejes) –que por convenio se trazan de manera que una de ellas sea horizontal y la otra vertical–, y cada punto del plano queda unívocamente determinado por las distancias de dicho punto a cada uno de los ejes, siempre y cuando se dé también un criterio para determinar sobre qué semiplano determinado por cada una de las rectas hay que tomar esa distancia, criterio que viene dado por un signo. Ese par de números, las coordenadas, quedará representado por un par



ordenado , siendo la distancia a uno de los ejes (por convenio será

la distancia al eje vertical) e la distancia al otro eje (al horizontal).

En la coordenada , el signo positivo (que suele omitirse) significa que la distancia se toma hacia la derecha del eje vertical (**eje de ordenadas**), y el signo negativo (nunca se omite) indica que la distancia se toma hacia la

izquierda. Para la coordenada , el signo positivo (también se suele omitir) indica que la distancia se toma hacia arriba del eje horizontal (**eje de abscisas**), tomándose hacia abajo si el signo es negativo (tampoco se

omite nunca en este caso). A la coordenada se la suele

denominar *abscisa* del punto, mientras que a la se la denomina *ordenada* del punto.

Ejes coordenados.

Existe una cierta controversia (aun hoy) sobre la verdadera paternidad de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como "Geometría Analítica", apéndice al "Discurso del Método", de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes. Aunque Omar Khayyam ya en el siglo XI utilizara un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuviera acceso a su obra.

Lo novedoso de la Geometría Analítica (como también se conoce a este método) es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas

del tipo , donde representa una función. En particular, las rectas

pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 (v.g.:) y las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de

grado 2 (v.g.: la circunferencia , la hipérbola). Esto convertía toda la Geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados 1 y 2. Desde un punto de vista formal (aunque ellos aún lo sabían), los geómetras de esta época han encontrado una relación fundamental entre la estructura lógica que usaban los geómetras griegos (el plano, la regla, el compás...) y la estructura algebraica del ideal formado

por los polinomios de grados 0, 1 y 2 del Anillo de polinomios , resultando que ambas estructuras son equivalentes. Este hecho fundamental (no visto con nitidez hasta el desarrollo del Álgebra

Moderna y de la Lógica Matemática entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX) resulta fundamental para entender por qué la Geometría de los griegos puede desprenderse de sus axiomas y estudiarse directamente usando la axiomática de Zermelo-Fraenkel, como el resto de la Matemática.

El método original de Descartes no es exactamente el que se acaba de explicar. Descartes utiliza solamente el eje de abscisas, calculando el valor de la segunda componente del punto mediante la ecuación de la curva, dándole valores a la magnitud . Por otro lado, Descartes sólo considera valores positivos de las cantidades e , dado que en la época aun resultaban "sospechosos" los números negativos. Como consecuencia, en sus estudios existen ciertas anomalías y aparecen curvas sesgadas. Con el tiempo se aceptaron las modificaciones que muestran el método tal y como lo conocemos hoy en día.

La evolución de la geometría

Agotamiento del método sintético

La aparición de la Geometría Analítica trae consigo una nueva forma de entender la Geometría. El nuevo método, algebraico, sustituye al antiguo, el sintético, consiste en establecer, unos axiomas, unas definiciones y deducir de ellos los teoremas. El método sintético está a estas alturas casi agotado (aunque aún dará algunos resultados interesantes, como la característica de Euler, la naturaleza de estos resultados no es ya tanto geométrica como topológica, y los resultados realmente importantes que se hagan en adelante en el campo de la Geometría ya vendrán de la mano de métodos algebraicos o diferenciales), da paso al método algebraico: estudio de los objetos geométricos como representaciones en el espacio de ciertas ecuaciones polinómicas, o dicho de otro modo, del conjunto de raíces de polinomios. El método sintético sólo volverá a abordarse cuando aparezcan las geometrías no euclídeas, y definitivamente deja de ser un instrumento de investigación geométrica a principios del siglo XX, quedando relegado a un conjunto de instrumentos y herramientas para la resolución de problemas, pero ya como una disciplina cerrada.

Los límites del método algebraico

El método algebraico se ve posibilitado por un avance en Álgebra hecho durante el siglo XVI, la resolución de las ecuaciones de grado 3º y 4º. Esto permite generalizar la Geometría, al estudiar curvas que no son dadas por polinomios de segundo grado, y que no pueden construirse con regla y compás —además de las cónicas, excluyendo a la circunferencia, claro—. Pero este método, que terminará constituyendo una disciplina propia, la Geometría Algebraica, tardará aún mucho —siglo XX— en salir de unas pocas nociones iniciales, prácticamente inalteradas desde Descartes, Fermat y Newton. La razón será la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado, hecho no descubierto hasta el siglo XIX, y el desarrollo de la Teoría de Anillos y del Álgebra Conmutativa.

Referencias

Descartes. Cfr. M. De Jonquières, *Note sur un Mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdre*, Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1835. 1890 (T. 110). p261-266

S.A.J. L' Huillier, *Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti*, annales de mathématiques pures et appliquées, 1812-13

---

1. C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827
2. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, 1733
3. Véase O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., «Johann Carl Friedrich Gauss» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.

Bibliografía

Baldor, Dr. J. A. (2001) [1983]. *Geometría Plana y Del Espacio y Trigonometría* (Décima Séptima Reimpresión, México 2001 edición). Miami Florida: Públicaciones Cultural. ISBN 968-439-214-1.

Enlaces externos

Wikcionario tiene definiciones y otra información sobre **geometría**.

- *Historia de la Geometría Griega*

Fuente:
https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_geometr%C3%ADa

Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.

El Punto se define como un elemento geométrico que no tiene longitud, anchura, ni altura; se asemeja a la huella dejada por un alfiler. Este solo ocupa un lugar en el espacio.

La recta es un conjunto de puntos colocados unos detrás de otros en la misma dirección.

La línea recta no tiene principio ni fin. Cuando dibujamos una línea recta, en realidad, representamos una parte de ella. Unas veces la representamos con dos letras mayúsculas que se refieren a dos de sus puntos, o bien, con una letra minúscula:

Una recta tiene una sola dimensión: la longitud.

Dos puntos determinan una recta.

Una recta indica una dirección y dos sentidos contrarios.

Toma un trozo de hilo por los extremos, cada uno con una mano y ténsalo fuerte. De este modo obtienes una recta. La recta es la distancia más corta entre dos puntos.

Si sobre una recta señalas dos puntos, el trozo de esa recta llamamos ***segmento.***

En la figura que tienes a continuación puedes ver:

1) Los puntos A y B.
2) Las semirrectas m y n
3) El segmento AB

Las ***semirrectas*** m y n tienen principio u origen, pero no tienen fin.

La porción de recta (en color rojo) comprendida entre los puntos A y B es un segmento.

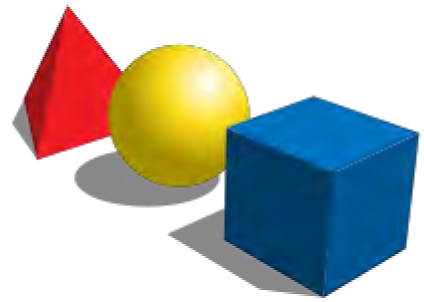
DEFINICIÓN DE ÁNGULO

La noción de **ángulo**, que procede del vocablo latino *angŭlus*, hace referencia a una figura de la **geometría** que se forma a partir de dos rectas que se cortan entre sí en una misma superficie. También puede decirse que un ángulo está formado por dos semirrectas que comparten un mismo vértice.

La forma de representar un punto mediante dos segmentos que se cortan (una pequeña “cruz” +) presupone que el ***punto es la intersección.***

Cuando se representa con un pequeño círculo, circunferencia, u otra figura geométrica, presupone que el punto es su centro.

- **Plano (geometría)** es el elemento ideal que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas, se representan con una letra mayúscula ubicada en una de las esquinas.
- **Volumen**



  - Cuerpos geométricos o figuras geométricas «sólidas» que delimitan volúmenes.
  - El **volumen** es una magnitud métrica de tipo escalar definida como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio. Es una magnitud derivada de la longitud, ya que se halla multiplicando la longitud, el ancho y la altura. Matemáticamente el volumen es definible no sólo en cualquier espacio euclídeo, sino también en otro tipo de espacios métricos que incluyen por ejemplo a las variedades de Riemann.

Construcciones con regla y compás

Segmentos.
Ángulos.
Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: Qué pertenece a ella o fuera de ella.
Mediatriz de un segmento.
Bisectriz de un ángulo.
Recta paralela a otra que pasa por un punto dado.

Construcción I

*Por un punto **P** sobre una recta dada **L**, trazar un segmento de recta que sea congruente (igual) a otro segmento de recta dado* $\overline{AB}$.

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta dado y ***L*** una recta dada con ***P*** sobre la recta ***L***. Ver Fig. 1.

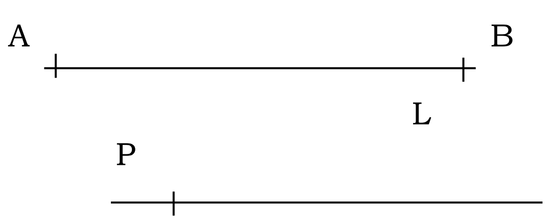


Fig. 1

Tomando una abertura $\overline{AB}$ del compás y haciendo centro en ***A*** se dibuja un arco de circunferencia que intercepta a $\overline{AB}$ en ***B***. Con la misma abertura y con centro en ***P*** se traza un arco de circunferencia, el que intercepta a ***L*** en ***B'***, se obtiene el segmento de recta congruente con el segmento de recta $\overline{AB}$. Ver figura 2.

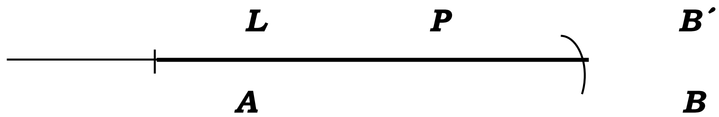


Fig. 2

Ver GeoGebra - segmentos y angulos congruentes.ggb archivos:

<u>Construcción II</u>

Por un punto P sobre una recta dada L, trazar una recta que forme un ángulo congruente (igual) a otro ángulo dado.

Sea ∠AOB ángulo dado y L una recta dada con P sobre la recta L. Ver Fig. 1.

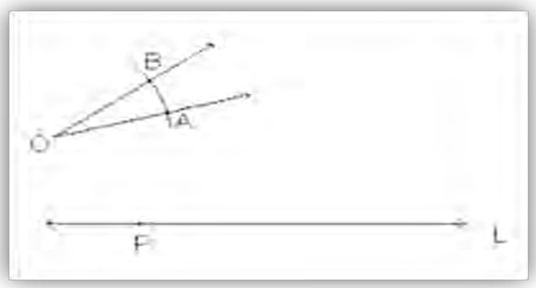


Fig. 1

Tomando una abertura arbitraria del compás y haciendo centro en ***O*** se dibuja un arco de circunferencia que intercepta a $\overline{OA}$ en ***A*** y a $\overrightarrow{OB}$ en ***B***. Con la misma abertura y con centro en ***P*** se traza un arco de circunferencia, el que intercepta a ***L*** en ***A'***. Luego con centro en ***A'*** y radio igual a $\overline{AB}$, se dibuja un arco que intercepta al arco dibujado con centro en ***P***, en el punto ***B'***. Uniendo ***P*** con ***B'*** se obtiene el ángulo $\angle A'PB'$ congruente con el ángulo $\angle AOB$. Ver figura 2.

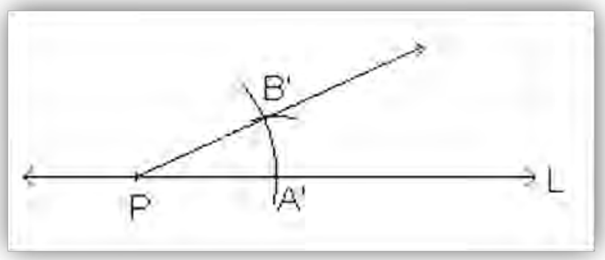


Fig. 2 Ver archivos:

<u>Construcción III</u>

Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto:

a.- que pertenece a la recta.

b.- fuera de ella

a). - que pertenece a la recta.

Sea ***L*** una recta dada y un punto ***A*** sobre la recta ***L***, tal como lo muestra la figura1.

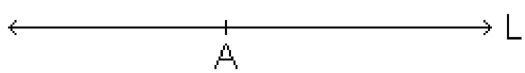


Fig. 1

Usando una abertura arbitraria del compás y apoyando la aguja de éste sobre el punto **A**, se determinan dos puntos ***C*** y ***D***, sobre la recta ***L***, tal que

CA* = *AD. Ver Figura 2

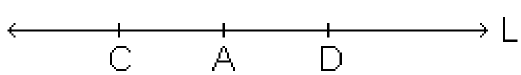


Fig. 2

Con una abertura un poco mayor que la abertura anterior y con centro en ***C*** y ***D*** se trazan dos arcos que se interceptarán en ***P*** y ***Q.*** La recta será la perpendicular pedida que pasará por ***A***. Ver Figura 3.

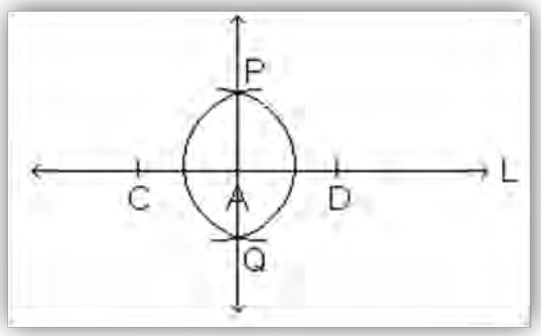
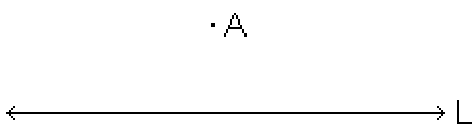


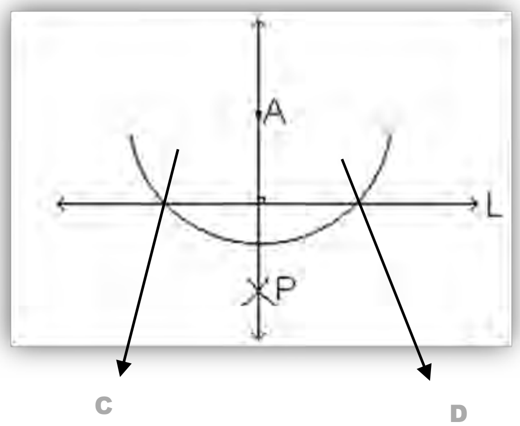
Fig. 3 Ver archivo GeoGebra - perpendicular un punto en ella.ggb

b). - fuera de ella

Sean ***L*** una recta dada y ***A*** un punto cualquiera, fuera de la recta.

Con una abertura del compás, cuya distancia entre el punto de apoyo y el lápiz del compás es mayor que la distancia entre el punto ***A*** y la recta ***L***. Con centro en ***A*** se traza un arco de circunferencia que se intercepta a ***L*** en los puntos ***C*** y ***D***. Luego con la misma abertura y con centro en ***C*** y ***D*** se trazan dos arcos, en el semiplano distinto al semiplano donde está ***A***, los que se interceptan en ***P***. La recta es la perpendicular pedida. Ver figuras siguientes.





Ver archivo GeoGebra - perpendicular un punto en ella.ggb

<u>Construcción IV</u>

Mediatriz y determinación del punto medio de un segmento.

Se denomina **Mediatriz de un segmento** AB a la recta perpendicular a él por su punto medio M.

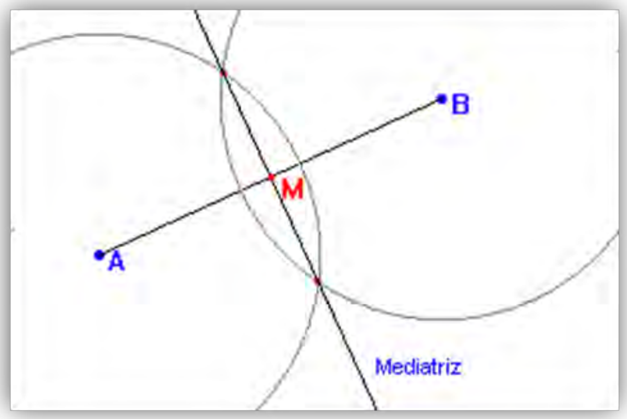


Fig. 1

Sea $\overline{AB}$ un segmento dado. Ver figura 1.

Con centro en ***A*** y en ***B*** se trazan dos arcos de circunferencia tales que sus radios sean mayor que la mitad de $\overline{AB}$**.**

Los que se interceptan en ***P*** y ***Q***. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ interceptará al segmento $\overline{AB}$ en ***E***, que es el punto medio pedido; es decir ***AE* = *EB***. Ver figura 2.

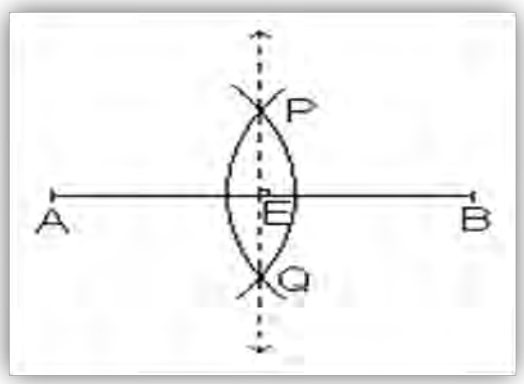


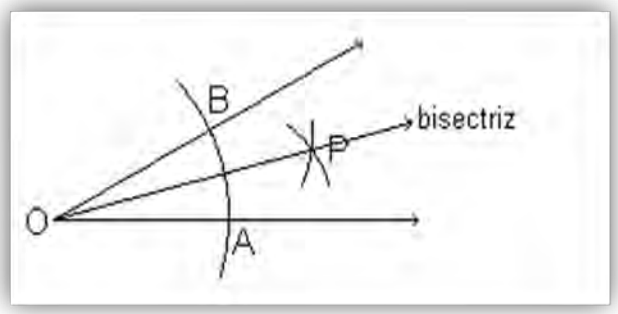
Fig. 2

Ver  archivo:

Construcción V

Bisectriz de un ángulo dado.

Sea $\angle AOB$ un ángulo dado. Con centro sea en ***O*** y una abertura arbitraria del compás se traza un arco de circunferencia que interceptará a los Lados del ángulo en ***A*** y ***B***; Luego con centro en ***A*** y en ***B***, y la misma abertura anterior del compás, u otra, se trazan dos arcos, los que se interceptan en ***P***. Se une ***O*** con ***P***, y el rayo $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz pedida. Ver figura siguiente.



Ver archivo: GeoGebra - Bisectriz.ggb

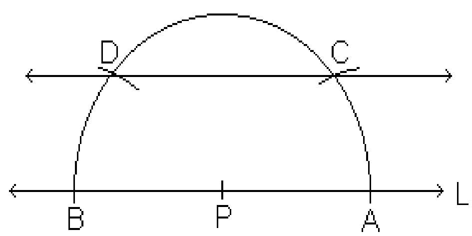
Construcción VI

- Construcción de la recta paralela a otra por un punto dado – Postulado de las rectas paralelas

Construcción:

Sean L recta dada y C un punto fuera de L.

Haciendo centro en un punto cualquiera P de L, con un compás, se traza un arco de circunferencia, de radio $\overline{CP}$, el que intercepta a L en A y B.



Luego con centro en B y radio $\overline{AC}$ se intercepta el arco anterior en el punto D. La recta $\overleftrightarrow{CD}$ encontrada es paralela a L.

Postulado de las paralelas

Si una recta corta a otras dos y forma dos ángulos internos que suman menos que dos ángulos rectos, en caso de prolongar éstas indefinidamente se cortarán del lado en que la suma de los ángulos internos es menor que dos rectos.

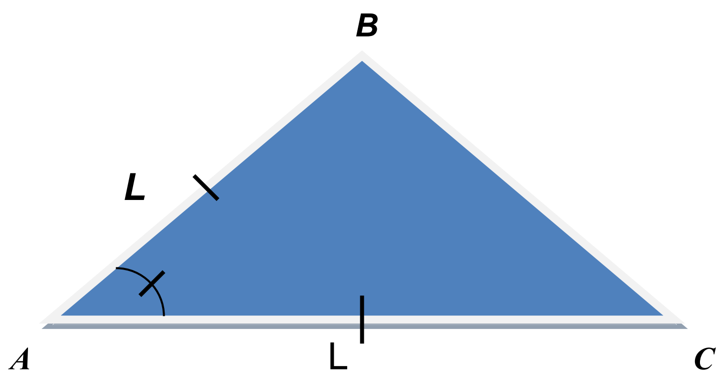
Problemas resueltos:

Construcción de triángulos

- **Reproducir un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)**

Caso I

LAL



Reproducir el ∆ABC anterior, dados los lados AB, AC y el ∠BAC.

Construcción:

Primero, construir una línea de trabajo (**LT**)

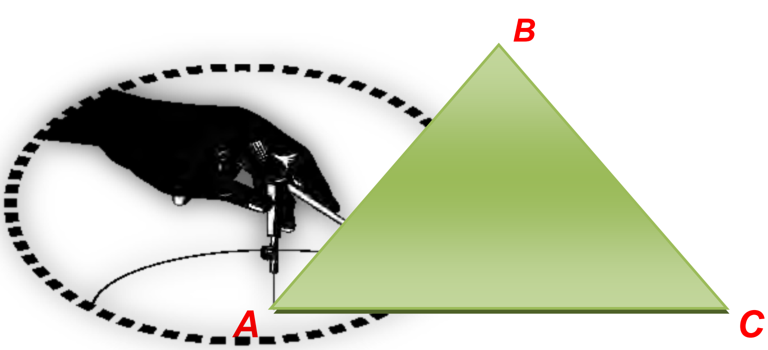
LT

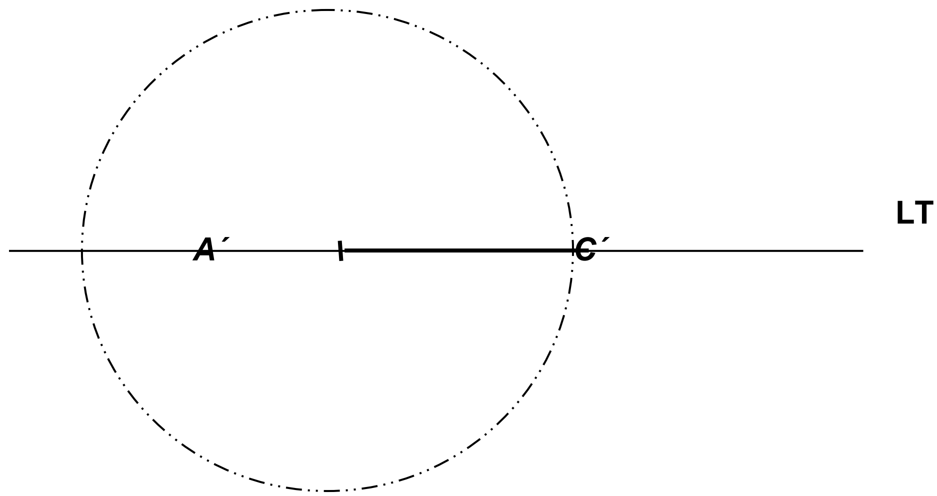
Segundo, sobre la **LT** localizar un punto ***A´***, cualquiera.

LT

A´

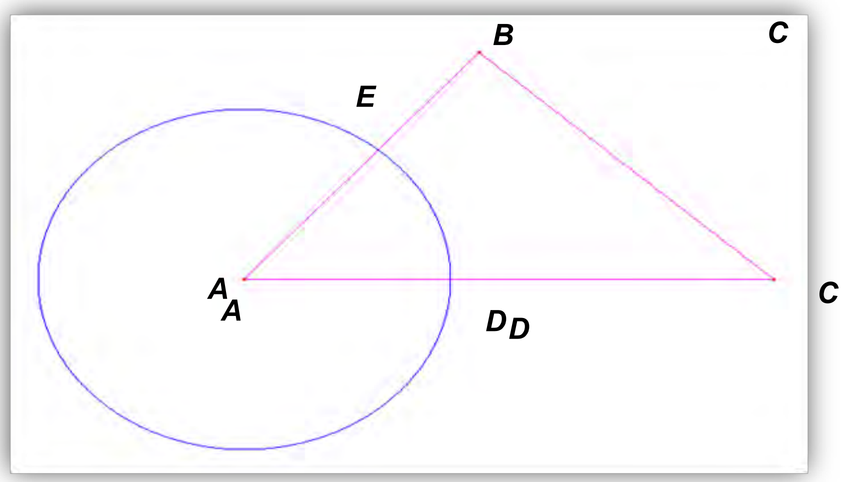
Después con el compás apoyándose en el punto **A** del segmento **AC** del ***∆ABC*** abrirlo hasta tocar el punto **C**, con esta abertura, del compás, y apoyándose en el punto ***A´*** en la **LT**, trazar una circunferencia, llamando al punto de intersección de la circunferencia y la **LT**, C´, a este segmento en la LT llámale A¨C´ y es igual a AC.



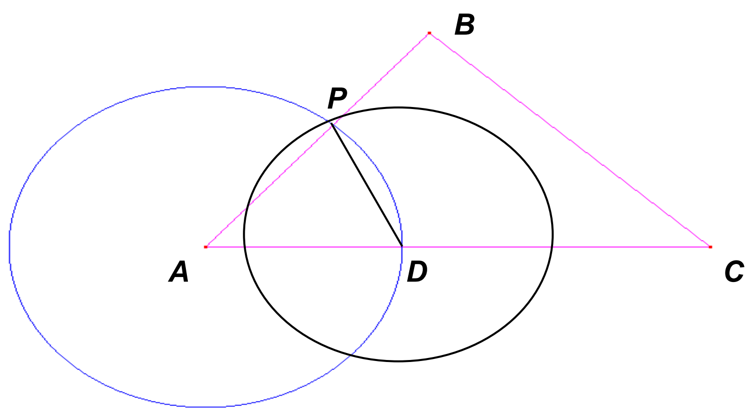


Tercero, construir el ∠BAC. Apoyándose en el punto A del ∆ABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto C y traza

Una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto D y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto E.



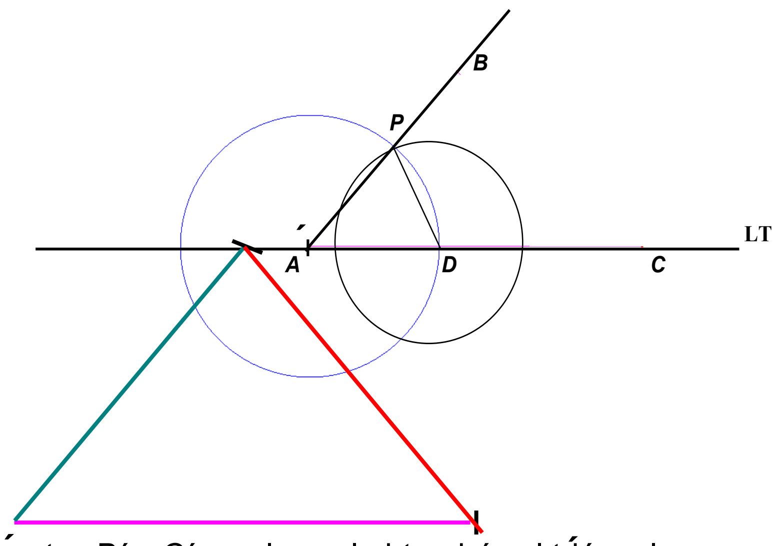
Ahora, apoyándose en el punto D abre el compás hasta tocar el punto E y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.



Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***A´*** y con la abertura ***AD,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***D*** y con la abertura ***DE***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***P***, une los puntos ***A´*** y ***P*** con una línea recta prolongada hacia arriba.

Luego, apoyándote en el punto ***A*** y sobre el segmento AB abre el compás hasta el punto B.

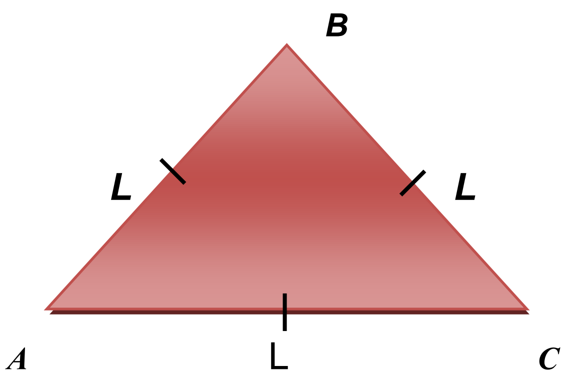
Con esta misma abertura apoyándose en el punto ***A´*** en la **LT** y traza una circunferencia a la intersección de esta circunferencia con la recta prolongada hacia arriba llámale el punto ***B´***, la distancia A´B´ = AB.



Finalmente une los puntos B´ y C´ con lo cual obtendrás el triángulo ΔA´B´C´ solicitado. Ver archivo:

Caso II Ver archivo:

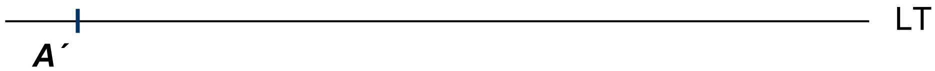
LLL



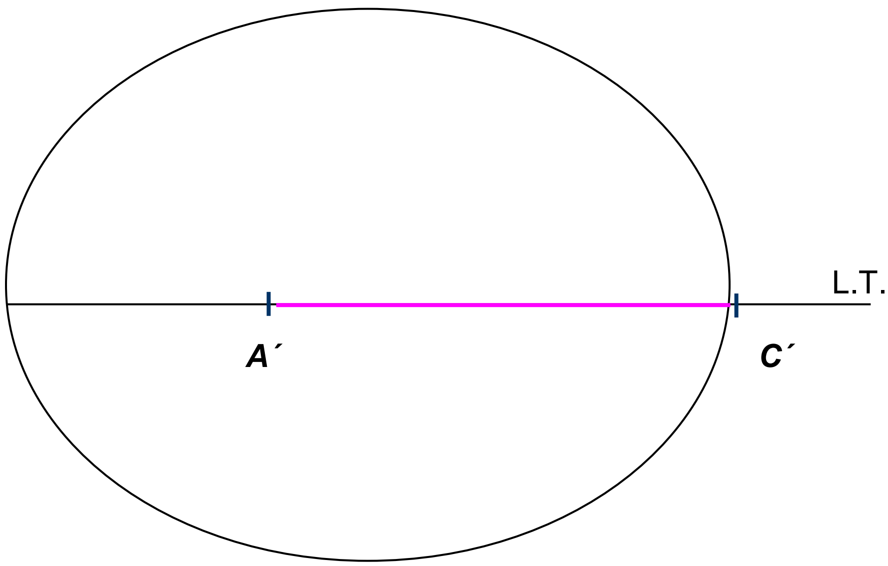
Reproducir el ∆ABC anterior, dados los lados AB, AC y BC

Construcción:

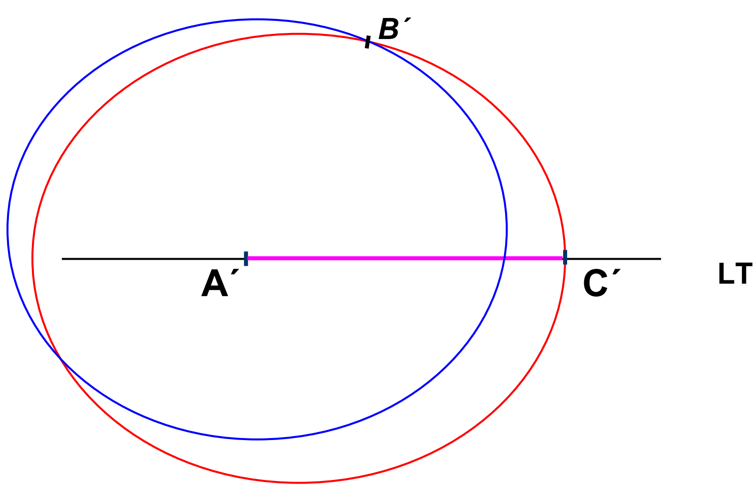
Primero construye una línea de trabajo LT y encuentra un punto A´ sobre la LT.



En el ∆ABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto C, ahora en la LT apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre la circunferencia y la LT llámale el punto ***C´***.

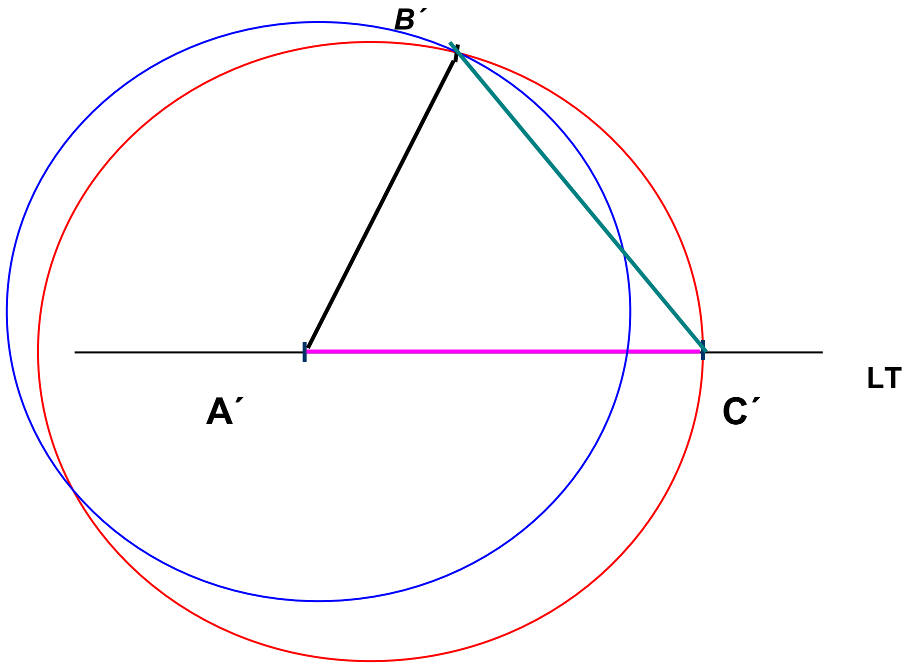


Nuevamente en el ∆ABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto B, ahora en la LT apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre las circunferencias llámale



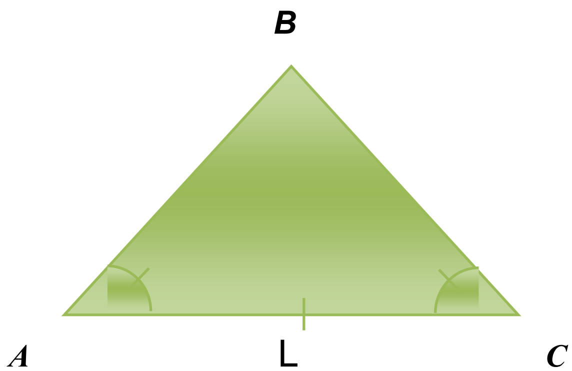
Une los puntos A’ y B´ con una recta, esta recta A´B´= AB.

Finalmente une los puntos B´ y C´ con una recta, esta recta B´C´= BC, estas líneas definirán el ∆A´B´C´ solicitado.



Caso III

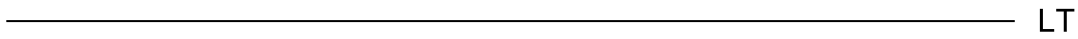
ALA



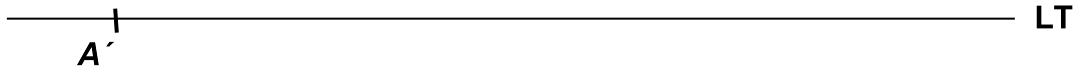
Reproducir el ∆ABC anterior, dados un lado AC y los ∠BAC y ∠BCA.

Construcción:

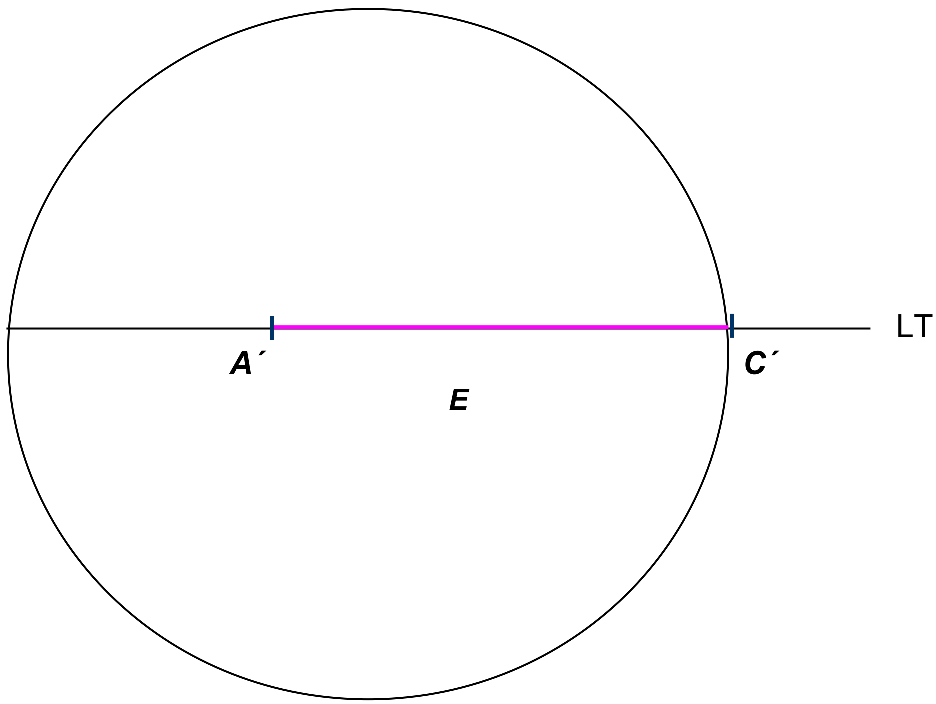
Primero, construir una línea de trabajo (**LT**)



Segundo, sobre la **LT** localizar un punto ***A´***, cualquiera.

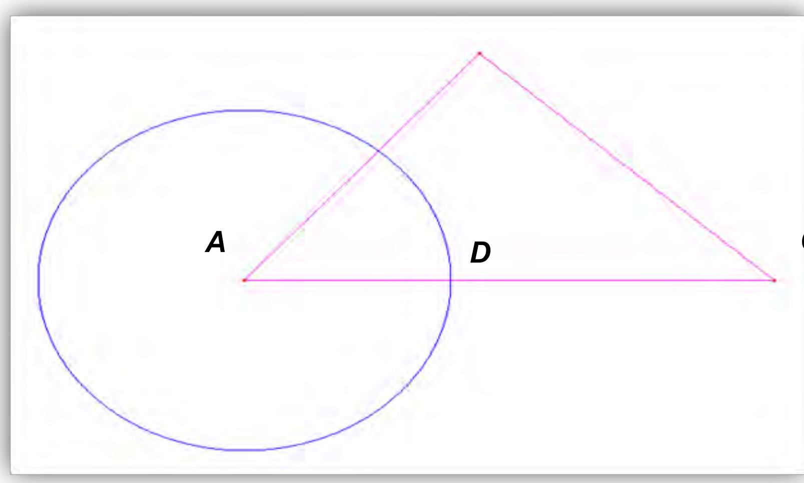


En el ∆ABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto C, ahora en la L.T. Apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre la circunferencia y la L.T. llámale el punto ***C´***.

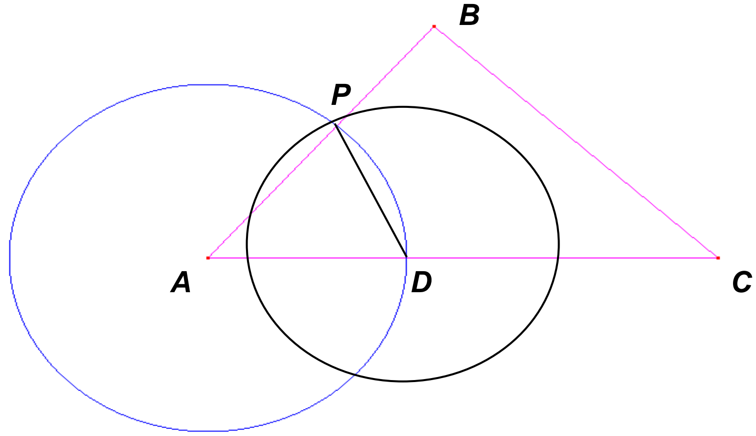


Esta recta A´C´= AC

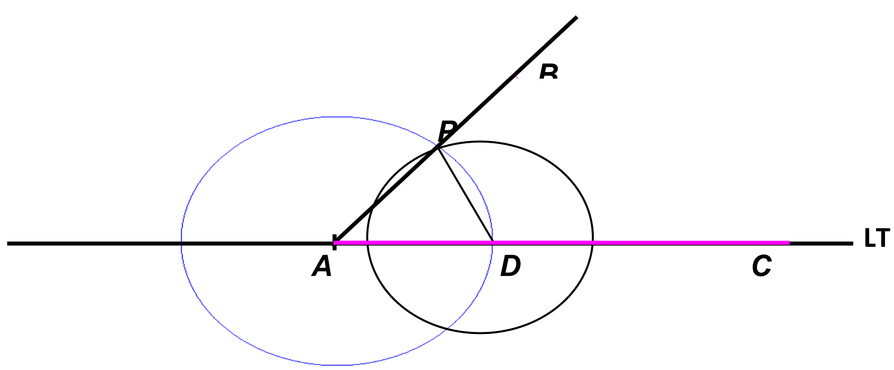
Construir el ∠BAC. Apoyándose en el punto A del ∆ABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto C y traza una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto D y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto E.



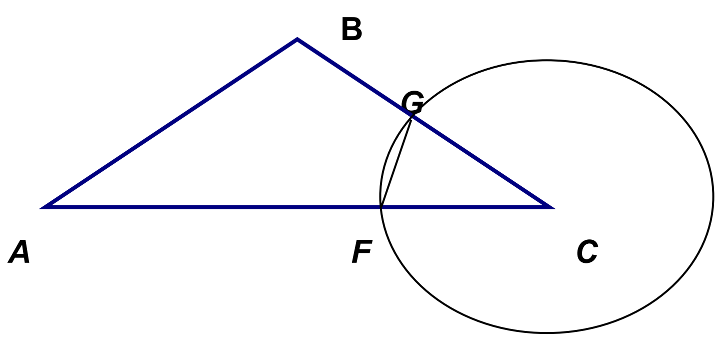
Ahora, apoyándose en el punto D abre el compás hasta tocar el punto E y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.



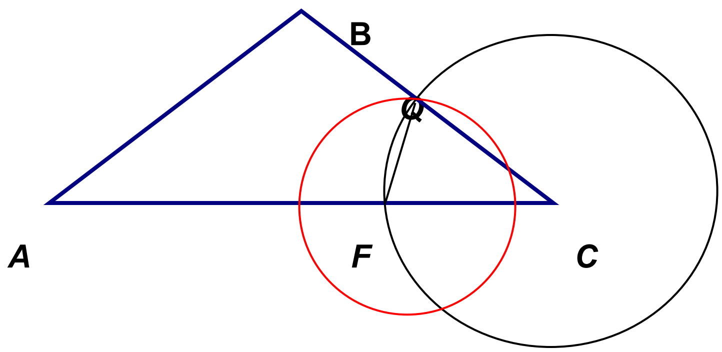
Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***A´*** y con la abertura ***AD,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***D*** y con la abertura ***DE***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***P***, une los puntos ***A´*** y ***P*** con una línea recta prolongada hacia arriba.



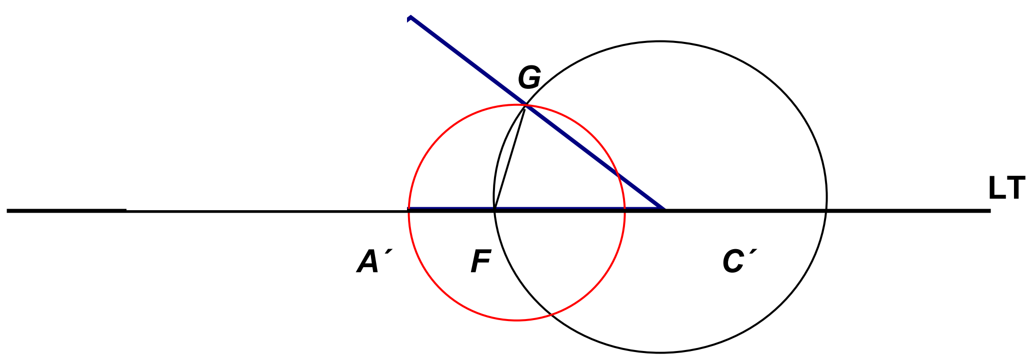
Construir el ∠BCA. Apoyándose en el punto C del ΔABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto A y traza una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto F y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto G.



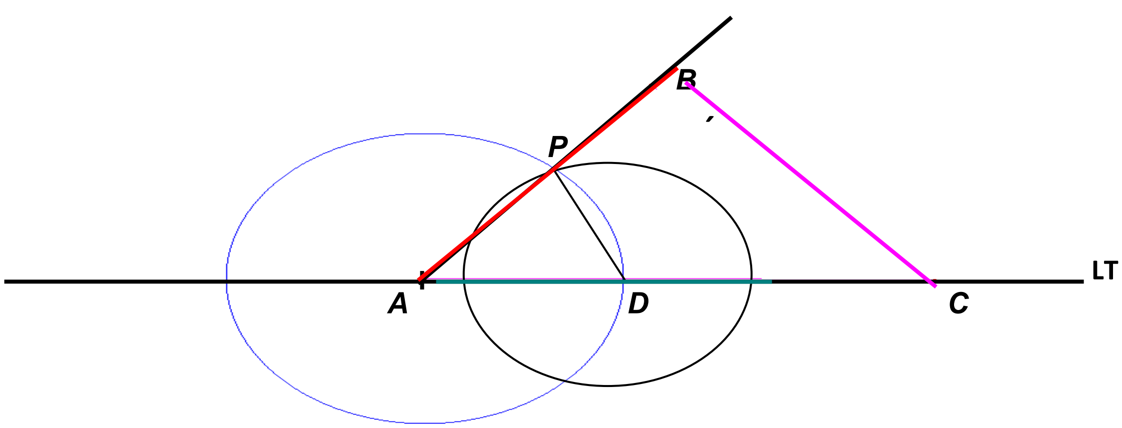
Ahora, apoyándose en el punto F abre el compás hasta tocar el punto G y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.



Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***C´*** y con la abertura ***CF,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***F*** y con la abertura ***FG***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***Q***, une los puntos ***C´*** y ***Q*** con una línea recta prolongada hacia arriba.



Observa que si prolongas la recta A´P y C´G estas se cortan, el punto donde se cortan llámale el punto B´, lo que tiene como consecuencia que los segmentos AB = A´B´ y BC = B´C´ y estos forman el triángulo ΔA´B´C´ solicitado.



Ver Archivo: GeoGebra - construccion de triangulos 2angulos adyacentes y un lado.ggb

DIVISIÓN AUREA DE UN SEGMENTO:

Sea el segmento AB

1.- En el extremo B, levantamos $\overline{OB} \perp \overline{AB}$

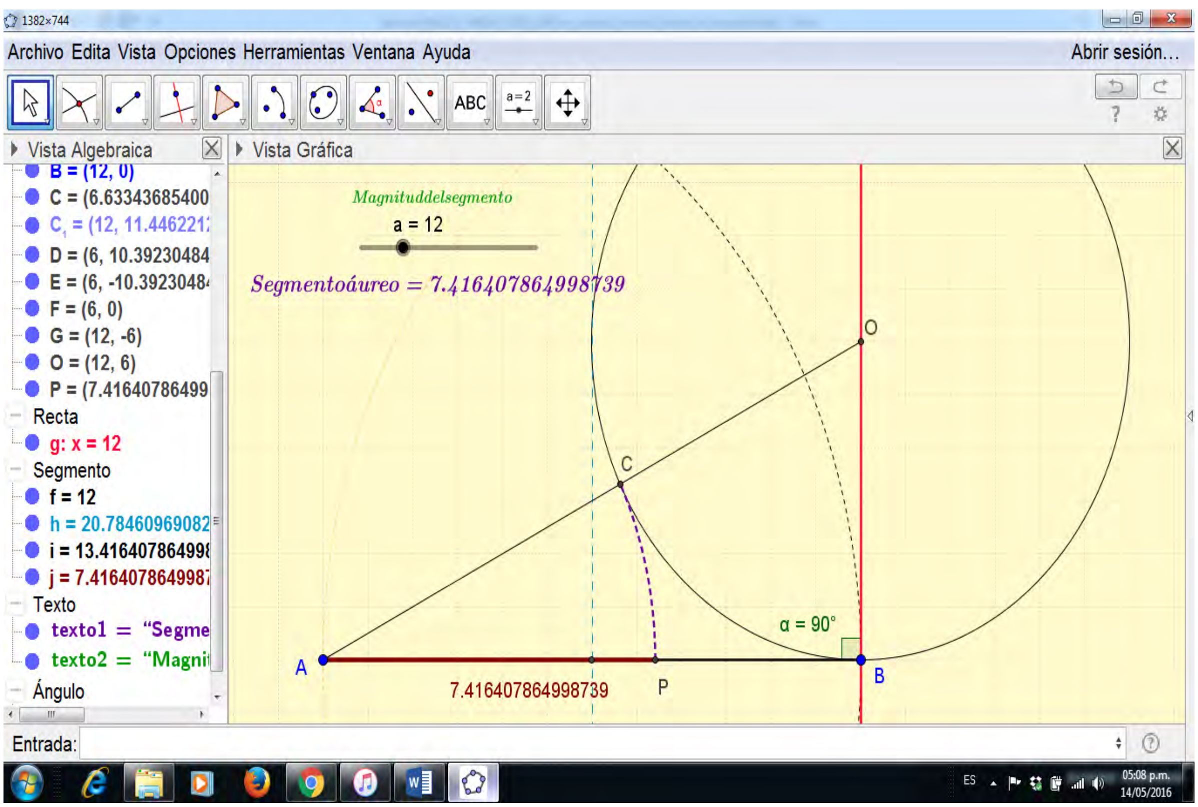
2.- Trazamos $\overline{OB} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

3.- Con centro en O y con radio $\overline{OB} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$; trazamos una circunferencia.

4.- Unimos A con O y determinamos el punto C.

5.- Con centro en A y con radio igual a AC, determinamos el punto P.

6.- El segmento $\overline{AP} = x$ es el segmento áureo.



Ángulos

Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano).

Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).

Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes.

Postulado de las rectas paralelas y su inverso

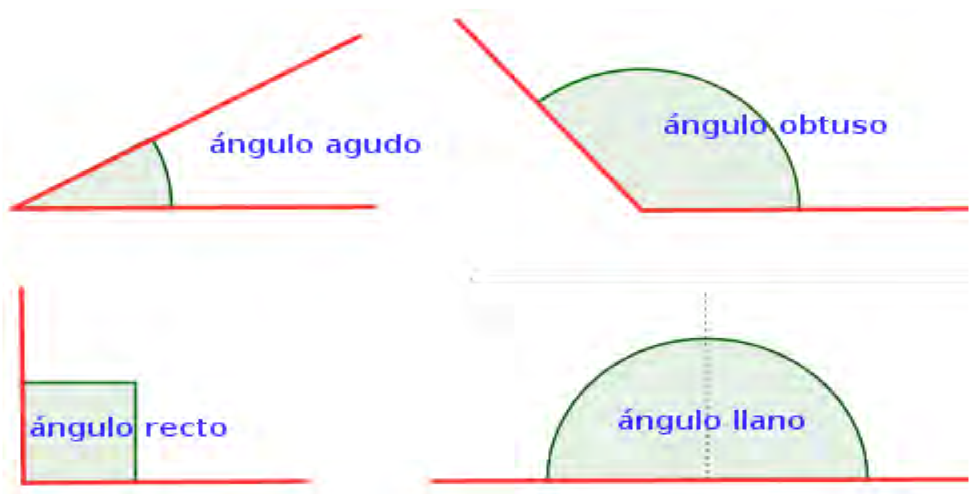
Problemas de aplicación.

Ángulo agudo: el ángulo es agudo cuando su medida es menor que la medida de un ángulo recto.

Ángulo obtuso: el ángulo es obtuso cuando su medida es mayor que la medida de un ángulo de 90º, pero menor que dos ángulos rectos.

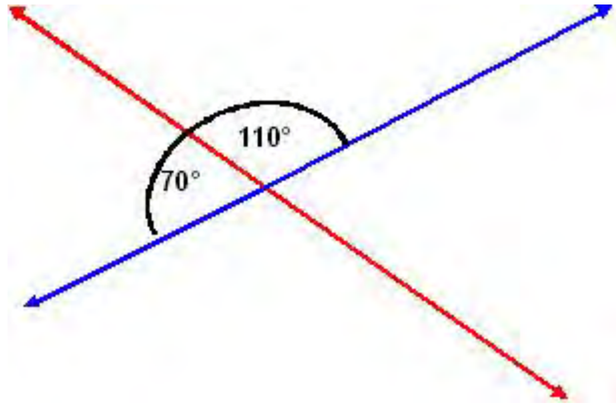
Ángulo recto: el ángulo es recto cuando sus lados se forman a partir de dos rectas perpendiculares.

Ángulo llano: el ángulo se vuelve llano cuando forma dos líneas rectas opuestas.



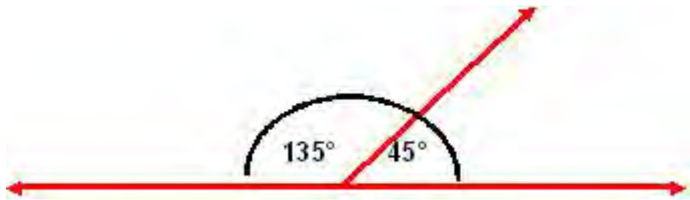
Ángulos adyacentes:

Dos ángulos son adyacentes cuando tienen un lado en común y el otro lado está formado por dos semirrectas opuestas. Los ángulos adyacentes son siempre suplementarios, ya que su suma es igual a 180°.



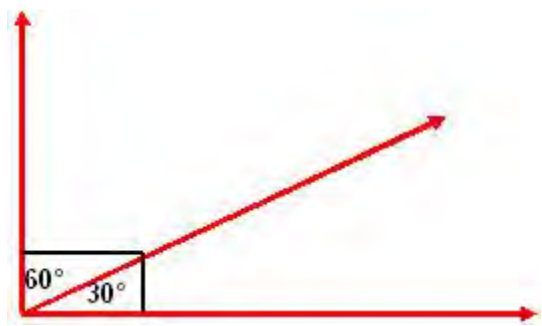
Ángulos suplementarios:

Un ángulo es suplementario de otro ángulo cuando la suma de sus medidas da como resultado un ángulo extendido.



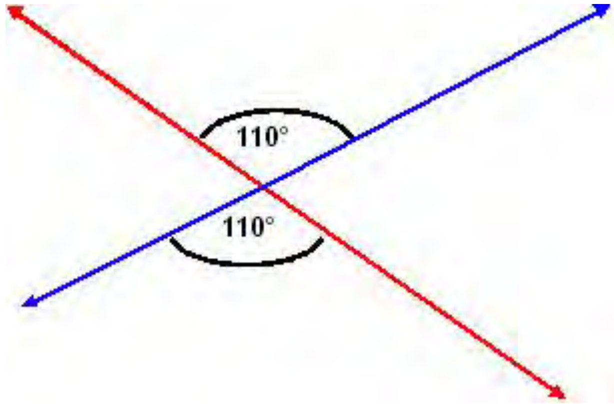
Ángulos complementarios:

Un ángulo es complementario de otro ángulo cuando la suma de sus medidas da como resultado un ángulo recto.



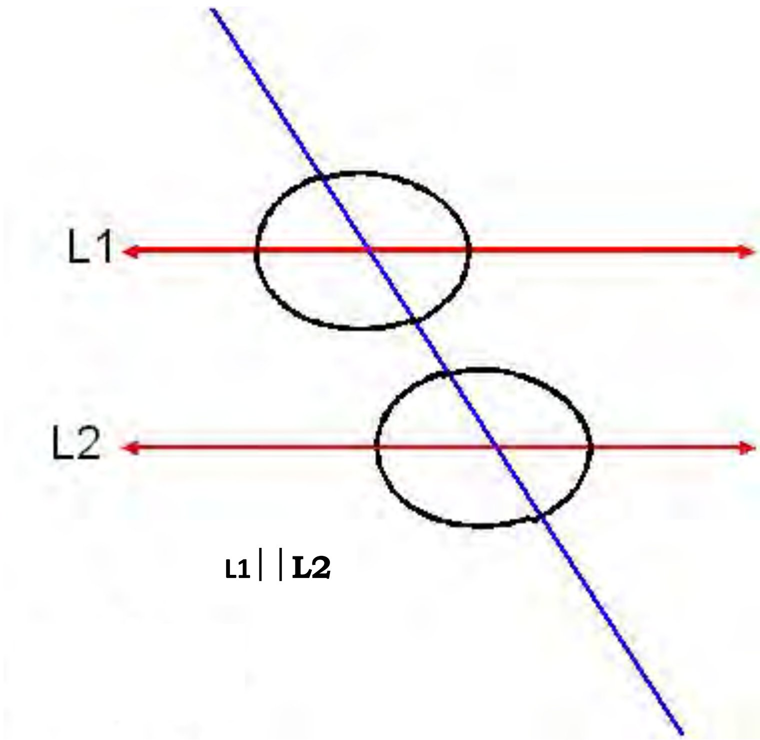
Ángulos opuestos por el vértice:

Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando tienen un vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas. Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, ya que tienen igual amplitud.

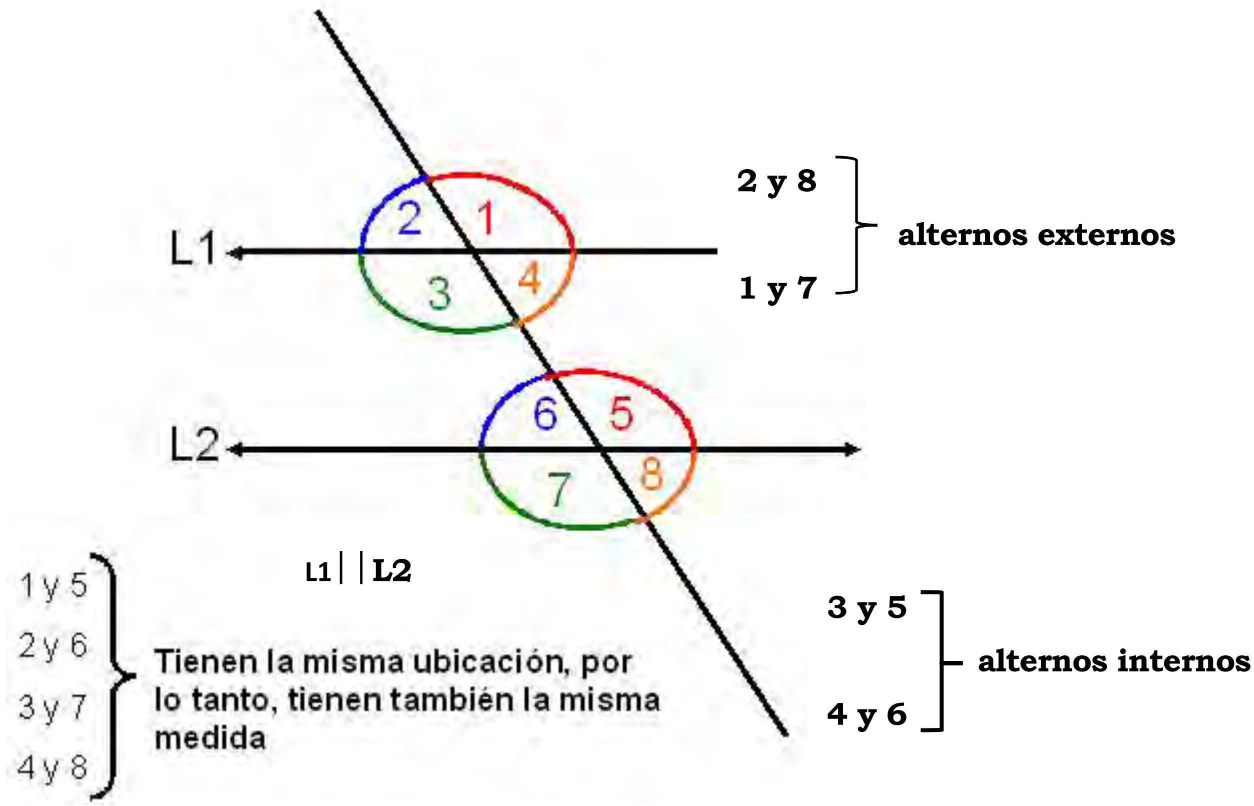


Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal:

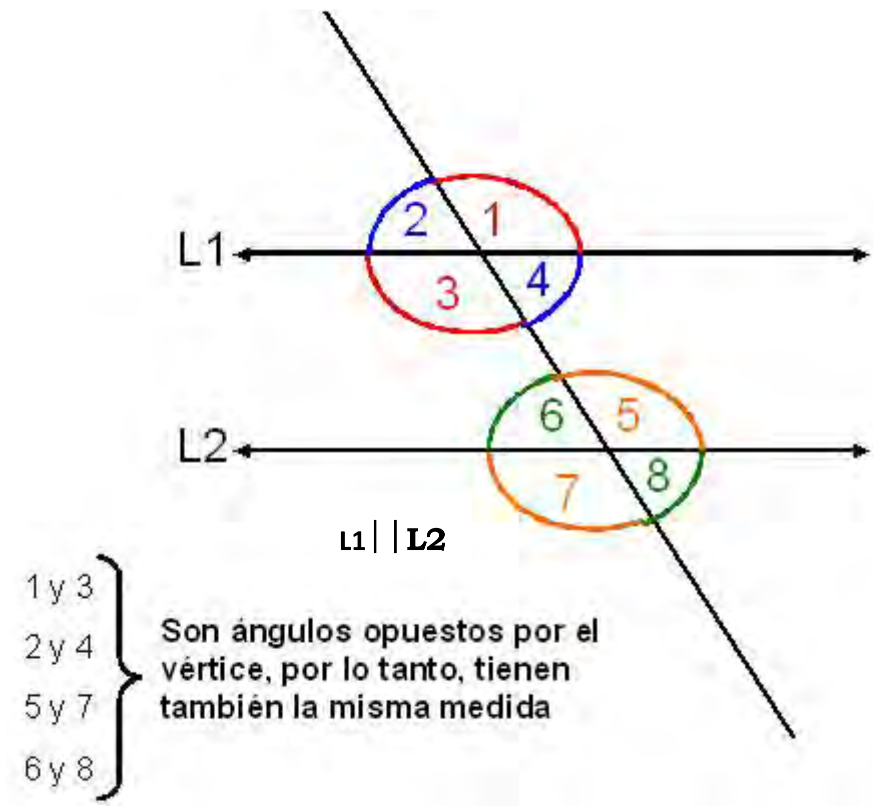
Si intersectamos dos rectas paralelas por una transversal, obtendremos 8 ángulos, 4 en cada punto de intersección.



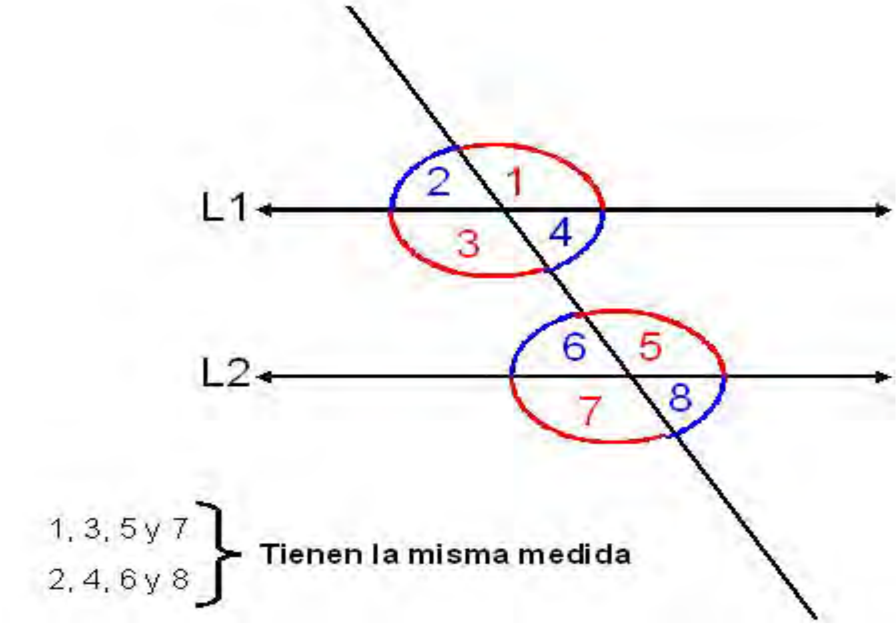
Son **ángulos correspondientes**, aquellos que tienen la misma ubicación en ambos grupos de 4 ángulos. En el caso de dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes tienen la misma medida.



Además, se forman **ángulos opuestos por el vértice**, **alternos internos** y **alteros externos**, que como aprendimos anteriormente, tienen igual medida.



Si tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, podemos concluir entonces que:



▶ Postulado de las paralelas

Si una recta corta a otras dos y forma dos ángulos internos que suman menos que dos ángulos rectos, en caso de prolongar éstas indefinidamente se cortarán del lado en que la suma de los ángulos internos es menor que dos rectos.

Problemas Propuestos:

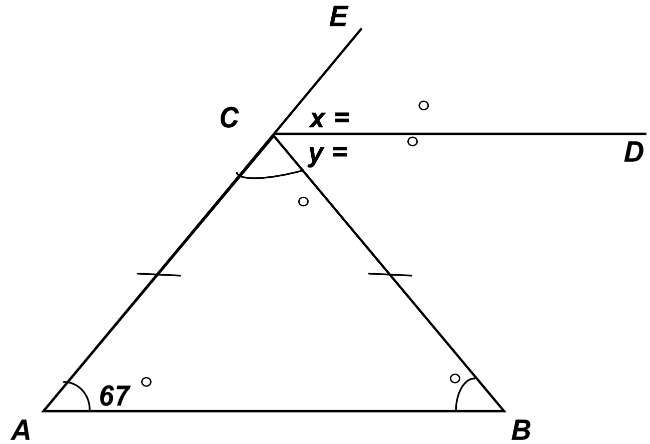
Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante:

En cada uno de los problemas siguientes calcular los valores de x y de y.

Datos:

$\angle A = 67°$

$\overline{AB}$ II $\overline{CD}$



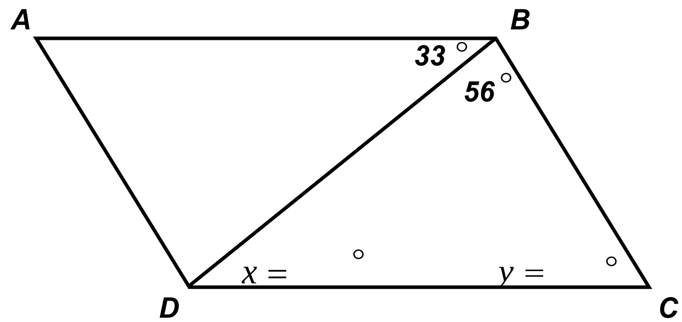
Datos:

$\angle ABD = 33°$

$\angle DBC = 56°$

$\overline{AB}$ II $\overline{CD}$

$\overline{AD}$ II $\overline{CB}$

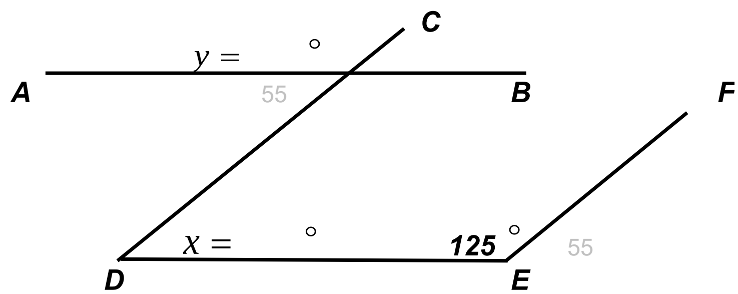


Datos:

$\angle DEF = 125°$

$\overline{AB}$ II $\overline{DE}$

$\overline{DC}$ II $\overline{EF}$



$$Ax + By = \angle 2$$
$$Cx + Dy = \angle 3$$

Datos:

$\angle ECF = 150°$

***A* = 1**

***B* = 1**

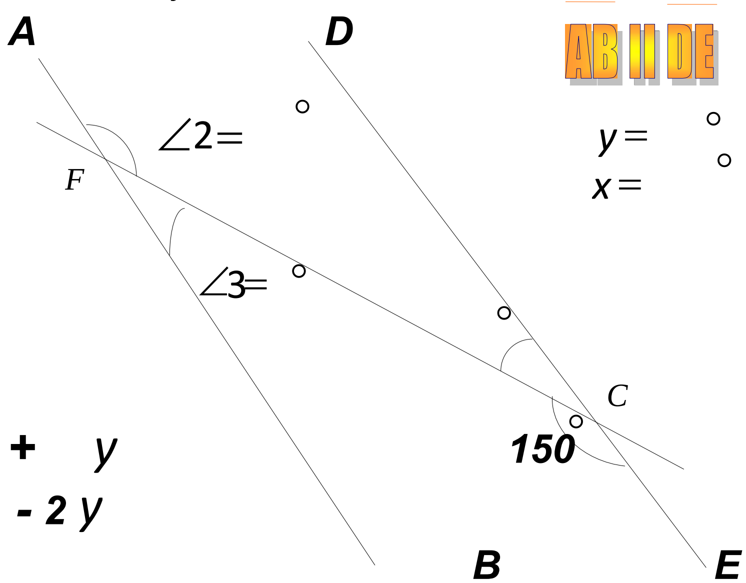
***C* = 1**

***D* = -2**

$\angle 2 = \;°$

$\angle 2 = x + y$

$\angle 3 = x - 2y$



$\overline{AB}$ II $\overline{DE}$

$y = \;°$

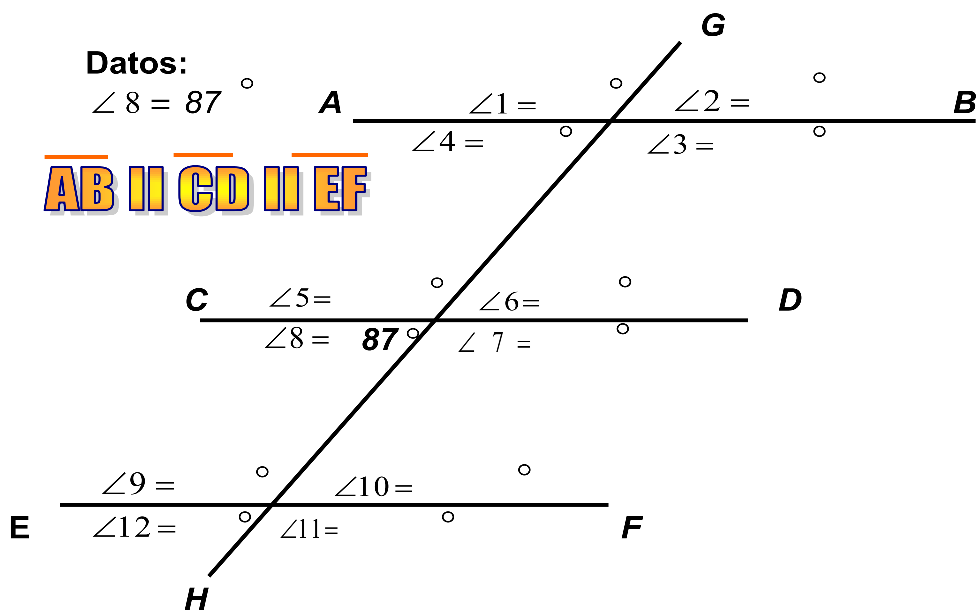
$x = \;°$

En el siguiente problema, hallar los 11 ángulos restantes.

Datos:

$\angle 8 = 87°$

$\overline{AB}$ II $\overline{CD}$ II $\overline{EF}$



Geometría del triángulo

Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo).

Desigualdad del triángulo.

Propiedades del triángulo: Suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.

Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente.

Problemas de aplicación.

Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura.

Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.

Construcción de las rectas y puntos notables.

Distancia de un punto a una recta.

Propiedades del triángulo isósceles.

Los ángulos adyacentes a la base son iguales.

La altura y la mediana de la base coinciden.

La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

Clasificación de los triángulos

Los triángulos se pueden clasificar por la relación entre las longitudes de sus lados o por la amplitud de sus ángulos.

Por la medida de sus lados

Por la medida de sus lados, todo triángulo se clasifica en:

- triángulo equilátero**, cuando los tres lados del triángulo tienen una misma longitud (los tres ángulos internos miden 60 grados o $\frac{\pi}{3}$ radianes).**

- triángulo isósceles **(del griego ἴσος "igual" y σκέλη "piernas", es decir, "con dos piernas iguales"), si tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida. (Tales de Mileto, filósofo griego, demostró que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales, estableciendo así una relación entre longitudes y ángulos; a lados iguales, ángulos iguales).**

Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales; esto no descarta que los tres lados sean iguales, de modo que todo triángulo equilátero sea isósceles, pero no se cumple el enunciado recíproco.

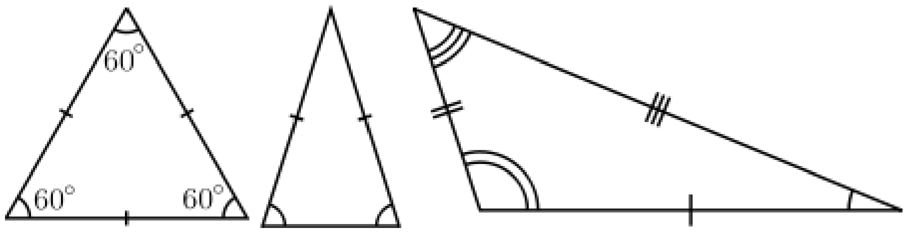
Sea el triángulo **ABC** isósceles, donde **b** = **c** entonces los ángulos opuestos son iguales, i.e **B = C**. También se cumple que **B' = C'** siendo estos los ángulos externos. Además, se cumplen las igualdades

A + 2B = A +2C = 180º;

A' + 2B' = A' + 2C' = 360º; A' = 2C = 2B; B'=C'=A+B= A+C

$m_a = h_a = v_A = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ donde m_a, h_a, v_A son la mediana, altura del lado **a** y bisectriz de su ángulo **A** opuesto.

- Como **triángulo escaleno** (del griego σκαληνός "desigual"), si todos sus lados tienen longitudes diferentes (en un triángulo escaleno no hay dos ángulos que tengan la misma medida).



Equilátero Isósceles Escaleno

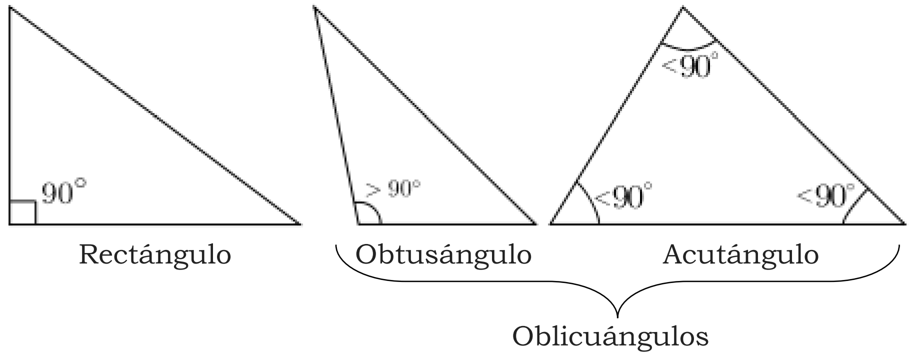
Por la amplitud de sus ángulos

Por la amplitud de sus ángulos los triángulos se clasifican en:

(*Clasificación por amplitud de sus ángulos*)		
Triángulos	**Rectángulos**	
	Oblicuángulos	**Obtusángulos**
		Acutángulos

- **Triángulo rectángulo**: si tiene un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina *catetos* y al otro lado *hipotenusa*.
- **Triángulo oblicuángulo**: cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto (90°). Por ello, los triángulos obtusángulos y acutángulos son oblicuángulos. Cualquier triángulo o bien es rectángulo o bien oblicuángulo.
- **Triángulo obtusángulo**: si uno de sus ángulos interiores es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos (menores de 90°).

- **Triángulo acutángulo**: cuando sus tres ángulos interiores son menores de 90°.



Clasificación según los lados y los ángulos del triángulo

Los triángulos acutángulos pueden ser:

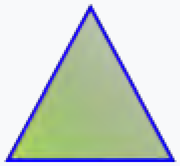
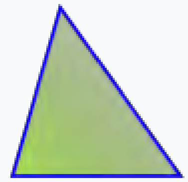
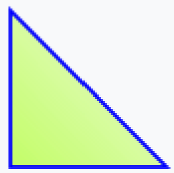
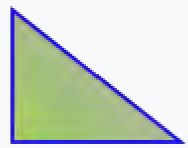
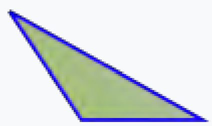
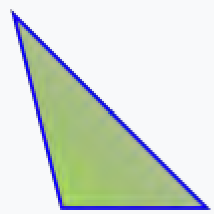
- **Triángulo acutángulo isósceles**: con todos los ángulos agudos, siendo dos iguales, y el otro distinto. Este triángulo es simétrico respecto de su altura sobre el lado distinto.
- **Triángulo acutángulo escaleno**: con todos sus ángulos agudos y todos diferentes, no tiene eje de simetría.
- **Triángulo acutángulo equilátero**: sus tres lados y sus tres ángulos son iguales. Las tres alturas son ejes de simetría (dividen al triángulo en dos triángulos iguales).

Los triángulos rectángulos pueden ser:

- **Triángulo rectángulo isósceles**: con un ángulo recto y dos agudos iguales (de 45° cada uno), dos lados son iguales y el otro diferente: los lados iguales son los catetos y el diferente es la hipotenusa. Es simétrico respecto a la altura de la hipotenusa, que pasa por el ángulo recto.
- **Triángulo rectángulo escaleno**: tiene un ángulo recto, y todos sus lados y ángulos son diferentes.

Los triángulos obtusángulos pueden ser:

- **Triángulo obtusángulo isósceles**: tiene un ángulo obtuso, y dos lados iguales que son los que forman el ángulo obtuso; el otro lado es mayor que estos dos.
- **Triángulo obtusángulo escaleno**: tiene un ángulo obtuso y todos sus lados son diferentes.

Triángulo	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

clasificación de un triangulo por 3 lados.xlsx

Clasificación de un Tri de acuerdo al valor de sus lados (2).ggb

DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

Nota: <u>No debe confundirse con la Desigualdad triangular</u>

En matemáticas, la **desigualdad del triángulo** es un teorema que dice, aproximadamente, que el viaje de *A* á *B* á *C* nunca es más corto que el viaje de *A* á *C*.

Aplica en espacios como el de números reales, el espacio euclidiano, y a otros espacios. Dicho más generalmente, se aplica en todo espacio de producto interno.

FÓRMULA DE HERÓN

En geometría, **la fórmula de Herón** plantea que la superficie de un triángulo de lados *a*, *b*, *c* viene dada por:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

La fórmula puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

La construcción de triángulos tiene el propósito de establecer los datos mínimos requeridos para la construcción de estos.

Usa ***Geogebra*** para todas las construcciones anteriores y además trabaja de la siguiente forma:

Construir un triángulo, cuando se dan:

a) Un dato:

i).- Un lado:

ii).-Un GeoGebra - Construccion de Tri Un angulo.ggb ángulo:

b) Dos datos: Dos lados, un lado y un ángulo, dos ángulos.

GeoGebra - Construccion de Tri dos lados.ggb

GeoGebra - Construccion de Tri un lado y un angulo.ggb

GeoGebra - construccion de triangulos dados 2 angulos.ggb

c) Tres datos: Tres lados, dos lados y un ángulo, un ángulo y dos lados.

Consulta los archivos de ***Geogebra*** que tu profesor tiene como ayudantes.

Usa el archivo: Microsoft Excel - Construccion de triangulos

¿Se puede construir un triángulo dados estos tres segmentos ?

	p - a	p - b	p - c
p= 4.5	3.5	0.5	0.5
A= 1.98431348			

1

4

4

! Si se puede construir ¡

¿Se puede construir un triángulo dados dos lados y un ángulo?

a= 4 b= 3 c = 3.605551275

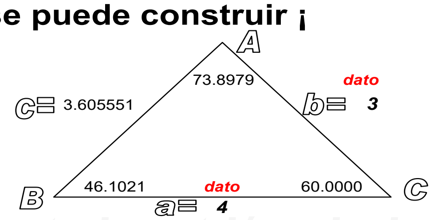
	p - a	p - b	p - c	
p= 5.30277564	1.30277564	2.30277564	1.697224362	0.96076892
A = 5.19615242	∠ B =	46.1021	∠ A =	73.8979

4

3

Ángulo
60 °

! Si se puede construir ¡



Asistente Grados°,minutos´ a Grados°		
Grados	Minutos	Grados
66 °	56	66.93 °

¿Se puede construir un triángulo dado un lado y dos ángulos?

a = **9.86975233** b = **10.5189968** c = **7**

	p - a	p - b	p - c
p= 13.6943745	3.82462221	3.17537779	6.694374546
A = **33.3670704**			

7

Ángulo
65 ° seno 0.90630779

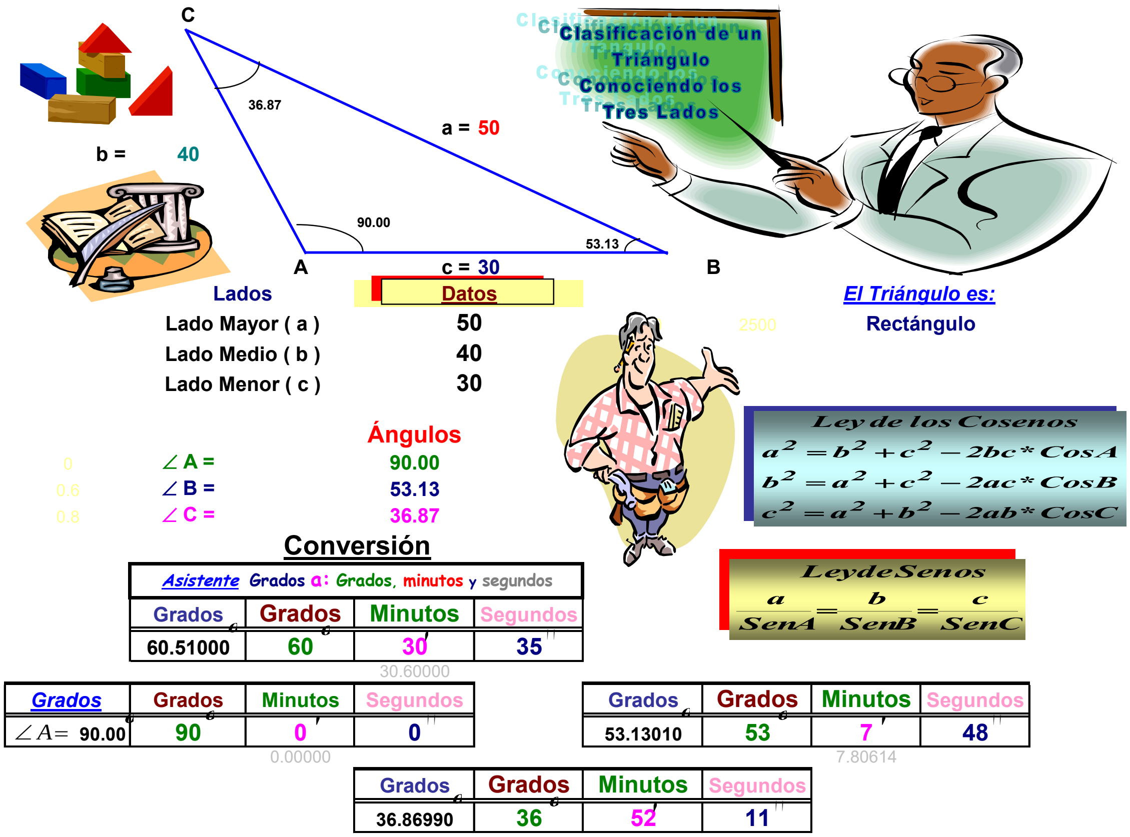
Ángulo
75 ° 0.96592583

! Si se puede construir ¡

Clasificación de un triángulo por medio del conocimiento de sus lados

Pide a tu profesor el ayudante de Excel y en Geogebra

Microsoft Excel - clasificacion de un triangulo por 3 lados



[clasificacion de un triangulo por 3 lados (bueno).xlsx]

[Clasificacion de un Tri de acuerdo al valor de sus lados.ggb]

d) Tres datos:

i).- Tres lados (L.L.L.)

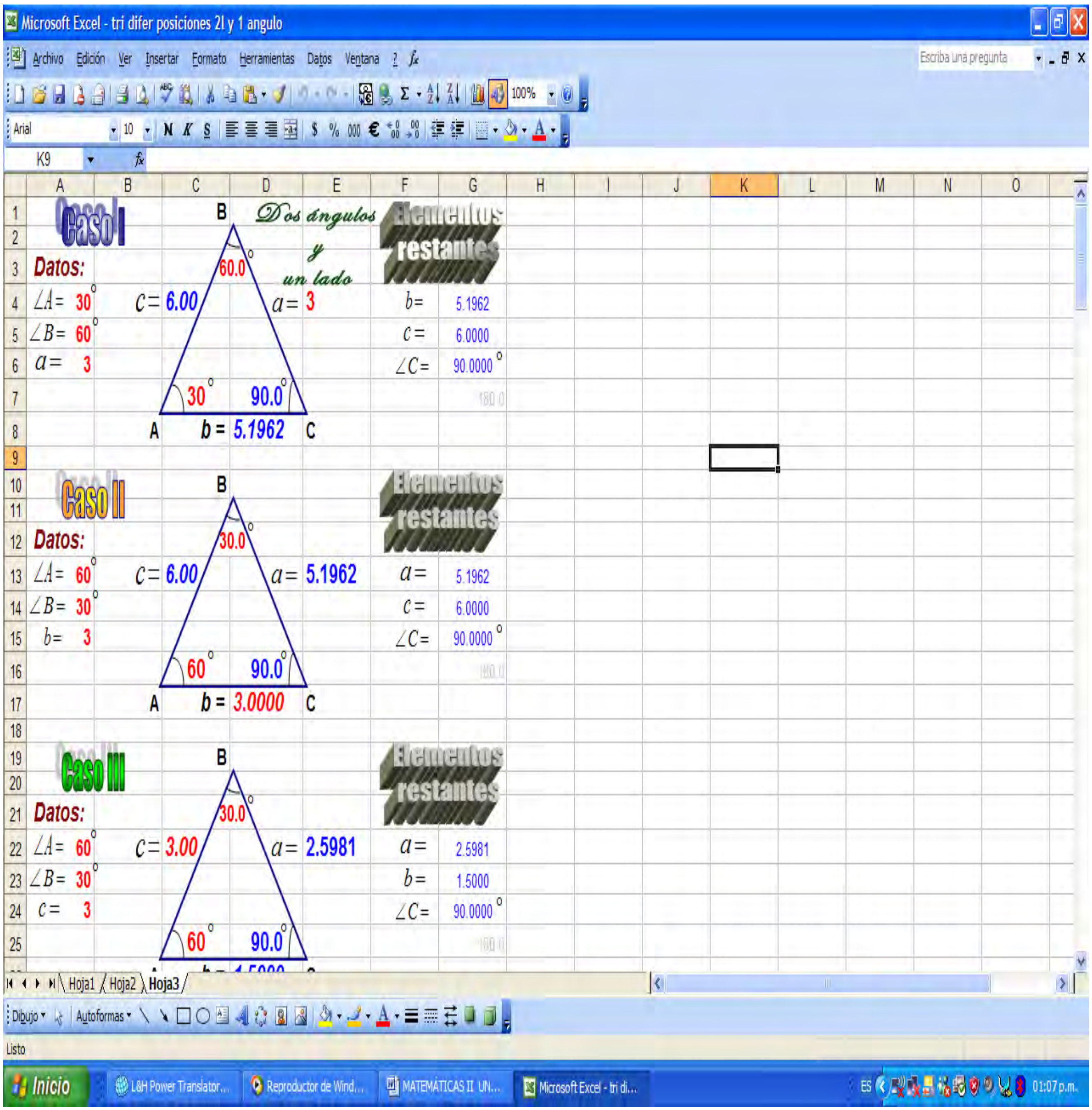
GeoGebra - construccion de triangulos dados sus tres lados.ggb

ii).- Dos lados y un ángulo (L.A.L.)

GeoGebra - costruccion triangulo 2 lados y su angulo comprendido.ggb

iii).- Dos ángulo y un lado (A.L.A.)

Pide a tu profesor el ayudante de Excel y de Geogebra



SOLUCIÓN A ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS:

Construir un triángulo, cuando se dan:

a) Un dato:

i). - Un lado:

ii). - Un ángulo:

Solución: incisos i). - e ii). -

Con un solo dato no se puede construir un triángulo, se necesita más que un solo lado o más que un solo ángulo.

b). - Dos datos: Dos lados, un lado y un ángulo, dos ángulos.

Con solo dos datos no se puede construir un triángulo, se necesita más que solo dos lados o más que solo dos ángulos o más que un lado y un ángulo.

c). - Tres datos: Tres lados, dos lados y un ángulo, un ángulo y dos lados.

Con tres datos, por ejemplo, tres lados, hay triángulos que, si se pueden construir, pero a pesar de que se den las magnitudes de tres lados estos no se pueden usar para construir un triángulo. Entonces, para saber, dadas las tres magnitudes de los lados de un supuesto triangulo, se debe de aplicar la llamada “Desigualdad del Triángulo”.

*“En matemáticas, la **desigualdad del triángulo** es un teorema que dice, aproximadamente, que el viaje de A á B á C nunca es más corto que el viaje de A á C.*

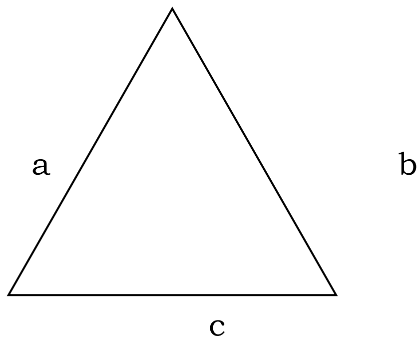
Aplica en espacios como el de números reales, el espacio euclidiano, y a otros espacios. Dicho más generalmente, se aplica en todo espacio de producto interno.

*En matemáticas, la **desigualdad del triángulo** es un teorema que dice, aproximadamente, que el viaje de A á B á C nunca es más corto que el viaje de A á C.*

Aplica en espacios como el de números reales, el espacio euclidiano, y a otros espacios. Dicho más generalmente, se aplica

<u>en todo espacio de producto interno.</u> (Ver apartado "Desigualdad del Triángulo" de esta Secuencia Didáctica)

Es decir, dadas las magnitudes de los tres lados de un supuesto triángulo se debe de cumplir que:



$$a+b>c$$
$$a+c>b$$
$$b+c>a$$

Con tan solo que, una de las desigualdades no se cumpla, el supuesto <u>triángulo es no construible.</u>

Ejemplos:

Sean a, b y c las magnitudes de los lados de un triángulo, verificar que el triángulo sea construible:

i). - a = 3, b = 4 y c = 5.

3 + 4 > 5 ok

3 + 5 > 4 ok

4 + 5 > 3 ok

Conclusión: El triángulo si se puede construir.

i). - a = 1, b = 2 y c = 3.

1 + 2 > 3 no se cumple

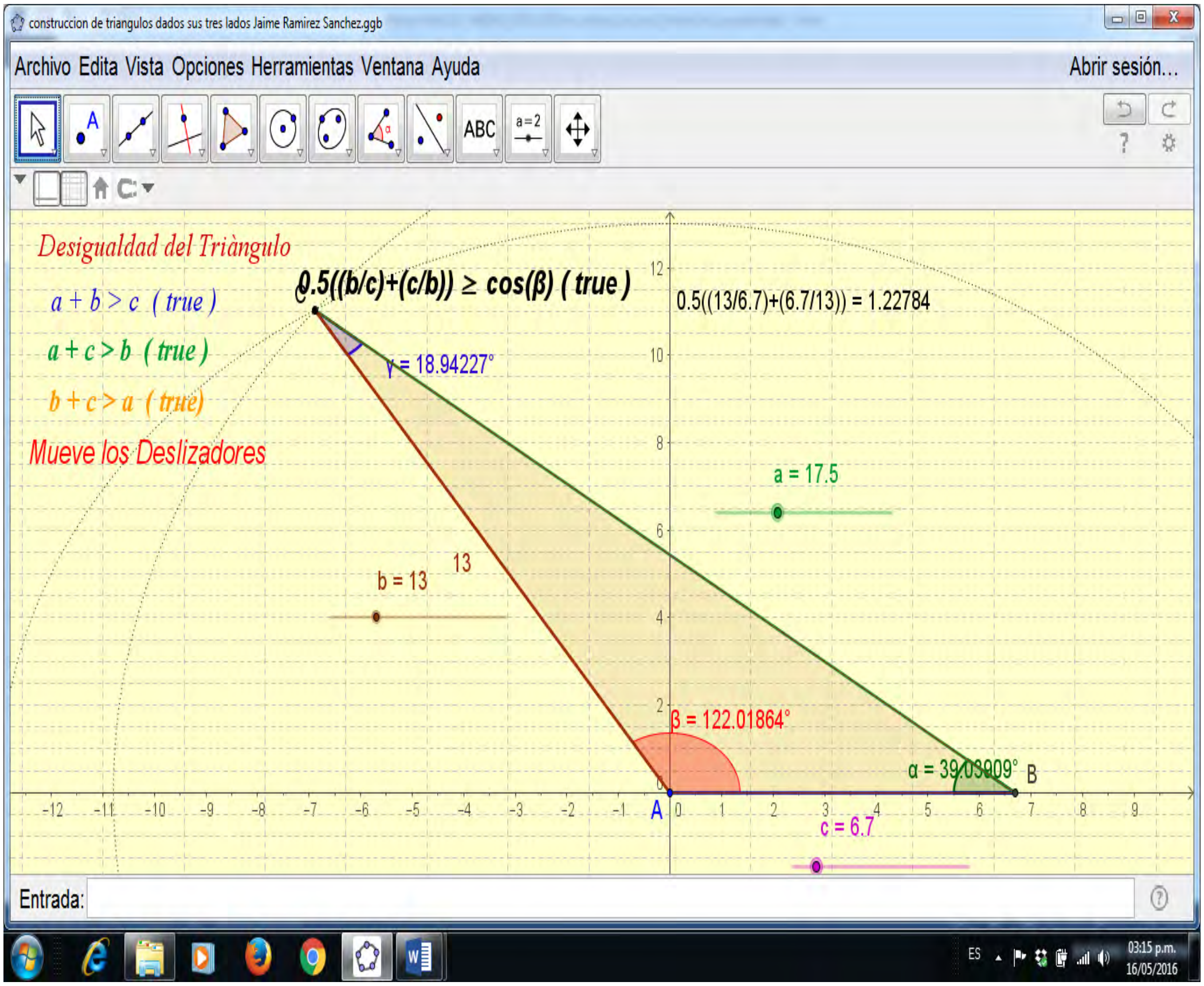
1 + 3 > 2 ok

2 + 3 > 1 ok

Conclusión: El triángulo no se puede construir.

Ver siguiente archivo en Geogebra:

[clasificacion de un triangulo por 3 lados (bueno).xlsx]

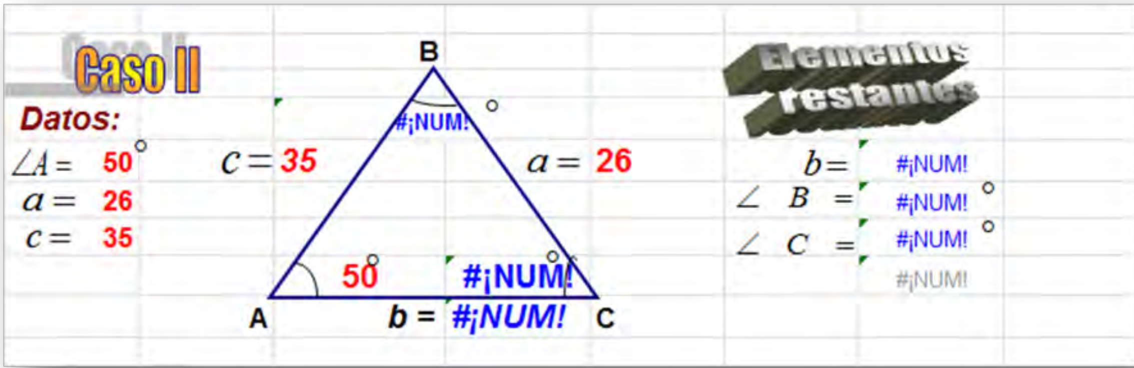


Con tres datos, por ejemplo, dos lados y un ángulo, hay triángulos que, si se pueden construir, pero en algunos casos, a pesar de que se den las magnitudes de dos lados y un ángulo, estos no se pueden usar para construir un triángulo. Entonces, para saber, si un triángulo es construible o no, dadas las dos magnitudes de los lados, de un supuesto triangulo y un ángulo, se deben de aplicar la ley de los cosenos o la ley de los senos.

Ejemplos:

Sea a y c las magnitudes de los lados de un triángulo y ∠A un ángulo no comprendido entre los lados a y c, verificar que el triángulo es construible: (ver figura siguiente)

i).- a = 26, c = 35 y ∠A = 50°.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

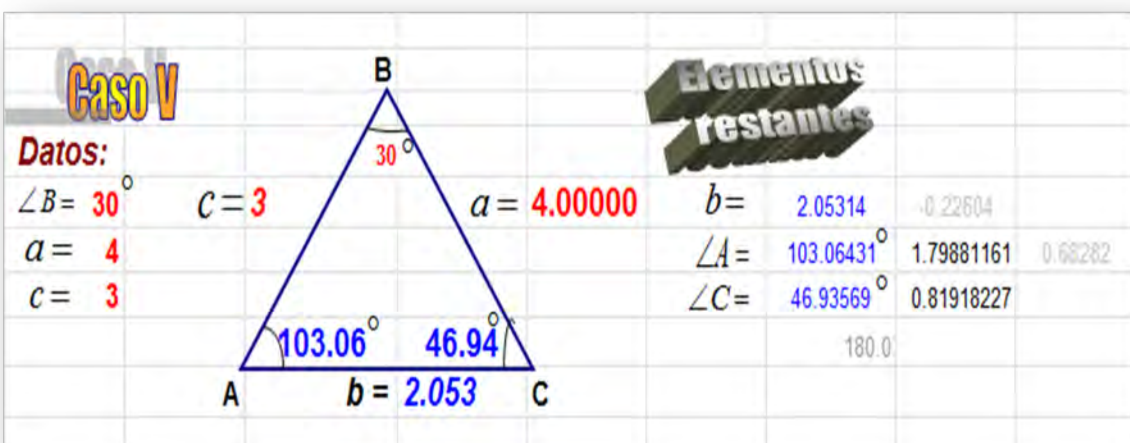
$$\frac{26}{\operatorname{sen} 50°}=\frac{35}{\operatorname{sen} C}$$

$$\angle C = \operatorname{arc\,sen}\left[\frac{35}{26} * \operatorname{sen}\ 50°\right] = \operatorname{arc\,sen}(1.0312137)$$

$$\therefore\ \angle C\ \ No\,existe$$

El triángulo no se puede construir.

ii).- a = 4, c = 4 y ∠B = 30°.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(B)$$
$$b^2 = 4^2 + 3^2 - 2 * 4 * 3 * \cos(30°) = 25 - 24 * \cos(30°)$$
$$b = 2.05314157$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(A) \therefore \cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c} \therefore \angle A = arc\,Cos\left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 * b * c}\right] =$$
$$\angle A = arc\,Cos\left[\frac{2.05314157^2 + 3^2 - 4^2}{2 * 2.05314157 * 3}\right] = 103.06431°$$
$$\angle B = 180° - 103.06431 - 30° = 46.93569°$$

El triángulo si se puede construir.

Conclusiones:

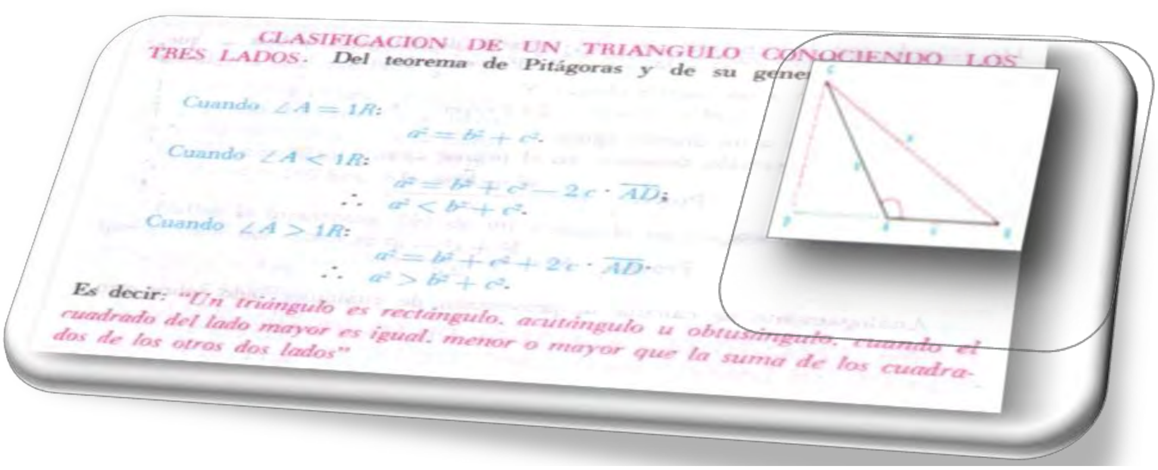
Se explicó que para que un triángulo se pueda construir, dados, dos de sus lados y un ángulo, estos lados se pueden tomar en cualquier orden, excepto el ángulo, el cual debe de ser el comprendido entre los dos lados. Lo cual generó el ***principio de l. a. l.***

También cunado se dan como datos dos ángulos y un lado, estos ángulos se pueden tomar en cualquier orden, excepto el lado, el cual debe de ser el adyacente a los dos ángulos. Lo cual generó el ***principio de a. l. a***.

Finalmente, cuando se dan como datos los tres ángulos, esto solo garantiza que se pueden construir una infinidad de triángulos, lo que dio entrada al concepto de semejanza entre triángulos.

2.- Clasificación de un triángulo por medio del conocimiento de sus lados

Del Teorema de Pitágoras y de su generalización:



CLASIFICACION DE UN TRIANGULO CONOCIENDO LOS TRES LADOS. Del teorema de Pitágoras y de su gene[...]

Cuando $\angle A = 1R$:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Cuando $\angle A < 1R$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \overline{AD};$$
$$\therefore \quad a^2 < b^2 + c^2.$$

Cuando $\angle A > 1R$:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot \overline{AD}.$$
$$\therefore \quad a^2 > b^2 + c^2.$$

Es decir: *"Un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo, cuando el cuadrado del lado mayor es igual, menor o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados"*

Más problemas:

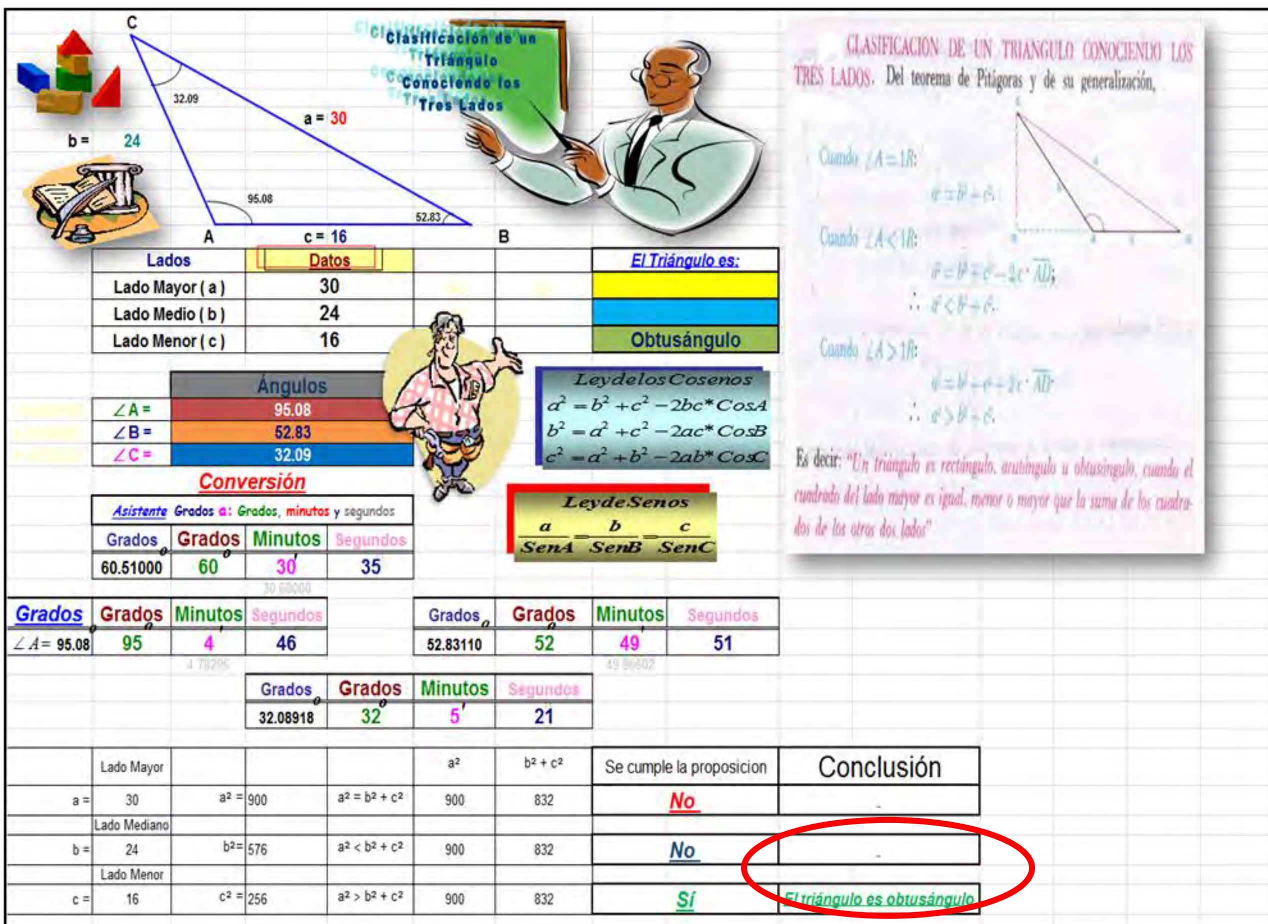
i). - Clasificar el triángulo cuyos lados miden: (***sugerencia primero verifica si el triángulo se puede construir)***

a = 50 cm, b = 40 cm y c = 30 cm.

	Lado Mayor				a^2	$b^2 + c^2$	Se cumple la proposicion	Conclusión
a =	50	$a^2 =$	2500	$a^2 = b^2 + c^2$	2500	2500	Sí	El triángulo es rectángulo
	Lado Mediano							
b =	40	$b^2 =$	1600	$a^2 < b^2 + c^2$	2500	2500	No	-
	Lado Menor							
c =	30	$c^2 =$	900	$a^2 > b^2 + c^2$	2500	2500	No	-

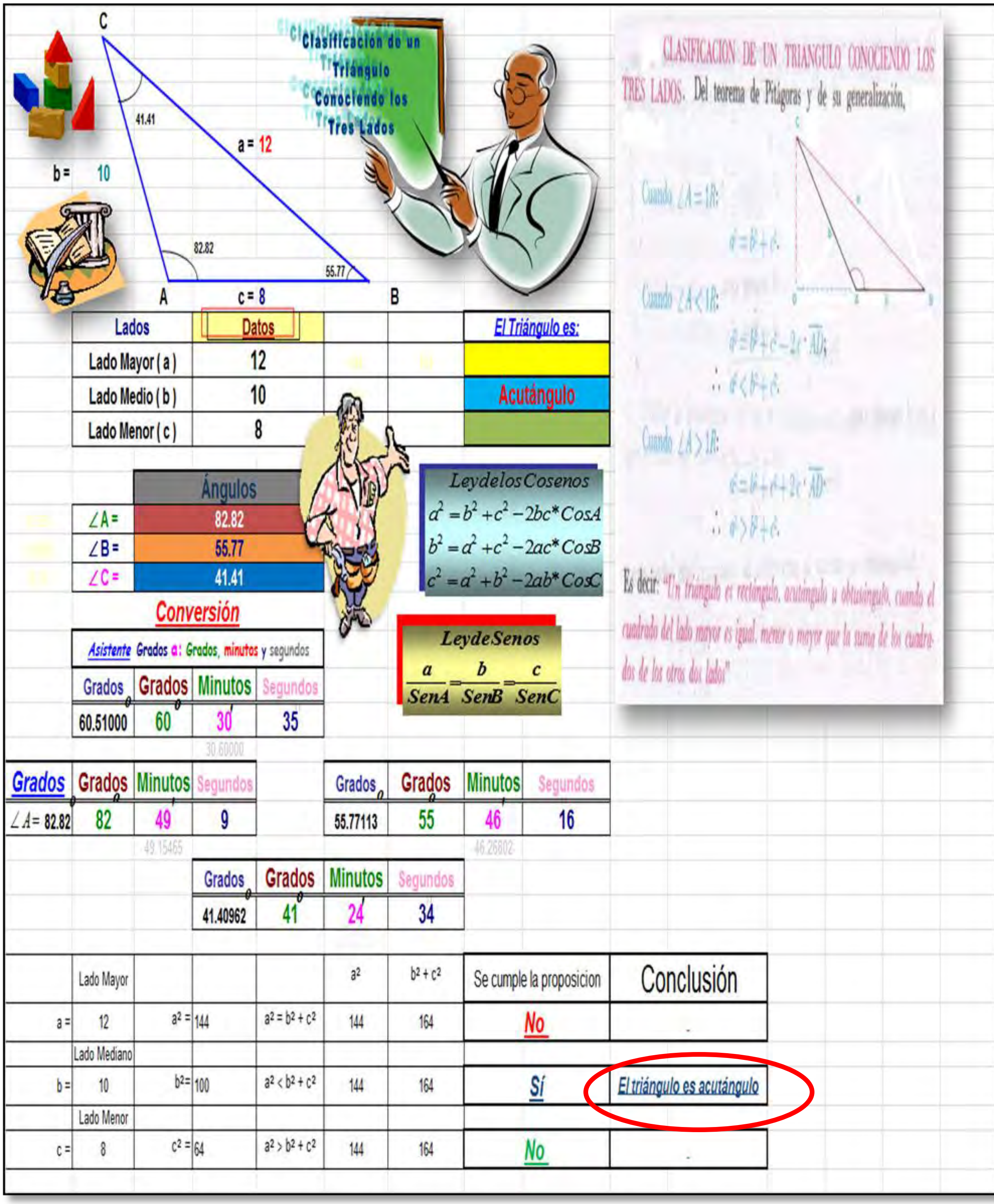
ii). - Clasificar el triángulo cuyos lados miden:

a = 30 cm, b = 24 cm y c = 16 cm.



iii). - Clasificar el triángulo cuyos lados miden:

a = 12 cm, b = 10 cm y c = 8 cm.



[clasificacion de un triangulo por 3 lados (bueno).xlsx]

GeoGebra - área de triangulos dados sus tres lados.ggb

Propiedades del triángulo: Suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.

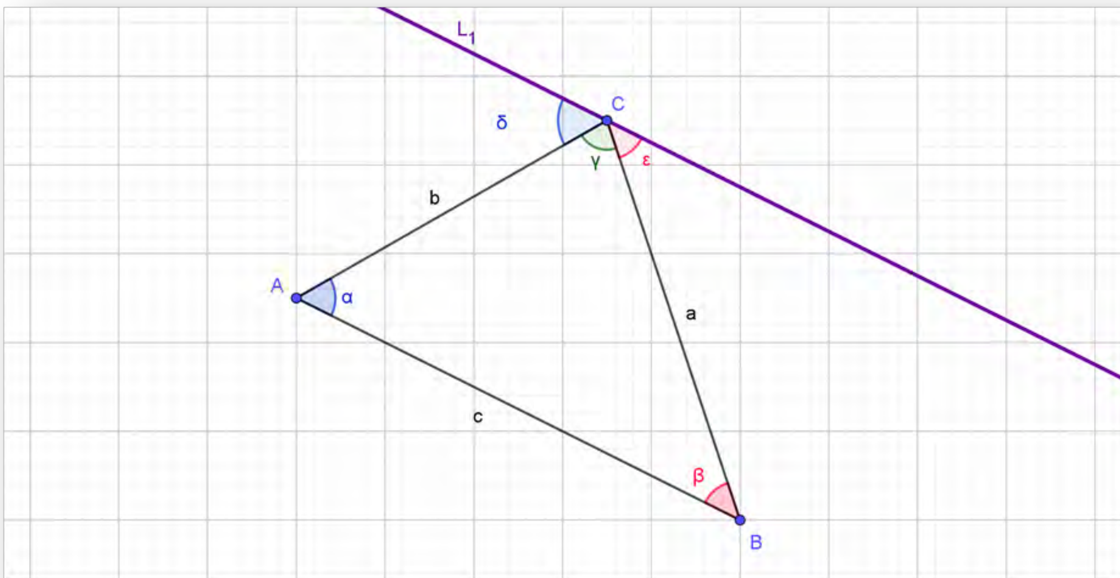
Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente.

Problemas de aplicación.

Suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

Dado un ΔABC cualquiera, demostrar que la suma de los ángulos interiores es igual a 180°, es decir α+γ+β=180° (ver figura siguiente)

Construir el ΔABC, por el vértice C trazar una recta paralela al lado $\overline{AB}$, ver figura



siguiente

En la figura anterior se puede observar que:

$L_1 II\ \overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$ *es una transversal, entonces,* $\angle\alpha = \angle\delta$, *por ser angulos alternos internos formados por dos rectas paralelas y una transversal.*

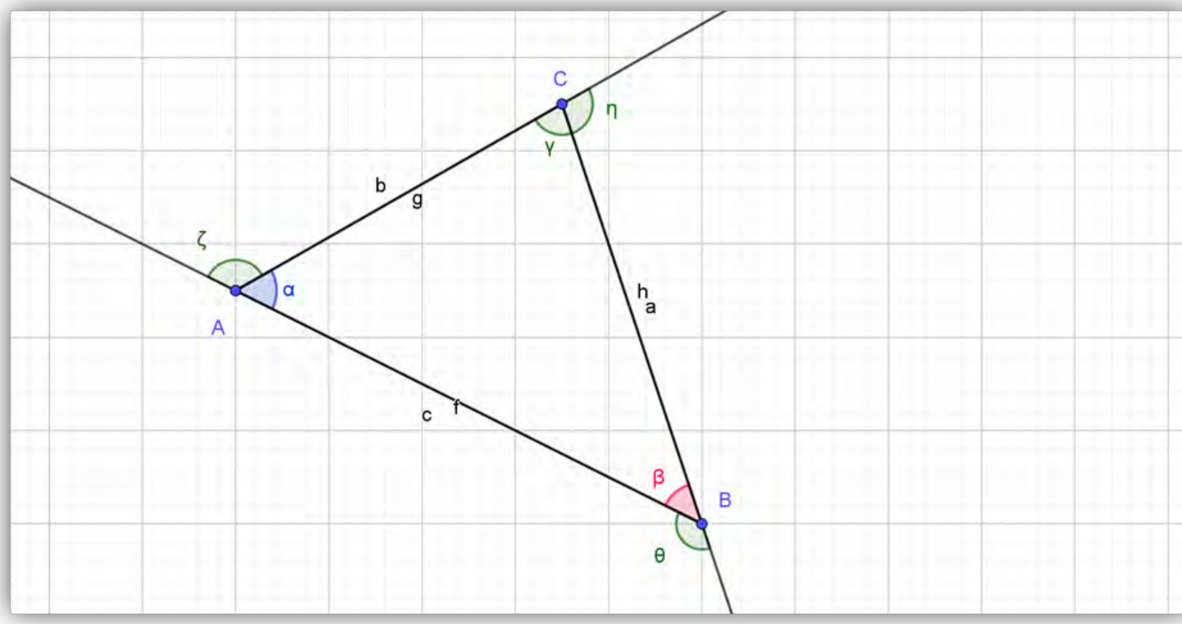
$L_1 II\ \overline{AB}$ *y* $\overline{BC}$ *es una transversal, entonces,* $\angle\beta = \angle\varepsilon$, *por ser angulos alternos internos formados por dos rectas paralelas y una transversal.*

Como queremos demostrar que $\alpha + \gamma + \beta = 180°$, *tambien sabemos que* $\delta + \gamma + \varepsilon = 180°$ (*por ser angulos que se forman del mismo lado de una linea recta*), *pero* $\angle\alpha = \angle\delta$ *y que* $\angle\beta = \angle\varepsilon$, *usando la ecuacion* $\delta + \gamma + \varepsilon = 180°$ *y sustituyendo sus equivalentes nos queda que* $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ *L.Q.D.D.*

Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.

Dado un ΔABC cualquiera, demostrar que la suma de los ángulos exteriores es igual a 360°, es decir $\zeta+\eta+\theta=360°$ (ver figura siguiente)

Construir el ΔABC, prolongar los lados del Δ, ver figura siguiente.



En la figura anterior se puede observar que :

$\angle\alpha+\angle\zeta=180°$, *por ser angulos suplementarios, tambien*

$\angle\gamma+\angle\eta=180°$, *por ser angulos suplementarios y* $\angle\beta+\angle\theta=180°$, *por ser angulos suplementarios,*

entonces sumando

$\angle\alpha+\angle\zeta=180°$

$\angle\gamma+\angle\eta=180°$

$\underline{\angle\beta+\angle\theta=180°}$

$\angle\alpha+\angle\gamma+\angle\beta+\angle\zeta+\angle\eta+\angle\theta=540°$, *pero* $\angle\alpha+\angle\gamma+\angle\beta=180°$, *entonces*

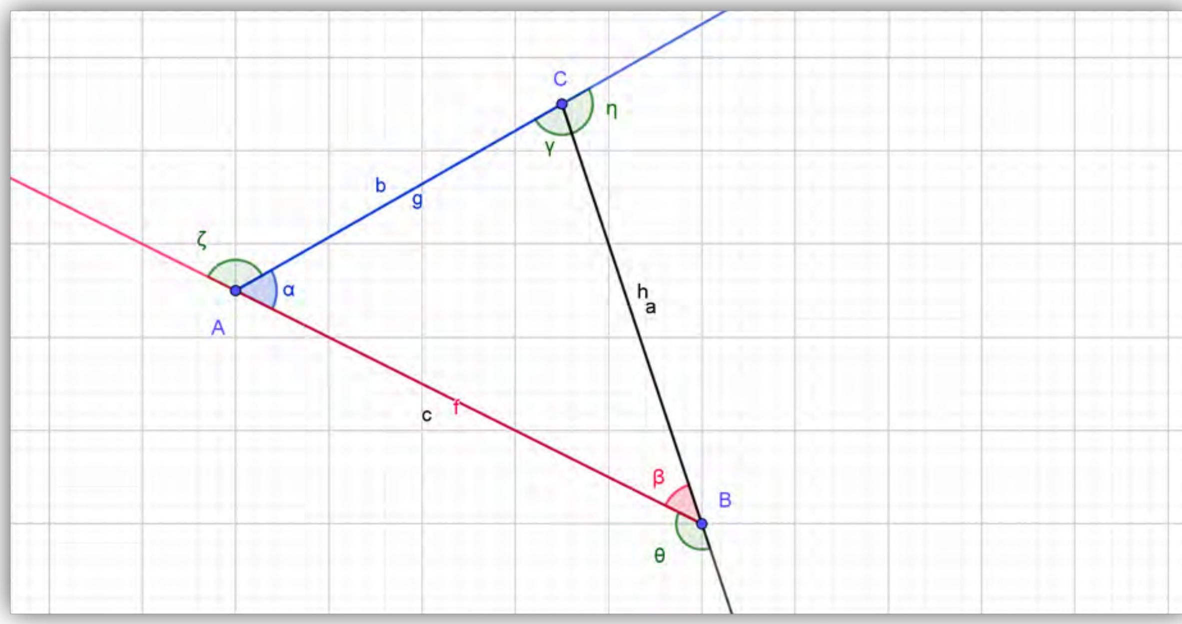
$180°+\angle\zeta+\angle\eta+\angle\theta=540° \therefore \angle\zeta+\angle\eta+\angle\theta=540°-180°$,

entonces, $\angle\zeta+\angle\eta+\angle\theta=360°$ *L.Q.D.D.*

Suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente.

Dado un ΔABC cualquiera, demostrar que la suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente, es decir $\alpha+\gamma=\theta$ (ver figura siguiente)

Construir el ΔABC, prolongar los lados del Δ, ver figura siguiente



En la figura anterior se puede observar que:

$\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 180°$, *y* $\angle\beta + \angle\theta = 180°$, *por ser angulos suplementarios,*

entonces igualando

$\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = \angle\beta + \angle\theta$, *reduciendo*

$\angle\alpha + \angle\gamma = \angle\theta$ L.Q.D.D.

Rectas notables del triángulo: Mediatriz, bisectriz, mediana y altura.

Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.

Construcción de las rectas y puntos notables.

Distancia de un punto a una recta.

Propiedades del triángulo isósceles.

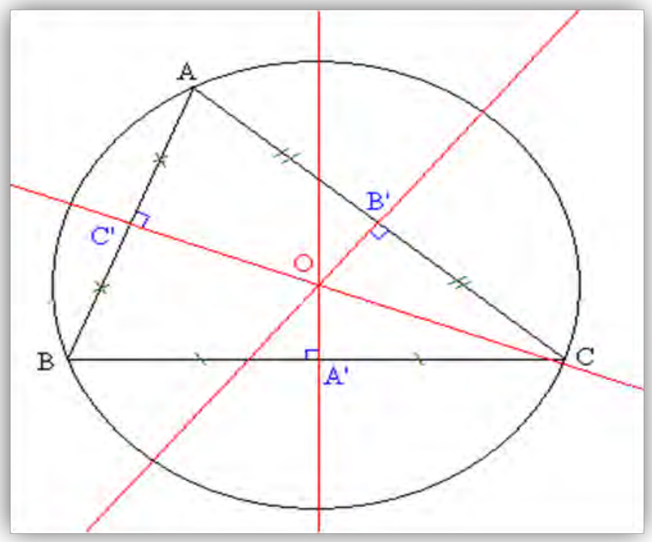
Los ángulos adyacentes a la base son iguales.

La altura y la mediana de la base coinciden.

La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

La **mediatriz** de un segmento [AB] es la recta de los puntos del plano equidistantes de A y B. Por razones de simetría, la mediatriz corta el segmento [AB] por su mitad y perpendicularmente.

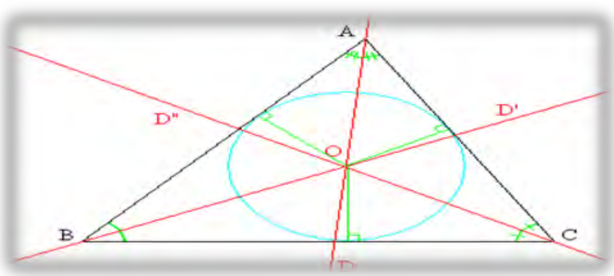
En un triángulo ABC, las mediatrices de los tres lados se cortan en un único punto, el **Circuncentro** – **O,** en la figura - que es centro del **círculo circunscrito** al triángulo.



Ver archivo: GeoGebra - mediatrices a los lados de un triángulo.ggb

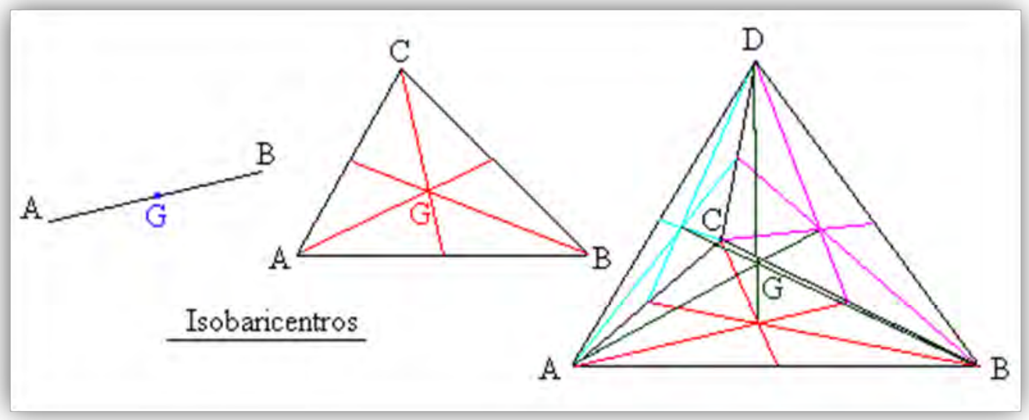
En un triángulo, los tres ángulos definen tres bisectrices (interiores).

Teorema: Las tres bisectrices del triángulo se cortan en un único punto, que equidista de los lados y centro del **círculo inscrito** en el triángulo (**incentro**).



Ver archivo: GeoGebra - bisectrices a los angulos de un triángulo.ggb

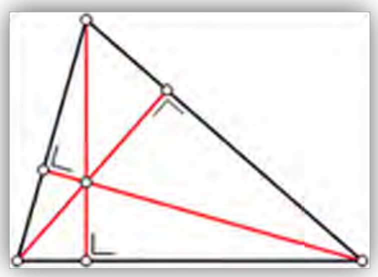
El b**aricentro** de {A, B, C} es el centro de gravedad del triángulo ABC, suponiéndole una densidad superficial uniforme (por ejemplo, al recortar un triángulo en una hoja de cartón). Corresponde al punto donde se cortan las medianas. El triángulo de cartón se mantendrá en equilibrio (estable) en la punta de un lápiz o de un compás si éste está colocado justo debajo del centro de masa. El baricentro de un triángulo tiene además la propiedad de pertenecer a la recta de Euler.



Ver archivo: GeoGebra - medianas de un triángulo.ggb

Se denomina **ortocentro** al punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo.

El término deriva de orto, *recto*, en referencia al ángulo formado entre las bases y las alturas



Ortocentro.

Ver archivo: GeoGebra - alturas de un triángulo.ggb

Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes (*Teorema del triángulo isósceles*).

Sea ABC un triángulo isósceles en que AC es igual a BC.

Demostrar que: $\angle A = \angle B$

Trazar la bisectriz CD del $\angle ACB$, ahora en los triángulos ADC y BDC,

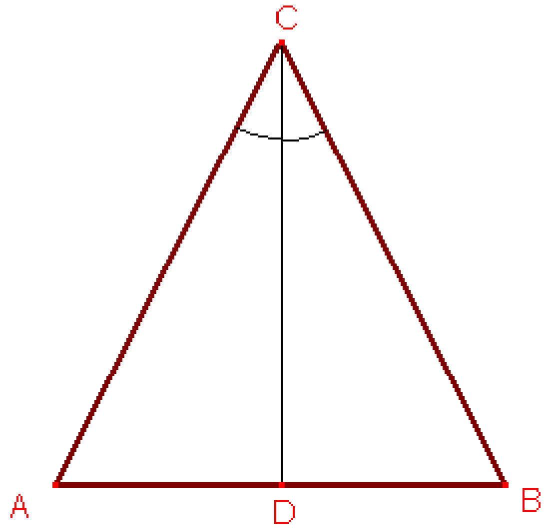
AC = BC Por hipótesis

CD = CD Por Identidad

$\angle ACD = \angle DCB$ Por construcción

$\therefore \Delta\ ADC \cong \Delta\ BDC$ Por el criterio de congruencia l.a.l.

$\therefore \angle\ A \cong \angle\ B$ Partes homologas de 2 figuras congruentes son iguales



(Teorema de Tales: Puente de los Asnos)

Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces es un triángulo isósceles (*Recíproco del teorema del triángulo isósceles*).

- Triángulo isósceles **(del griego ἴσος "igual" y σκέλη "piernas", es decir, "con dos piernas iguales"), si tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida. (Tales de Mileto, filósofo griego, demostró que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales, estableciendo así una relación entre longitudes y ángulos; a lados iguales, ángulos iguales).**

Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales; esto no descarta que los tres lados sean iguales, de modo que todo triángulo equilátero sea isósceles, pero no se cumple el enunciado recíproco.

Sea el triángulo **ABC** isósceles, donde **b** = **c** entonces los ángulos opuestos son iguales, i.e **B = C**. También se cumple que **B' = C'** siendo estos los ángulos externos. Además, se cumplen las igualdades

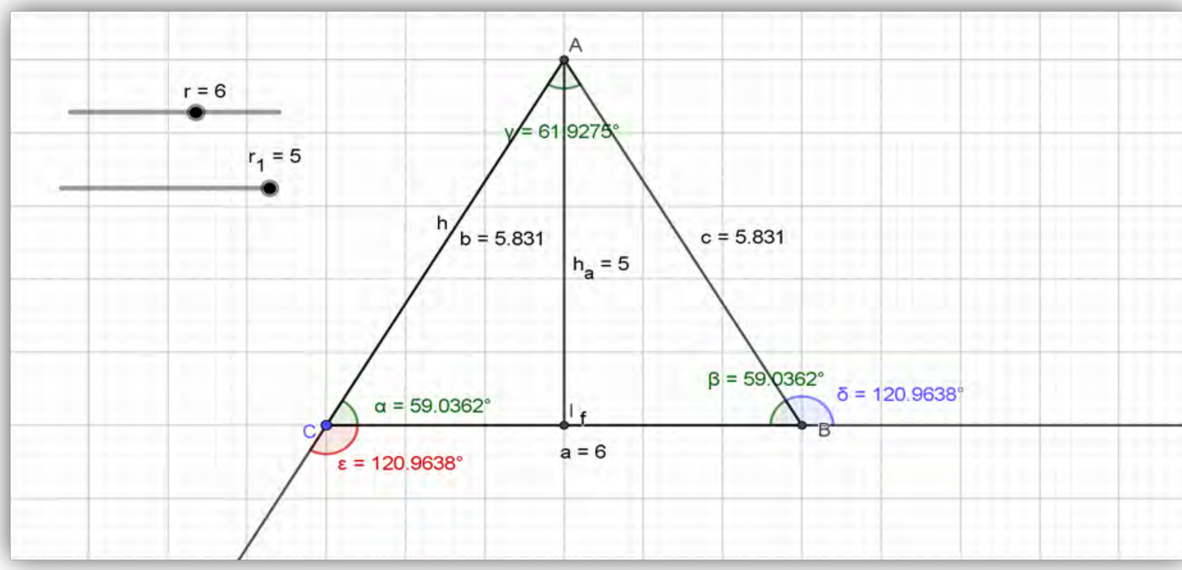
A + 2B = A +2C = 180º;

A' + 2B' = A' + 2C' = 360º; A' = 2C = 2B; B'=C'=A+B= A+C

Propiedades del triángulo isósceles.
Los ángulos adyacentes a la base son iguales.
La altura y la mediana de la base coinciden.
La bisectriz del ángulo formado por los dos lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.

$m_a = h_a = v_A = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ donde m_a, h_a, v_A son la mediana, altura del lado **a** y bisectriz de su ángulo **A** opuesto.

Ver figura siguiente.



$$h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} = m_a = v_a$$

Para nuestro caso

$a = 6, b = 5.381,$ *entonces*

Magnitud de la mediana del lado a (m_a)

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4*(5.381)^2 - 6^2} \approx 5$$

Altura de la base a (h_a)

$$h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4*(5.381)^2 - 6^2} \approx 5$$

magnitud de la Bisectriz del ángulo A (v_a)

$$v_a = \frac{1}{2}\sqrt{4*(5.381)^2 - 6^2} \approx 5$$

Polígonos

Polígonos regulares e irregulares
Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores.
Número de triángulos que se forman al interior del polígono.
Perímetro y área.
Fórmula de Herón.

Polígono

Figura geométrica plana, limitada por una poligonal cerrada que no se cortan a sí mismas.

Clasificación de los Polígonos

Los polígonos se clasifican básicamente en: polígonos regulares y polígonos irregulares.

Polígono Regular

Polígono en el cual todos sus lados son de igual longitud, y todos sus vértices están circunscritos en una circunferencia. Se clasifican en:

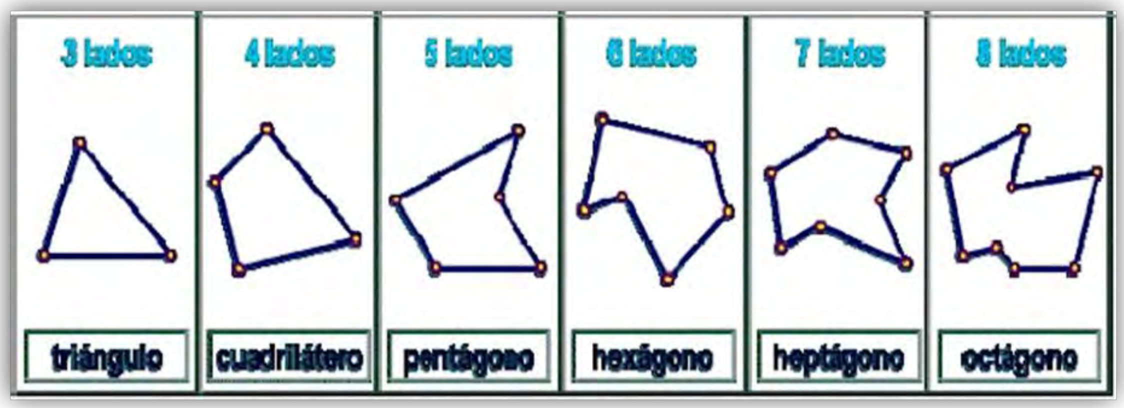
- Triángulo equilátero: polígono regular de 3 lados,
- Cuadrado: polígono regular de 4 lados,
- Pentágono regular: polígono regular de 5,
- Hexágono regular: polígono regular de 6 lados,
- Heptágono regular: polígono regular de 7 lados,
- Octágono regular: polígono regular de 8 lados… y así sucesivamente.

Polígono Irregular

Polígono en el cual sus lados no son de igual longitud y/o sus vértices no están contenidos en una circunferencia. De acuerdo al número de sus lados, se denominan:

- Triángulo: polígono de 3 lados,
- Cuadrilátero: polígono de 4 lados,
- Pentágono: polígono de 5 lados,
- Hexágono: polígono de 6 lados,
- Heptágono: polígono de 7 lados,

- Octágono: polígono de 8 lados... y así sucesivamente.



POLÍGONO CONSTRUIBLE CON REGLA Y COMPÁS.

Algunos polígonos regulares (un ejemplo es el pentágono) son fácilmente construibles con regla y compás; otros no. Esto nos lleva a la pregunta: ¿es posible construir cualquier polígono regular con regla y compás?

El primer avance relevante para resolver este problema se debe a K. F. Gauss, que mostró en 1801 que un polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás siempre que los factores primos impares de n sean primos de Fermat distintos. Gauss conjeturó que esta condición debía ser también necesaria, pero no aportó una demostración de este hecho, que fue lograda por Pierre Wantzel en 1837.

Teorema: (Construcción de polígonos regulares con regla y compás)

> Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás en el sentido expuesto **si y sólo si** la descomposición en factores primos de n es de la forma
>
> $n = 2^r \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$
>
> siendo $r \geq 0$ y los p_i primos de **Fermat** distintos entre sí (recordemos que un primo de Fermat es un número primo que sea de la forma $2^{2^n} + 1$).

Es decir, que un polígono regular es construible si el número de lados del mismo es una potencia de 2, un primo de Fermat o producto de una cierta potencia de 2 (pudiendo ser $2^0 = 1$) y varios primos de Fermat distintos. Y lo mejor del teorema es que es un **si y sólo si**, es decir, tenemos totalmente determinados los polígonos regulares que podemos construir con regla y compás. Así el triángulo ($3 = 2^{2^0} + 1$), el cuadrado ($4 = 2^2$), el pentágono ($5 = 2^{2^1} + 1$) y el hexágono ($6 = 2 \cdot (2^{2^0} + 1)$ son construibles con regla y compás pero el heptágono regular ($7 \neq 2^{2^n} + 1, \forall n$) **no lo es**. Continuando, el octógono regular ($8 = 2^3$) sí es construible pero el eneágono regular ($9 = 3^2 \neq 2^{2^n} + 1, \forall n$) **no lo es**.

LOS POLÍGONOS REGULARES DE 3, 6, 12, 24,... (EN GENERAL, LOS DE $3*2^n$, CON N EN LOS ENTEROS NO NEGATIVOS) LADOS SON CONSTRUIBLES CON REGLA Y COMPÁS.

LOS POLÍGONOS REGULARES DE 4, 8, 16, 32,... (EN GENERAL, LOS DE 2^n CON N ≥ 2) LADOS SON CONSTRUIBLES CON REGLA Y COMPÁS.

EL P $Primo\,de\,P.\,Fermat$ **GONOS SE PUEDEN OBSERVAR EN LA SIGUIENTE '** $2^{2^n}+1$

n	
0	3
1	**5**
2	17
3	257
4	65537
5	4294967297
6	1.84467E+19
7	3.40282E+38
8	1.15792E+77
9	1.3408E+154
10	#¡NUM!
11	#¡NUM!
12	#¡NUM!
13	#¡NUM!
14	#¡NUM!
15	#¡NUM!
16	#¡NUM!
17	#¡NUM!
18	#¡NUM!

Problemas resueltos y propuestos

Construcción de polígonos regulares

POLÍGONO CONSTRUIBLE

Algunos polígonos regulares (un ejemplo es el pentágono) son fácilmente construibles con regla y compás; otros no. Esto nos lleva a la pregunta: ¿es posible construir cualquier polígono regular con regla y compás?

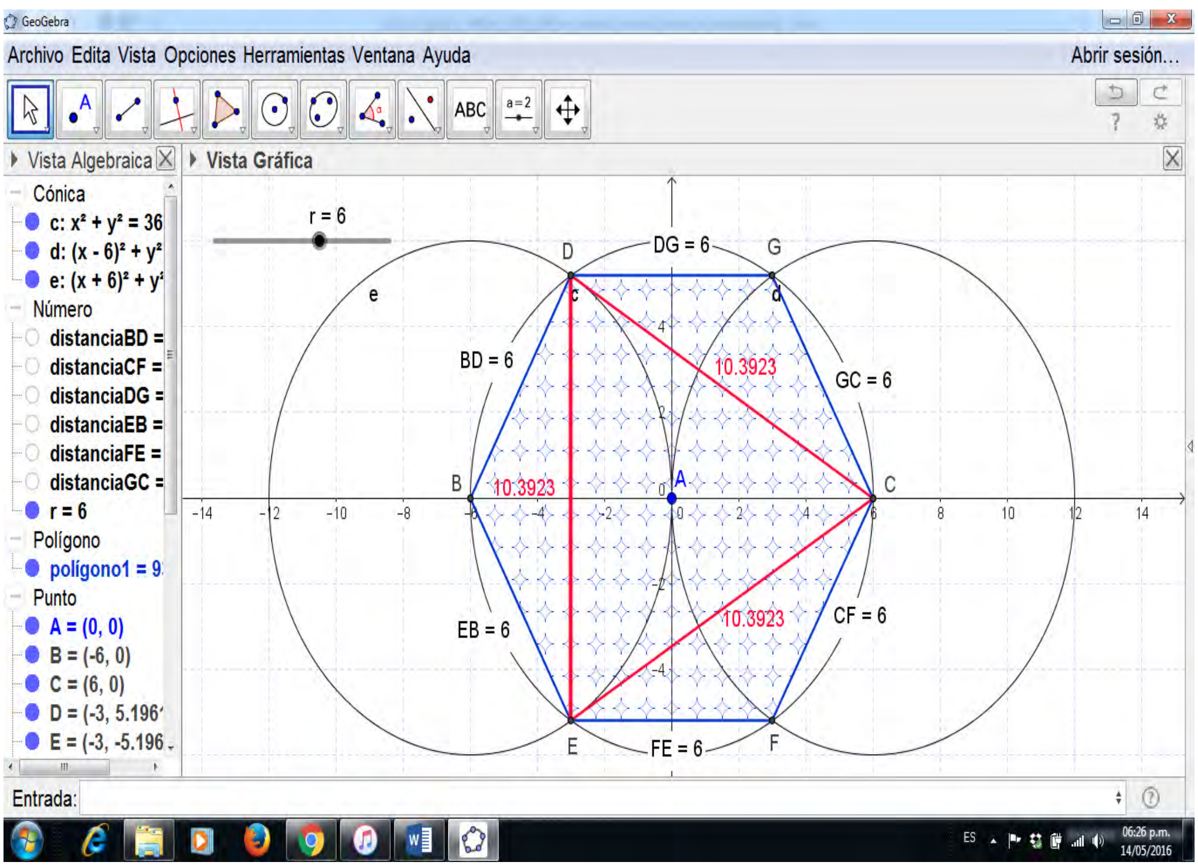
El primer avance relevante para resolver este problema se debe a K. F. Gauss, que mostró en 1801 que un polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás siempre que los factores primos impares de n sean primos de Fermat distintos. Gauss conjeturó que esta condición debía ser también necesaria, pero no aportó una demostración de este hecho, que fue lograda por Pierre Wantzel en 1837.

TRAZAR UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO Y UN HEXÁGONO REGULAR.

Traza 3 circunferencias de igual radio, con centros en los puntos A, B y C, localiza los puntos de intersección las tres circunferencias D, E, F y G.

Un caso: une los puntos B con D, D con G, G con C, C con F, F con E y E con B, formándose el hexágono pedido.

Otro caso: une los puntos E con D, D con C y C con E, formándose el triángulo equilátero solicitado.



Problema:

1.-En la construcción del hexágono regular construye un dodecágono regular.

2.- En la construcción del dodecágono regular construye un cuadrado.

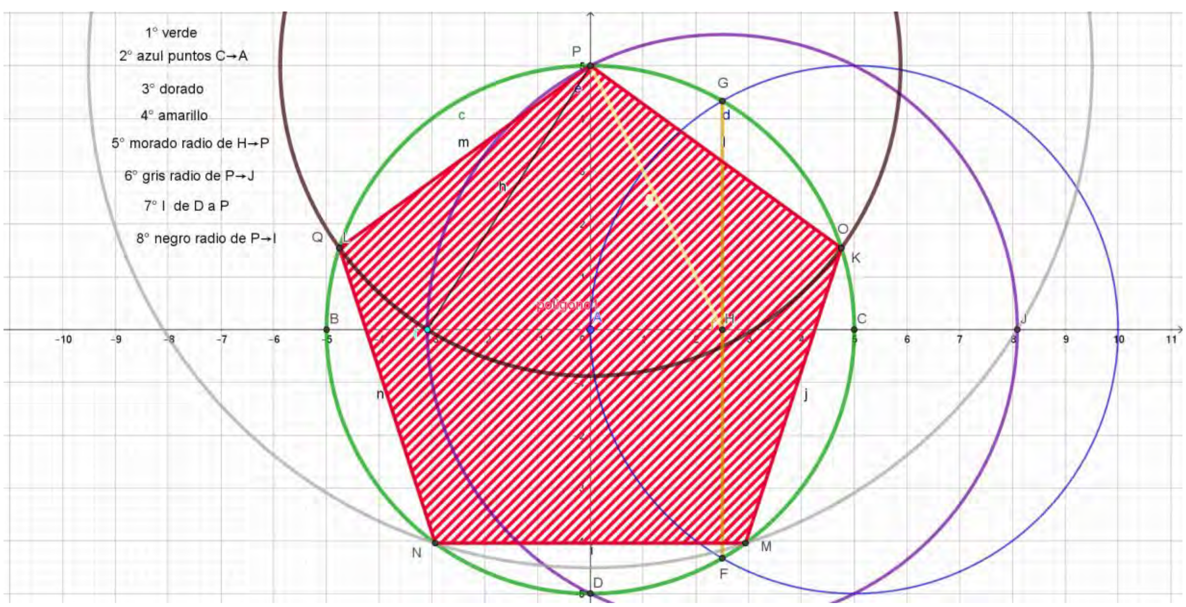
3.- En la construcción del cuadrado construye un octágono regular.

Y, SI SEGUIMOS BISECANDO ÁNGULOS, VAMOS A PODER CONSTRUIR POLÍGONOS REGULARES DE 16, 32, 64, …, LADOS

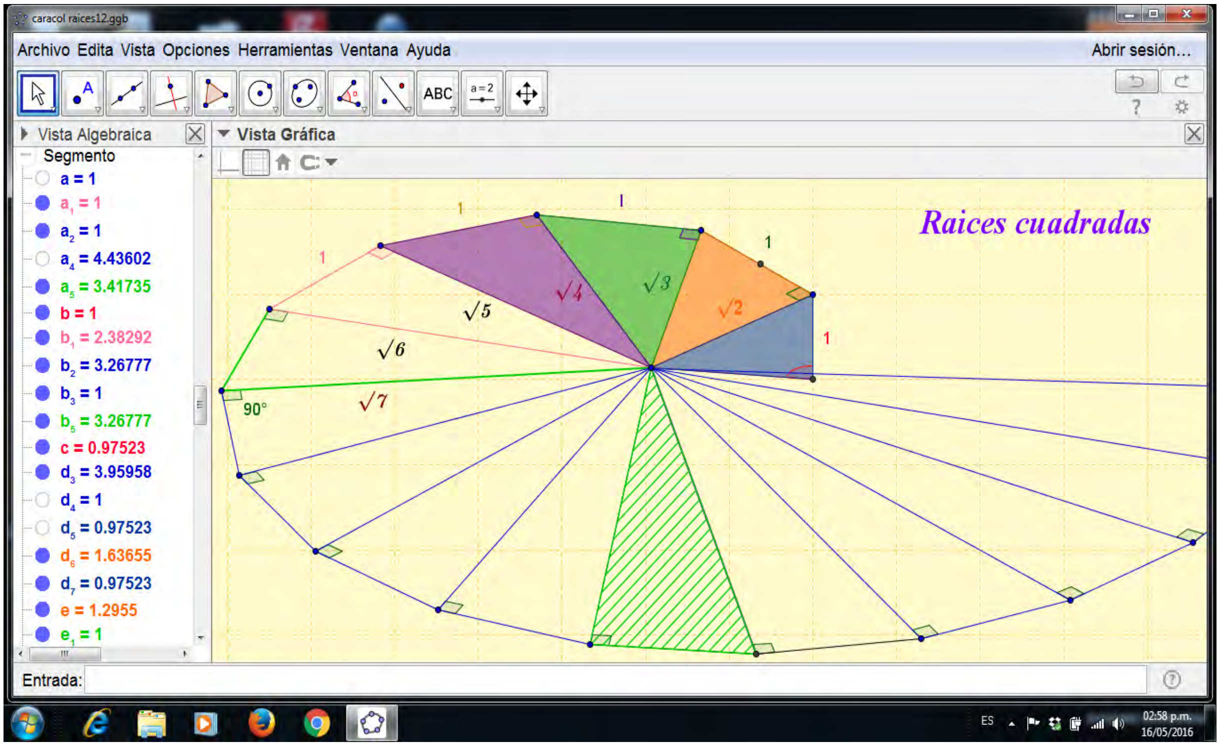
LOS POLÍGONOS REGULARES DE 3, 6, 12, 24,… (EN GENERAL, LOS DE $3*2^n$, CON N EN LOS ENTEROS NO NEGATIVOS) LADOS SON CONSTRUIBLES CON REGLA Y COMPÁS.

LOS POLÍGONOS REGULARES DE 4, 8, 16, 32,… (EN GENERAL, LOS DE 2^n CON N ≥ 2) LADOS SON CONSTRUIBLES CON REGLA Y COMPÁS.

4.- Construcción del pentágono regular



Construcción geométrica de algunos números irracionales algebraicos.

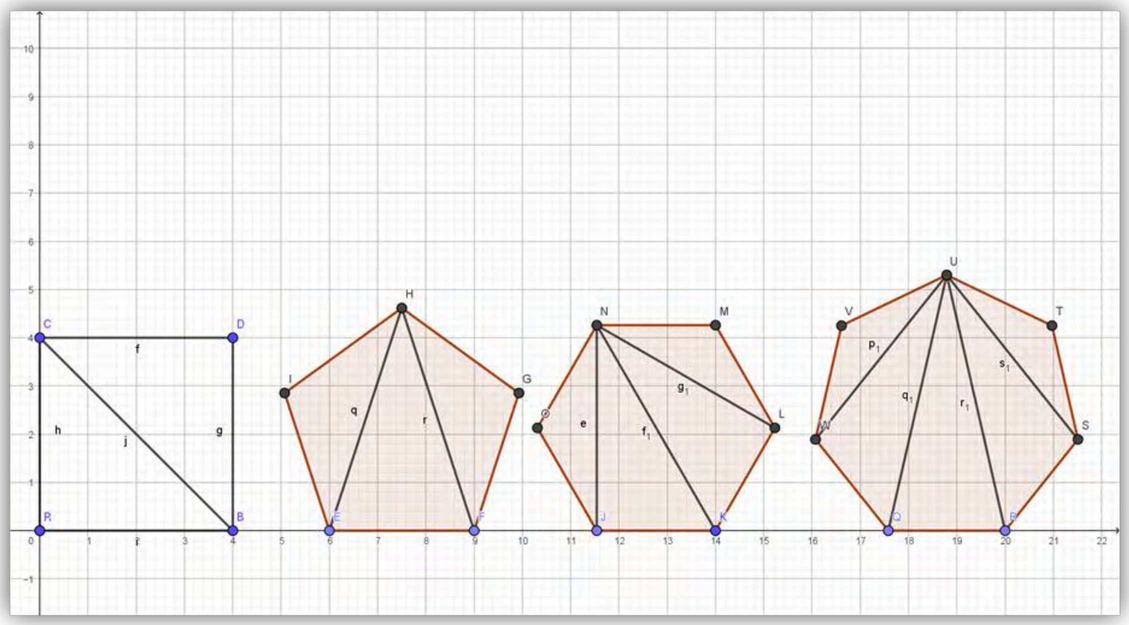


Propiedades de los polígonos: Suma de los ángulos interiores.

La suma de ángulos internos en un triángulo es de 180°.

La suma de ángulos internos en un cuadrado es de 360°, veamos el porqué de esta afirmación, ver la siguiente figura:

Tomemos un solo vértice de la figura y tracemos todas las diagonales que pasen por este único solo vértice, como podemos observar, en el cuadrado solo se puede trazar una diagonal, como sabemos la suma de los ángulos internos en un triángulo es de 180°, pero en el cuadrado con la diagonal se formaron 2 triángulos, por lo tanto la suma de ángulos internos en un cuadrado es de 2(180°)=360°, usemos esta técnica para determinar la suma de ángulos internos en un pentágono, hexágono, heptágono y así para un polígono de n lados, ver figura siguiente:



La suma de ángulos internos en un pentágono es de 3(180°) =540°.

La suma de ángulos internos en un hexágono es de 4(180°) =720°.

La suma de ángulos internos en un heptágono es de 5(180°) =900°.

La suma de ángulos internos en un polígono de n lados es: (n-2) *180°

https://www.gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-iii-los-poligonos-regulares/

Ángulo externo (extremo) y el ángulo interno de un triángulo.

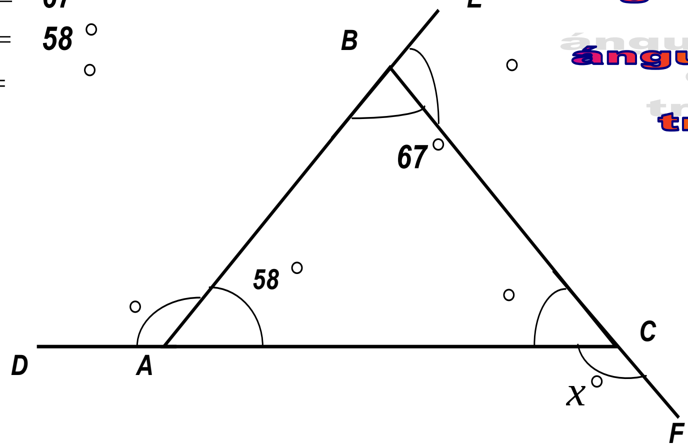
En los siguientes problemas hallar el valor del ángulo x.

Datos:

$\angle ABC = 67^\circ$

$\angle BAC = 58^\circ$

$\angle BCA = \ ^\circ$



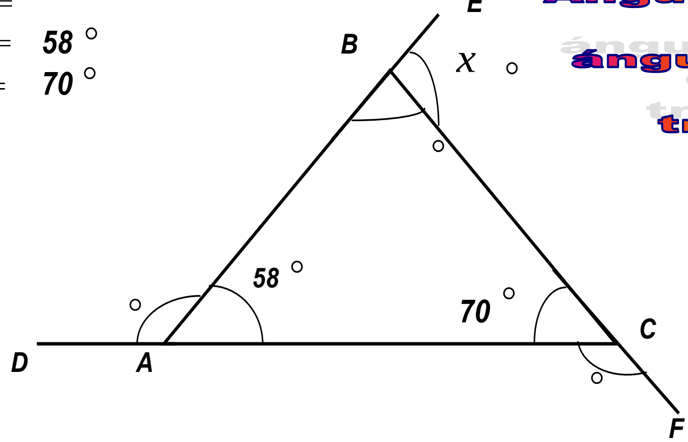
Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo

Datos:

$\angle ABC = \ ^\circ$

$\angle BAC = 58^\circ$

$\angle BCA = 70^\circ$



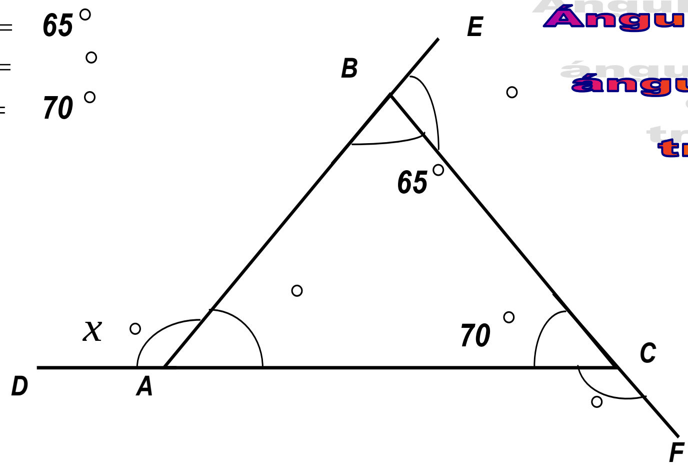
Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo

Datos:

$\angle ABC = 65^\circ$

$\angle BAC = \ ^\circ$

$\angle BCA = 70^\circ$



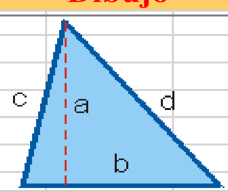
Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo

Perímetro y área.

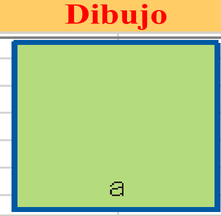
El perímetro es la suma de todos los lados de una figura es decir cada lado de una figura tiene un número y ese número representa cuanto mide el lado ejemplo tenemos un cuadrado su base es la línea de abajo y mide 4 cm eso quiere decir que si su base mide 4 cm los demás lados van a medir lo mismo porque como sus lados del cuadrado son iguales por eso todos los lados miden 4 cm, el perímetro en realidad es un contorno de una figura llamado línea que cada figura está formado por líneas y una línea tiene un número y si sumamos todas las líneas nos dará un resultado y obtenemos el perímetro de una figura, todos los lados de una figura van a medir lo mismo si tiene la figura sus lados iguales.

El área es un método para calcular las figuras, es un concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas unidades de medida denominadas unidades de superficie. El área es un concepto métrico que requiere que el espacio donde se define o especifique una medida. Para superficies planas, el concepto es más intuitivo. Cualquier superficie plana de lados rectos, por ejemplo un polígono, puede triangularse y se puede calcular su área como suma de las áreas de dichos triángulos. Ocasionalmente se usa el término "área" como sinónimo de superficie, cuando no existe confusión entre el concepto geométrico en sí mismo (superficie) y la magnitud métrica asociada al concepto geométrico (área).

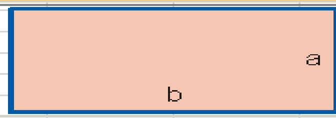
Perímetros y áreas de los polígonos

Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		P = Suma de los lados p = (b + c + d)/2	$A = \frac{b \cdot a}{2}$ $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p = semiperímero

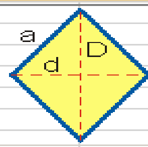
Datos:		Perímetro	área
lado a	30	71.58	207.250
lado b	25		
lado c	16.58		

Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Cuadrado		$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$

Datos:		Perímetro	área
lado a	5	20	25

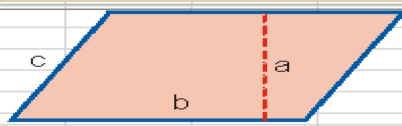
Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Rectángulo		$P = 2(b + a)$	$A = b \cdot a$

Datos:		**Perímetro**	**área**
lado a	*30*	*110*	*750*
lado b	*25*		

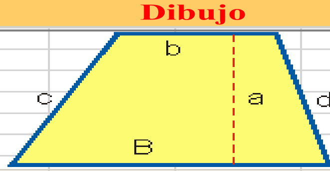
Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Rombo		$P = 4 \cdot a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$

Datos:		**Perímetro**	**área**
Diagonal D	*10*	*12*	*25*
Diagonal d	*5*		
lado a	*3*		

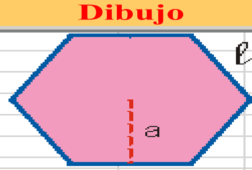
Perímetros y áreas de los polígonos

Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Romboide		$P = 2(b + c)$	$A = b \cdot a$

Datos:		**Perímetro**	**área**
Altura a	*30*	*83.16*	750.000
lado b	*25*		
lado c	*16.58*		

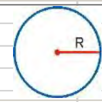
Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Trapecio		$P = B + c + b + d$	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$

Datos:		**Perímetro**	**área**
Altura a	*30*	*68.58*	623.700
Base B	*25*		
base b	*16.58*		
lado c	*12*		
lado d	*15*		

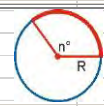
Nombre	Dibujo	Perímetro	Área
Polígono regular		$P = n\ell$	$A = \frac{1}{2} P \cdot a$

Datos:		**Perímetro**	**área**
# de lados	*30*	*750*	6217.500
lado	*25*		
apotema	*16.58*		

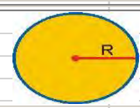
Longitud y área de figuras circulares

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Circunferencia		$L = 2\pi R$	

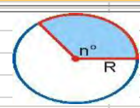
Datos:		longitud	área
Radio	*30*	*188.4955592*	

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Arco		$L = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ$	

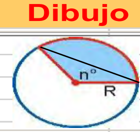
Datos:		longitud	área
Radio	*30*	*7.8540*	
n°	*15*		

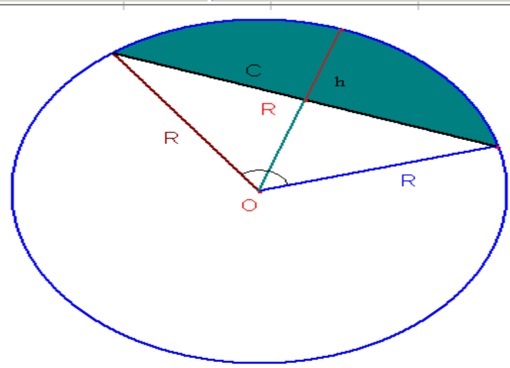
Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Circulo			$A = \pi R^2$

Datos:		longitud	área
Radio	*1*		3.14159

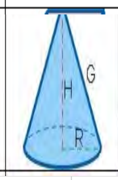
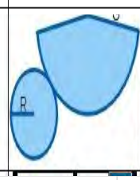
Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Sector Circular			$A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$

Datos:		longitud	área
Radio	*6*		*37.6991*
n°	*120*		

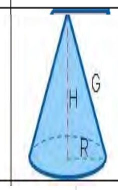
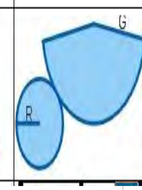
Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Segmento Circular			$A_{Sc} = \frac{\pi * R^2 * n^\circ}{360^\circ} - \frac{C(R-h)}{2}$



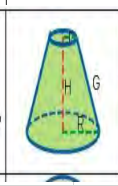
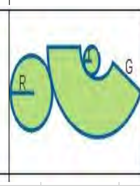
Datos:		área
Radio	3	*1.65929*
n°	*45*	
Cuerda	*1.5*	
h	*0.5*	

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cono			$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$	$V = \frac{1}{3} A_B H$

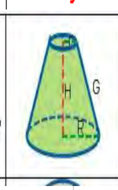
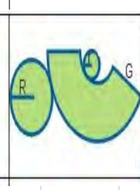
Datos:		Volumen		área
Radio	4	134.0412866	AT =	125.6637061
G	6	8.94427191	AB =	50.26548246
Altura	8		AL =	75.39822369

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cono			$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$	$V = \frac{1}{3} A_B H$

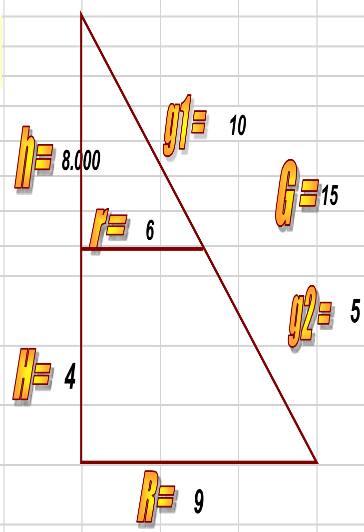
Datos:		Volumen		área
Radio	3	37.69911184	AT =	75.39822369
Altura	4		AB =	28.27433388
G	5		AL =	47.1238898

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Tronco de cono Circular recto			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1} = \pi R^2$ $A_{B2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r)G$	$V = \frac{1}{3}\pi * H(r^2 + R^2 + r*R)$

Datos:		Volumen		área
Radio [R]	9	716.283125	AT =	603.1857895
Radio [r]	6		AB1 =	254.4690049
Altura [H]	4		AB2 =	113.0973355
G	5		AL =	235.619449

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Tronco de cono Circular recto			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1} = \pi R^2$ $A_{B2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r)G$	$V = \frac{1}{3}\pi * H(r^2 + R^2 + r*R)$

Datos:		Volumen		área
Radio [R]	9	716.283125	AT =	603.1857895
Radio [r]	6		AB1 =	254.4690049
Altura [H]	4		AB2 =	113.0973355
G	5		AL =	235.619449



[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Perimetros y areas.xls]()

FÓRMULA DE HERÓN

En geometría, **la fórmula de Herón** plantea que la superficie de un triángulo de lados *a*, *b*, *c* viene dada por:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

La fórmula puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}.$$

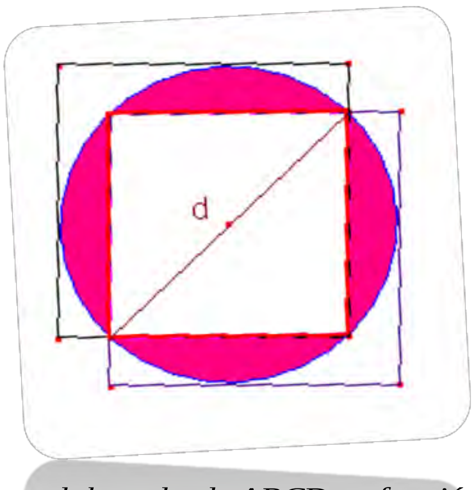
[construccion de triangulos dados sus tres lados Jaime Ramirez Sanchez.ggb]()

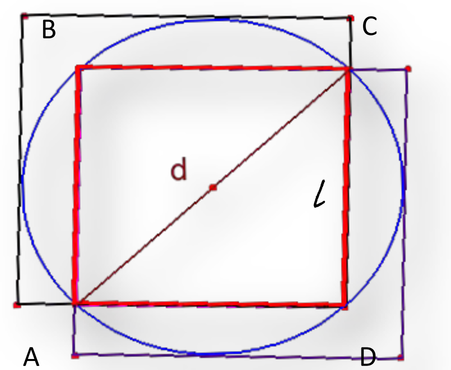
Problemas Resueltos

Áreas de: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos y figuras compuesta por combinación de las anteriores.

Perímetros de: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencias y figuras compuesta por combinación de las anteriores.

Ejemplo 1.- Dos cuadrados congruentes se colocan con dos de sus lados tangentes a una circunferencia y uno de sus vértices sobre ella, como se muestra en la figura siguiente. Si la circunferencia tiene 4 cms. de radio, ¿Cuánto vale el área sombreada?





$$Area\,del\,cuadrado\,ABCD\,en\,función\,de\,su\,diagonal = diametro\,de\,la\,circunferencia$$

$$A(d) = \frac{d^2}{2}\; pero\,el\,r = 4 \therefore d = 2r = 2*4 = 8 \Rightarrow A(d) = \frac{8^2}{2} = 32$$

$$Área\,del\,circulo = \pi * r^2 = \pi * 4^2 = 16\pi$$

$$Área\,sombreada = Área\,del\,circulo - A(d) = 16\pi - 32 = 16(\pi - 2)$$

Ejemplo 2.- Encuéntrese el área de la región sombreada del triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura.

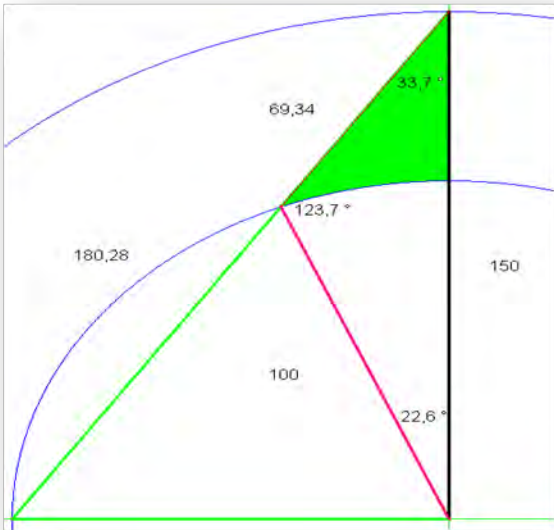


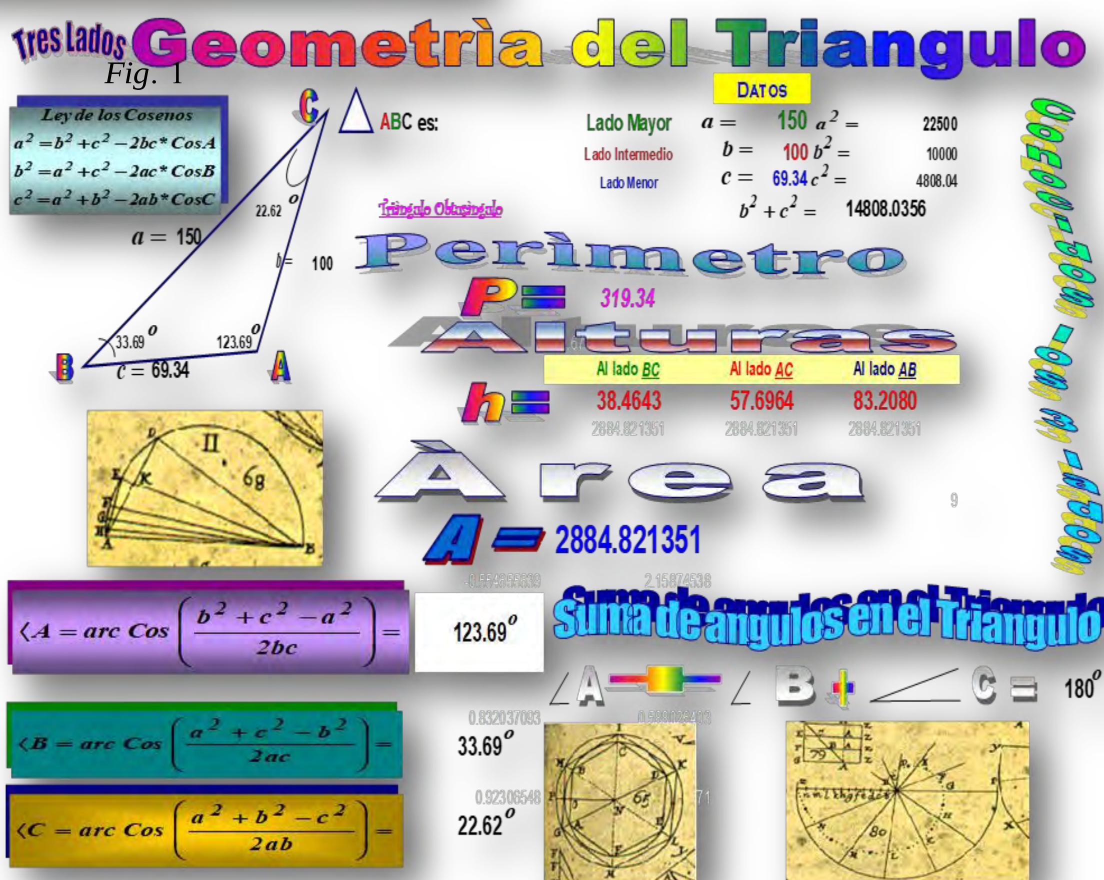
Fig. 1

El área del triángulo de lados 150, 100 y 69.34 es 2884.82, tal y como se muestra en el cuadro 1 y el área del sector circular de ángulo central 22.62° se calcula como

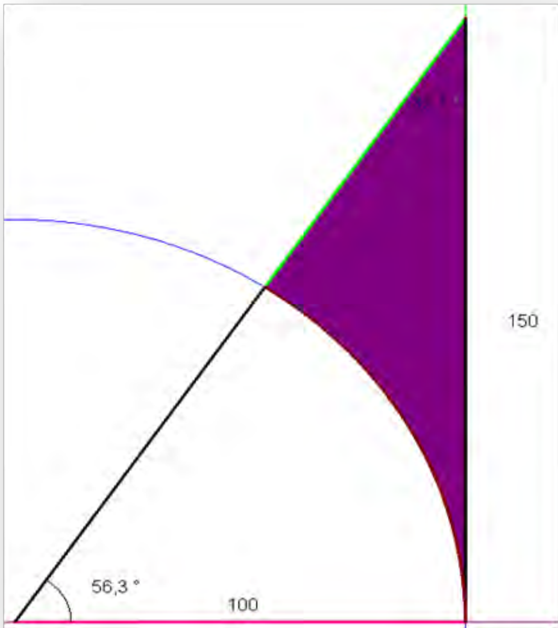
$$A_{SC} = \frac{\pi r^2 \beta°}{360°} = \frac{\pi (100)^2 * 22.62°}{360°} = 628.33\pi$$

entonces el área de la región sombreada es:

Área del Δ – área del sector circular
= 2884.82 – 628.33 π = 910.86



Cuadro 1



Ejemplo 3.- Encuéntrese el área de la región sombreada del triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura.

Los ángulos del triángulo de catetos 150 y 100, son 33.69° y 56.31° estos se calcularon con la ayuda de la hoja de cálculo en Microsoft Excel - Solucion De Tri Rec Un angulo y un lado tal y como se muestra en la pantalla 1.

El área del triángulo es b x h /2, en donde b = 100 y h = 150, entonces: A = ***7500***

El área del sector circular es

4913.975

Esta se calculó con la ayuda de la hoja de cálculo en Microsoft Excel - Perimetros y areas

Tal y como se muestra en la pantalla 2

Por lo tanto, el área sombrada es:

El área del triángulo - El área del sector circular = 7500 − 4913.975 = ***2586.025***

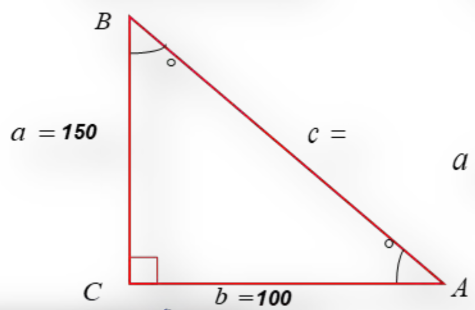
Pantalla 1

Solución de Triángulos Rectángulos

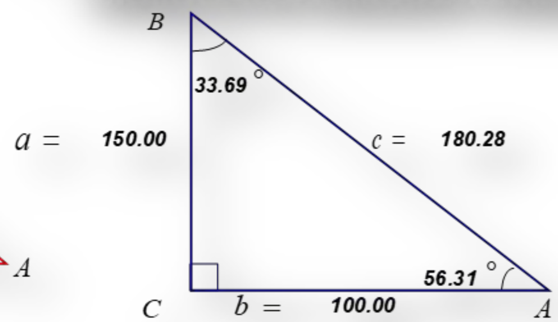
Conociendo dos lados

	Lado	
a	b	c
150	*100*	

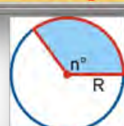
Dame el valor de dos lados



Calculo de los elementos restantes



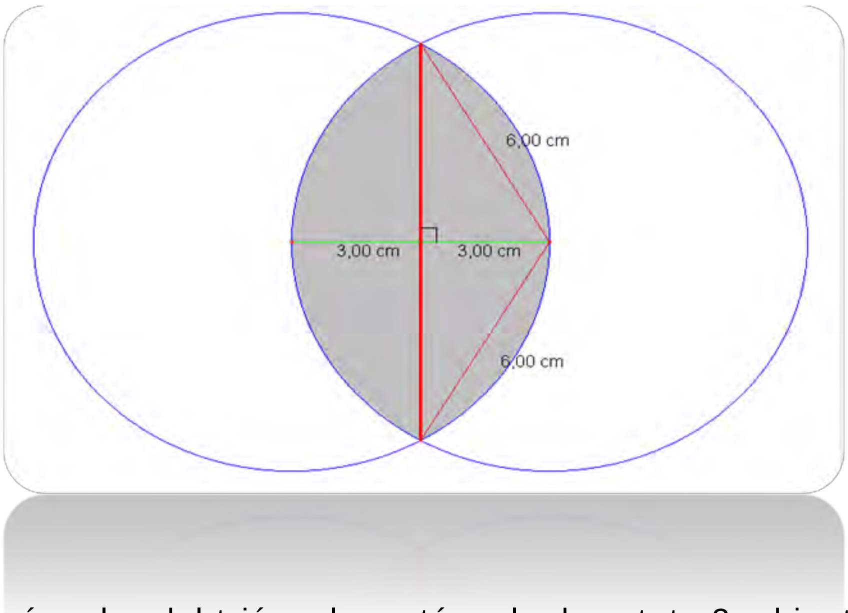
Pantalla 2

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Sector Circular			$A = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$

Datos: longitud **área**

Radio	*100*	*4913.975*
n°	*56.31*	

Ejemplo 4.- Las circunferencias congruentes de centros O_1 y O_2 tienen $6\,cm$ de radio. Halle el área de la región sombreada.



Los ángulos del triángulo rectángulo de cateto 3 e hipotenusa 6, son 30° y 60° estos se calcularon con la ayuda de la hoja de cálculo en

Microsoft Excel - Solucion De Tri Rec Un angulo y un lado

Tal y como se muestra en la pantalla 1. Con el valor del otro cateto igual a 5.19615 y área igual a $A = 7.7942286$, como son 2 dos triángulos entonces el área total es 15.5885. Y el área del sector circular es:

37.6991

Esta se calculo con la ayuda de la hoja de cálculo en

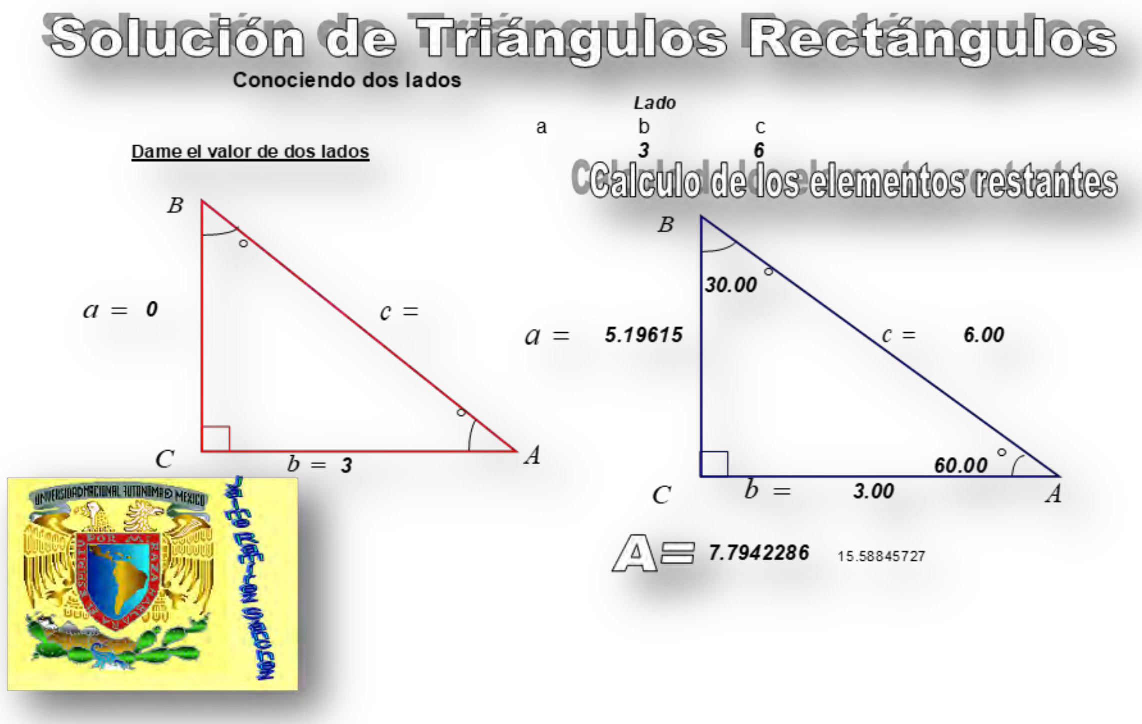
Microsoft Excel - Perimetros y areas

tal y como se muestra en la pantalla 2

Por lo tanto, el área sombrada es, el doble de:

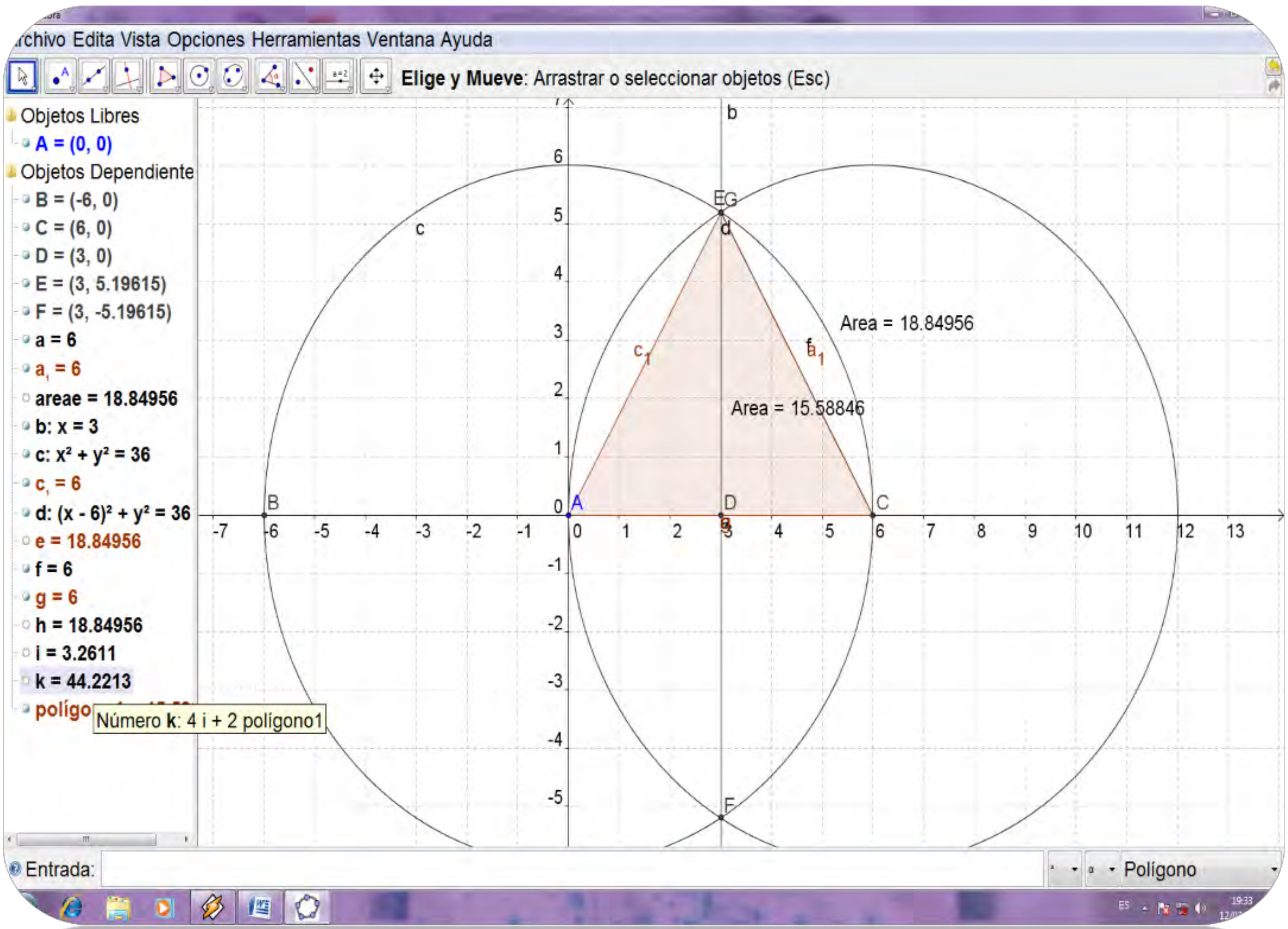
El área del sector circular - El área del triángulo = 2(37.6991−15.5885) = 2(22.1106) = 44.2213

Pantalla 1

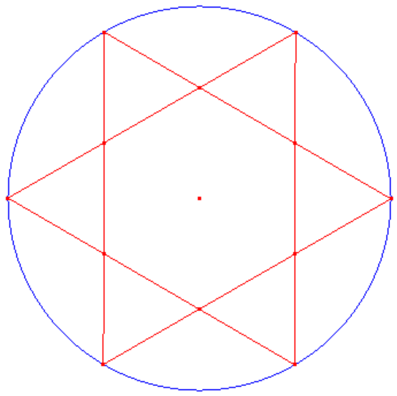

Solución de Triángulos Rectángulos
Conociendo dos lados
Lado
a b c
3 6
Dame el valor de dos lados
Calculo de los elementos restantes
B
a = 0
c =
C
b = 3
A
B
30.00 °
a = 5.19615
c = 6.00
60.00 °
C
b = 3.00
A
A = 7.7942286
15.58845727

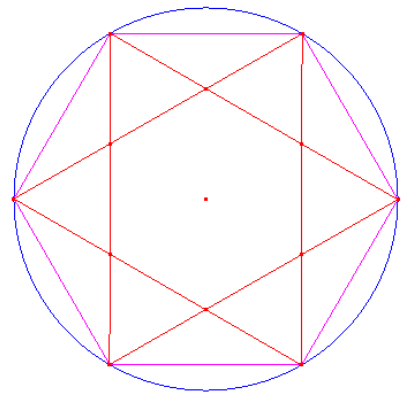
Pantalla 2

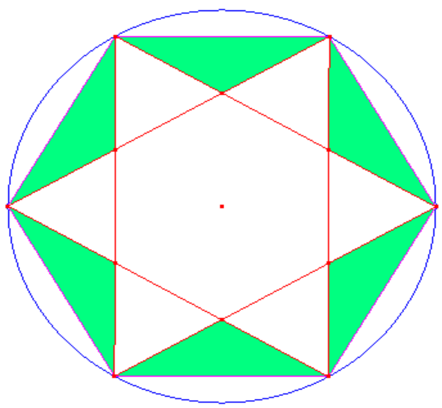

Nombre
Dibujo
Longitud
Área
Sector Circular
n°
R
$A = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$
Datos:
longitud
área
Radio 6
n° 120
37.6991


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Elige y Mueve: Arrastrar o seleccionar objetos (Esc)
Objetos Libres
A = (0, 0)
Objetos Dependiente
B = (-6, 0)
C = (6, 0)
D = (3, 0)
E = (3, 5.19615)
F = (3, -5.19615)
a = 6
a1 = 6
areae = 18.84956
b: x = 3
c: x² + y² = 36
c1 = 6
d: (x - 6)² + y² = 36
e = 18.84956
f = 6
g = 6
h = 18.84956
i = 3.2611
k = 44.2213
polígo
Número k: 4 i + 2 polígono1
Area = 18.84956
Area = 15.58846
Entrada:
Polígono

Ejemplo 5.- Encuéntrese el área de una estrella de David regular de 6 puntas que está inscrita en un círculo de radio 1







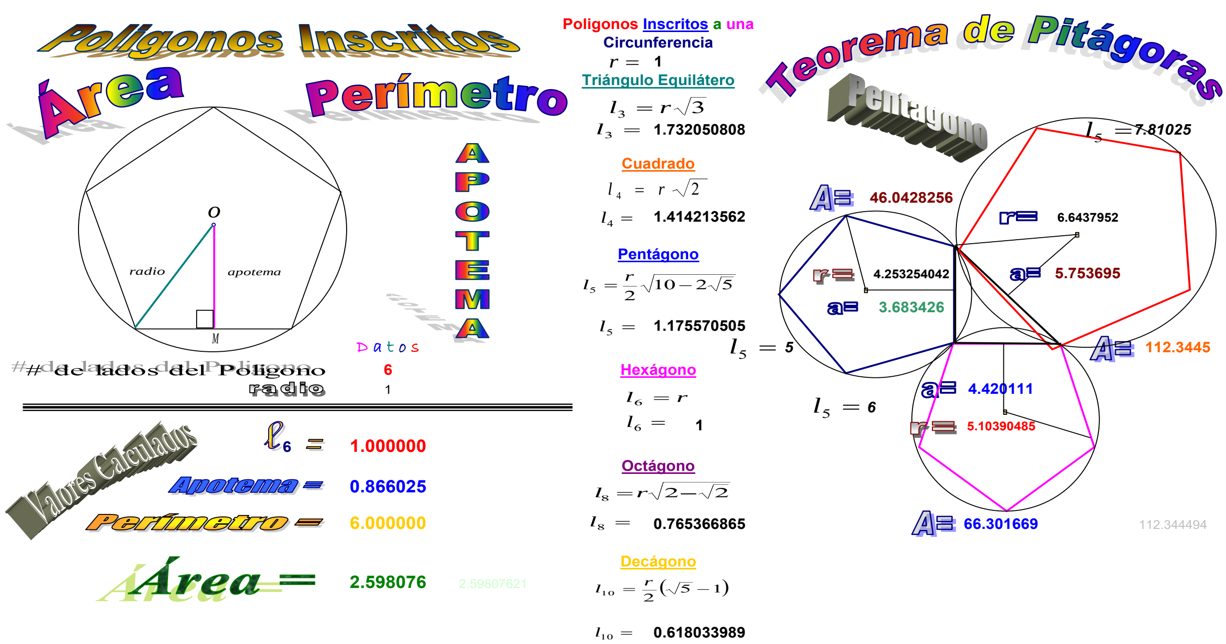
Calcular el área del hexágono, con la ayuda de: 

, ver pantalla 1

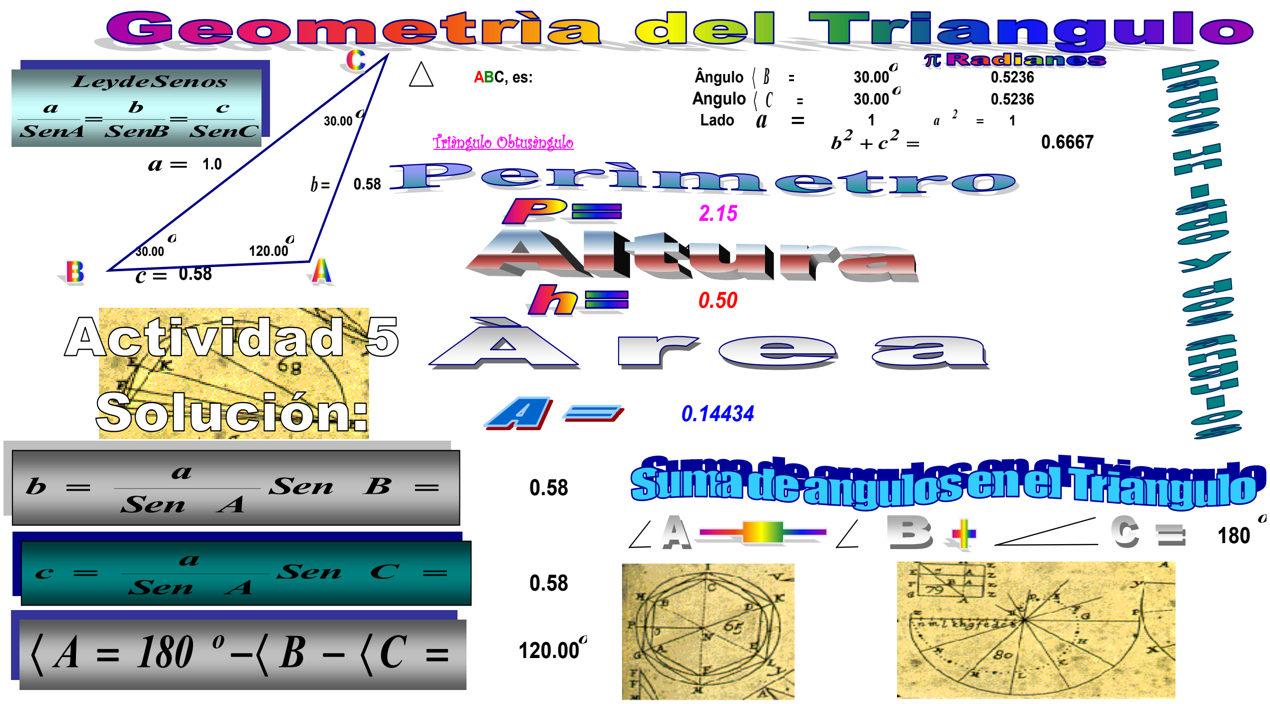
Calcular el área de uno de los triángulos sombrados en verde, con la ayuda de: 

, entonces el área sombrada es:

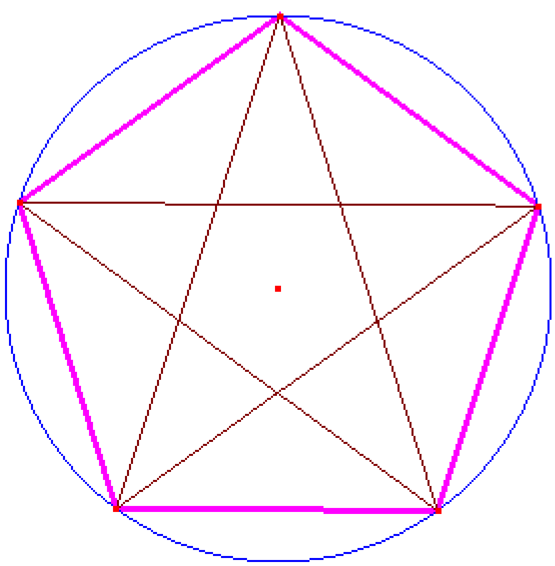
Pantalla 1

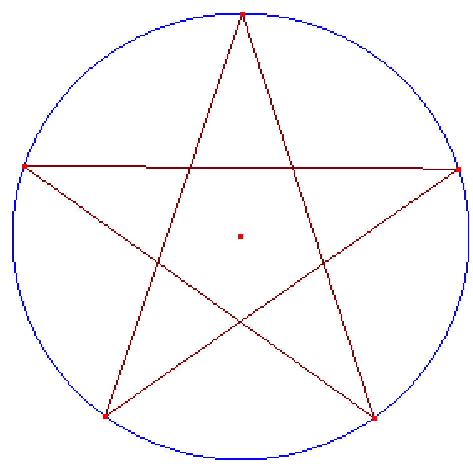


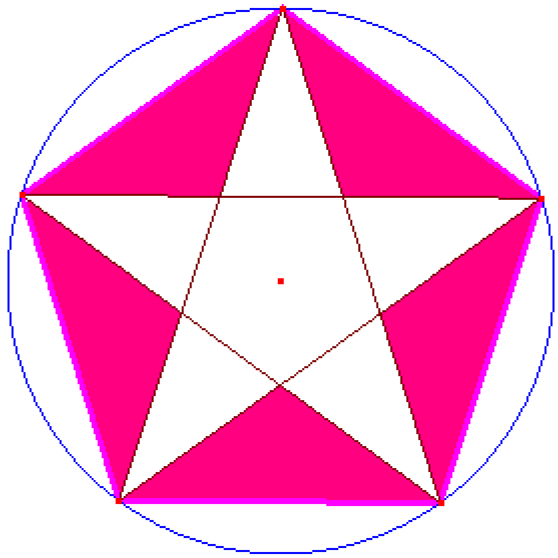
Área sombreada = área del hexágono – 6(área de uno de los triángulos sombrados en color verde) = **2.598076** – **6(0.14434)** = ***1.7320***



Ejemplo 6.- Encuéntrese el área de una estrella de regular de 5 puntas (el pentagrama) que está inscrita en un círculo de radio 1







Calcular el área del Pentágono, con la ayuda de:

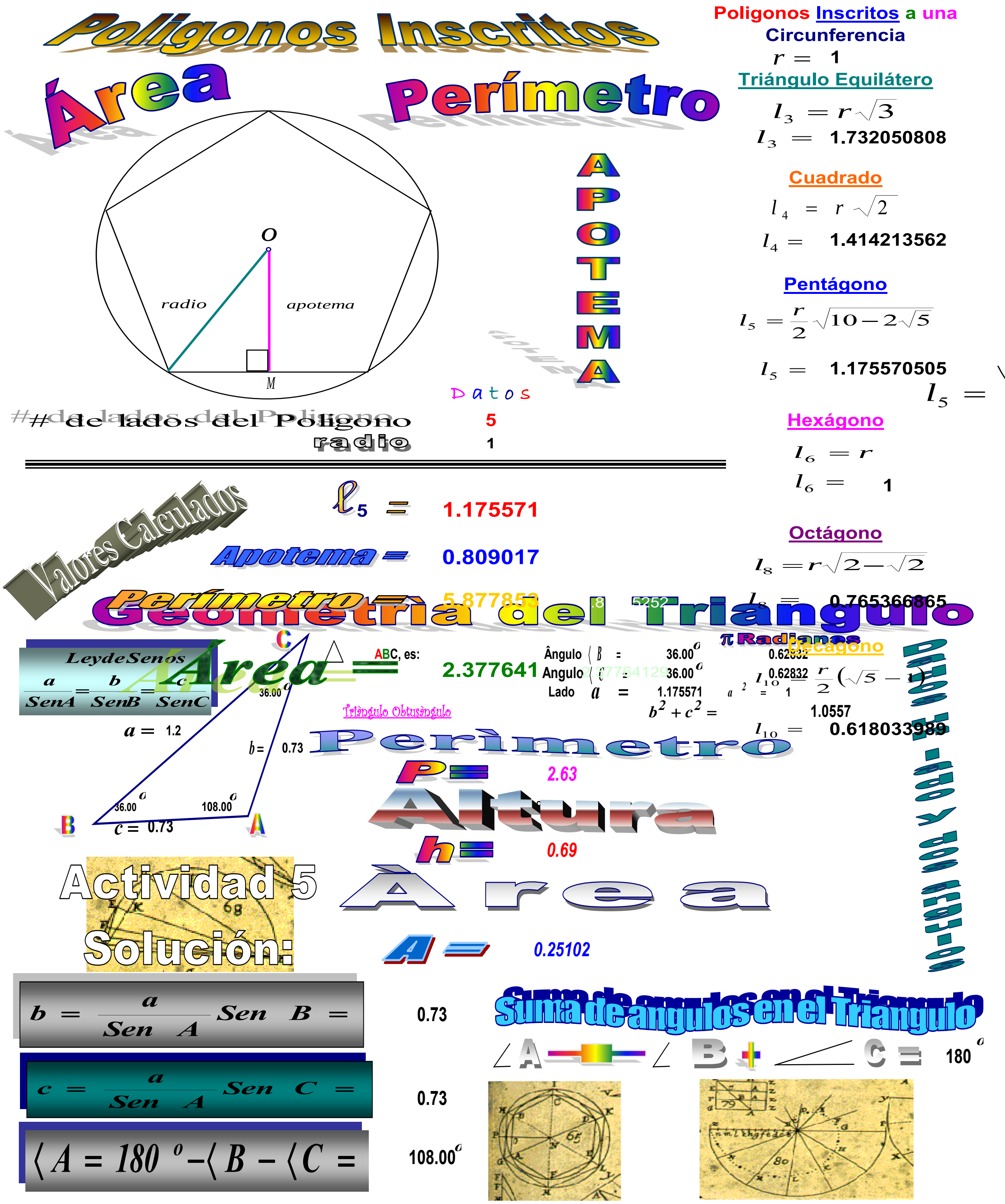
Microsoft Excel - apotema pentagono 1, ver pantalla 1

Calcular el área de uno de los triángulos sombrados, con la ayuda de:

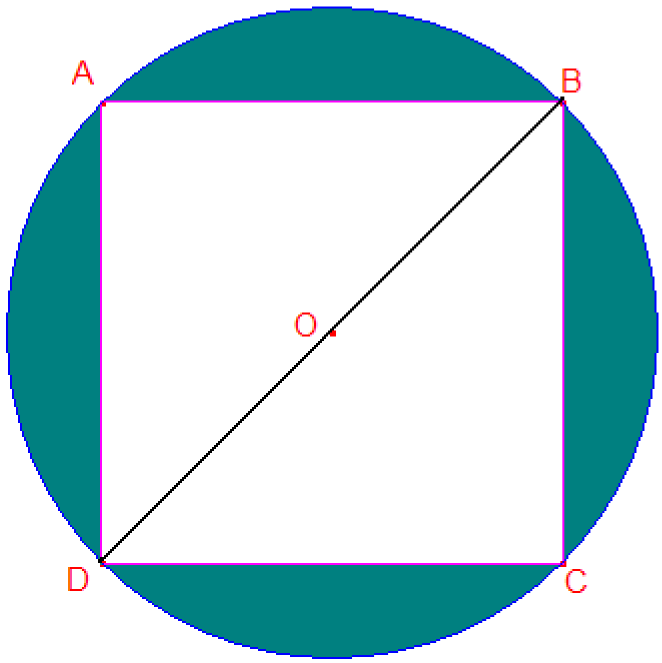
Microsoft Excel - triangulo, entonces el área sombrada es:

Área sombreada = área del Pentágono – 5(área de uno de los triángulos sombrados) = **2.377641** – **5(0.25102)** = ***1.1225413***

Pantalla 1



Ejemplo 7.- Sea ABCD un cuadrado con $\overline{OA} = 4m$, ver la figura siguiente:



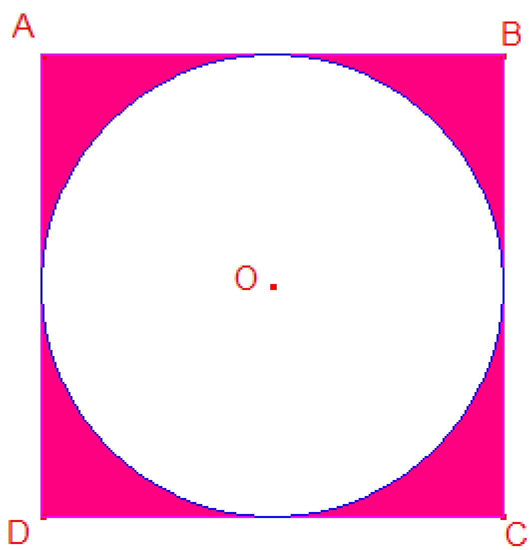
Recordando

El área del cuadrado en función de su diagonal (d) es A (d) = $d^2/2$, para nuestro caso la diagonal es $\overline{DB}$, entonces, como $\overline{OA} = 4m$ es un radio, el diámetro = diagonal = 2r = 8 y A (d) = 32

El área del círculo es πr^2 Igual a $\pi(4)^2 = 16\pi$

El área sombrada es = área del circulo – área del cuadrado = $16\pi - 32$

Ejemplo 8.- Sea ABCD un cuadrado con $\overline{AB} = 10\,cm$, ver la figura siguiente:

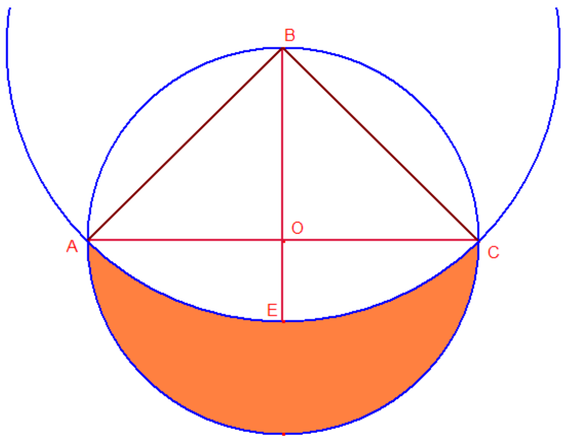


Se puede observar que un diámetro de la circunferencia es igual a un lado del cuadrado, $\overline{AB} = 10\,cm$ y un radio es 5 entonces, el área del círculo es $\pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$

El área del cuadrado es $l^2 = 10^2 = 100$

El área sombrada es = área del cuadrado - área del círculo = $100 - 25\pi$

Ejemplo 9.- Sea ABCD un círculo con $\overline{OA} = 5\,cm$, ver la figura siguiente:



Sea :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

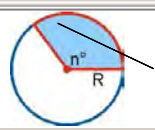
$$\overline{AB} = 5\sqrt{2}$$

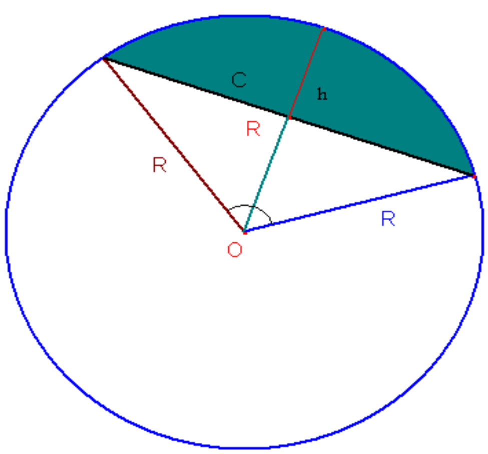
El sector circular

$$BAC = \frac{\pi * \overline{AB}^2 * \angle ABC°}{360°}$$

$$BAC = \frac{\pi * 5\sqrt{2} * 90°}{360°} = 39.2699$$

El segmento circular AEC se calculó por medio de la hoja de cálculo en Excel

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Segmento Circular			$A_{Sc} = \frac{\pi * R^2 * n°}{360°} - \frac{C(R-h)}{2}$



Datos:		**área**
Radio	***7.07107***	***14.26991***
n°	***90***	
Cuerda	***10***	
h	***2.07107***	
	39.26990817	25.00000

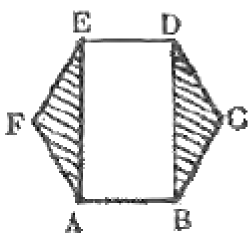
El área sombreada es = El área del sector circular – El área del segmento circular = 39.2699 – 14.2699 = 25

Problemas Propuestos

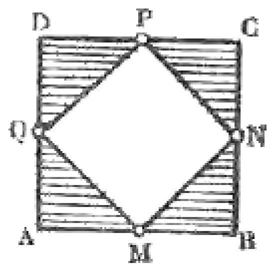
En cada uno de los siguientes problemas hallar el área sombreada:

PERÍMETRO Y ÁREA

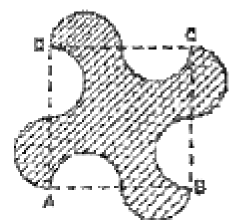
**1) ABCDEF hexágono regular,
AB = 4 cm.**



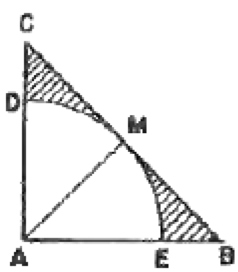
2) ABCD cuadrado, M, N, P, Q, puntos medios, BN = 3 cm.



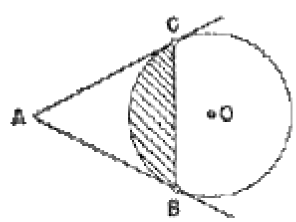
3) ABCD cuadrado de lado 12 m., las 8 semicircunferencias iguales.



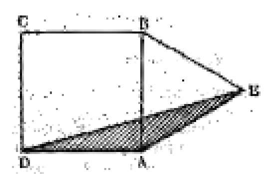
**4) AC = AB, <CAB recto,
BC = 10 cm.**



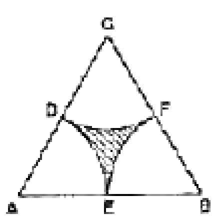
5) AC y AB tangentes, radio de la circunferencia 4 m., <CAB = 60º



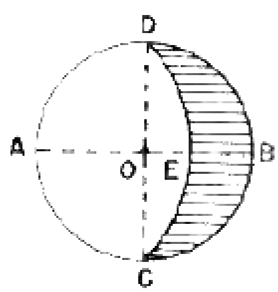
6) ABCD cuadrado de 6 cm. de lado, ABE triángulo equilátero.



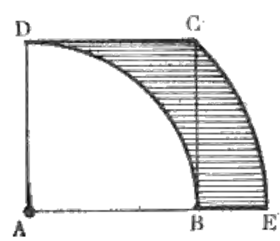
7) ABC triángulo equilátero, D, E y F puntos medios, AB = 4 cm.



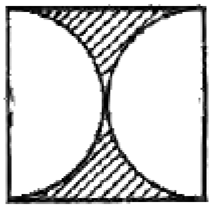
8) AB ⊥ CD, OB = 10 cm.



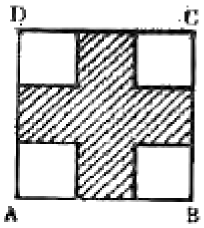
9) ABCD cuadrado, AB = 6 cm., A es centro de los arcos BD y EC.



10) La figura representa un cuadrado de lado 24 cm.

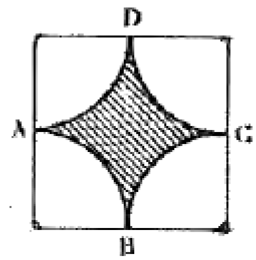


11) ABCD cuadrado, BC = 6 m., cada lado está dividido en tres partes iguales.

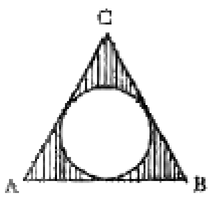


12) A, B, C y D puntos medios de los lados del cuadrado.

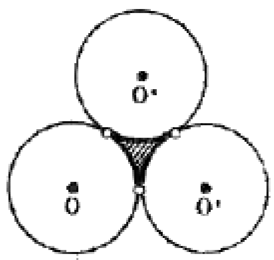
BC = $4\sqrt{2}$ cm.



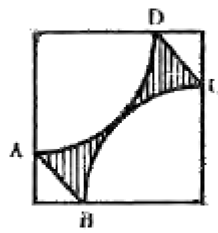
13) ABC triángulo equilátero, circunscrito a
la circunferencia de radio 10 cm.



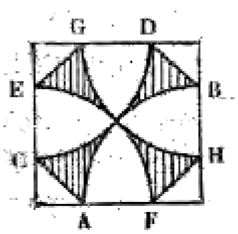
14) Circunferencias congruentes de radio m.



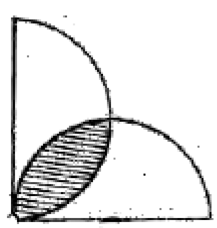
15) Cuadrado de lado 12 cm. CD = $4\sqrt{2}$



16 Cuadrado de lado 8 cm.

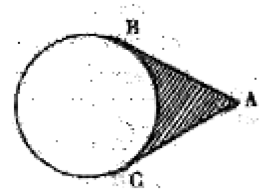


17) Semicircunferencias congruentes de 6 cm. de diámetros perpendiculares entre sí.

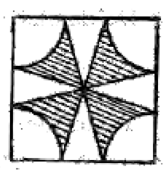


18) Circunferencia de radio 4 cm.

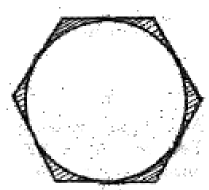
AB y AC tangentes, <BAC = 60º.



19) Cuadrado de lado 12 m.



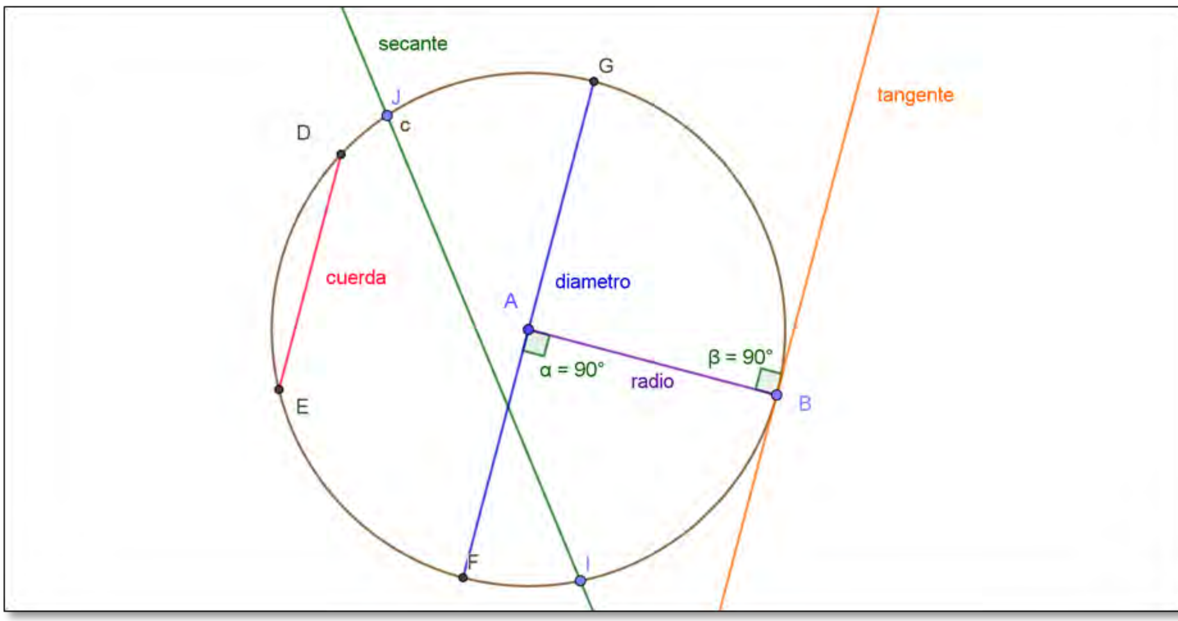
20) Circunferencia de radio 8 cm. y hexágono regular circunscrito.



Círculo y circunferencia

Rectas y segmentos.
Localización del centro de una circunferencia.
Perímetro y área del círculo.
Problemas de aplicación.

- Rectas en la circunferencia.



Una línea que atraviesa el círculo por dos puntos se llama secante y una línea que toca el círculo en un solo punto se llama tangente.

Toda línea tangente es forzosamente perpendicular a él **radio** que va del punto de contacto al centro del círculo.

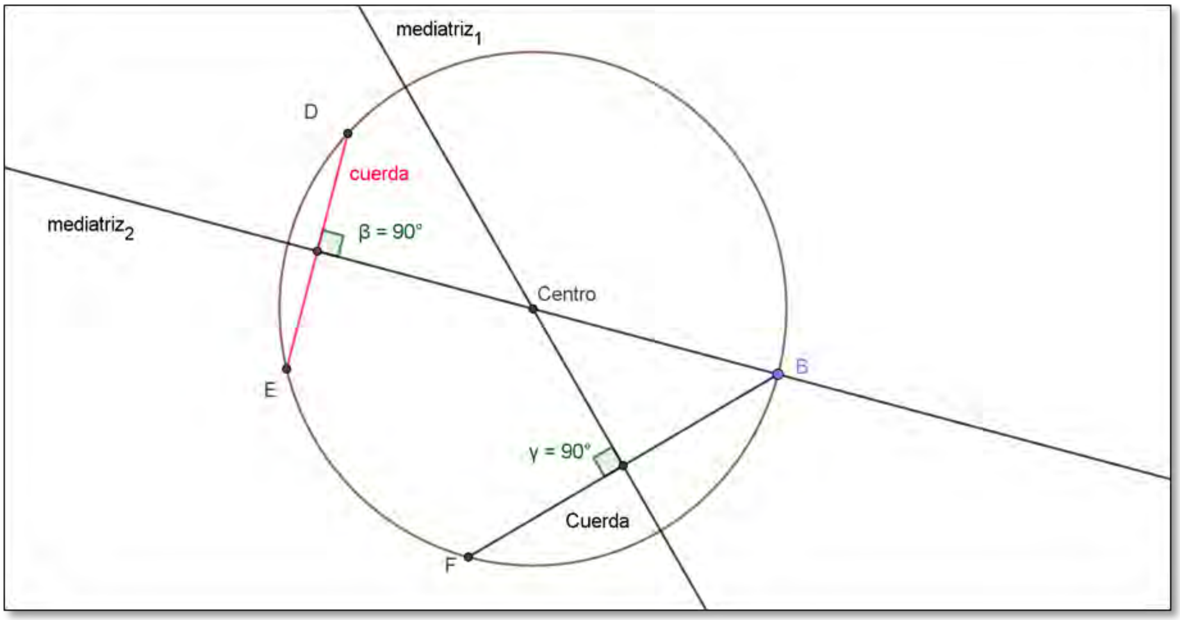
El segmento de recta de una secante que está acotado por el círculo se llama cuerda, es decir una línea que une dos puntos cualesquiera del círculo.

La cuerda más larga pasa por el centro del círculo y se llama diámetro, éste está formado por dos radios colineales y divide al círculo en dos partes idénticas. Cada una de las dos áreas del círculo que resultan de una cuerda es llamada segmento.

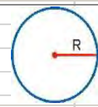
Si se requiere distinguirlas entre si se les denomina segmento mayor y segmento menor, dependiendo del área que cada una contenga.

Localización del centro de una circunferencia.

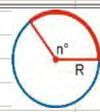
Dada una circunferencia, trazarle dos cuerdas, y luego a estas cuerdas trazarle sus mediatrices respectivas, el punto de intersección de estas mediatrices es el centro de la circunferencia, ver figura siguiente.



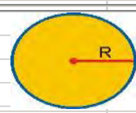
Longitud y área de figuras circulares

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Circunferencia		$L = 2\pi R$	

	Datos:	longitud	área
Radio	30	188.4955592	

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Arco		$L = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ$	

	Datos:	longitud	área
Radio	30	7.8540	
n°	15		

Nombre	Dibujo	Longitud	Área
Circulo			$A = \pi R^2$

	Datos:	longitud	área
Radio	1		3.14159

Problemas de aplicación.

Ángulo Central y ángulo inscrito en una circunferencia.

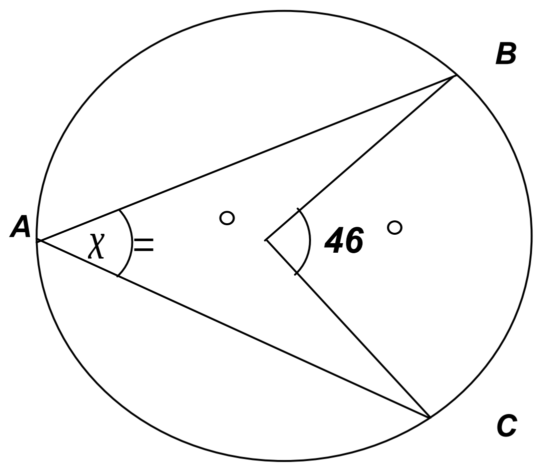
Hallar x o y (según sea el caso) para cada uno de los siguientes problemas:

Círculos

Datos:

$\angle$ **y** = ***46*** °

$x =$ °

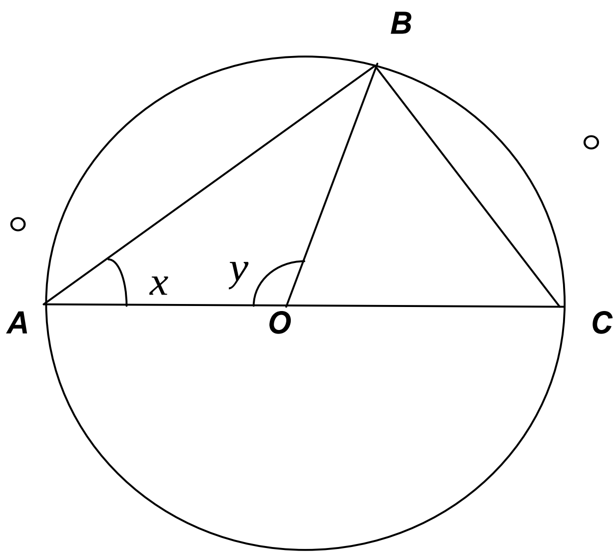


Datos:

$\angle$ **y** = ***150*** °

$\widehat{BC} = m(\widehat{ABC} - \widehat{BC}) =$ °

$x =$ °



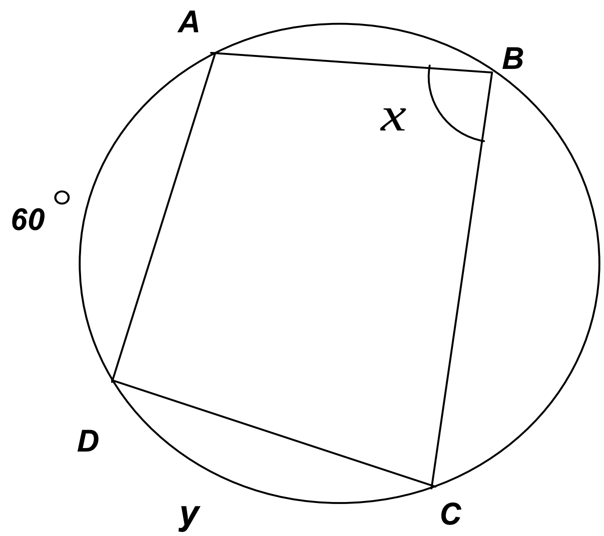
Datos:

$\angle$ **x** = ***75*** °

$\widehat{AD} =$ ***60*** °

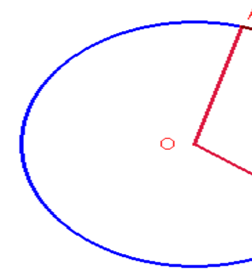
$\widehat{ADC} =$ °

$y =$ °

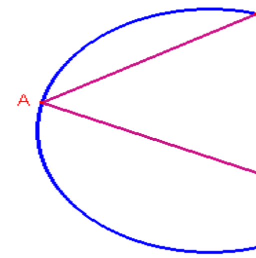


Principios sobre medida

Principio 1: Un áng



Principio 2: Un áng
interceptado.

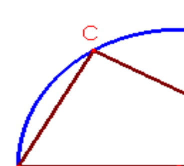


Principio 3: En u
inscritos congruentes, tie

En la siguiente fig

Principio 6: Un ángu

En la siguiente figura
entonces ∠C = 90°



Datos:

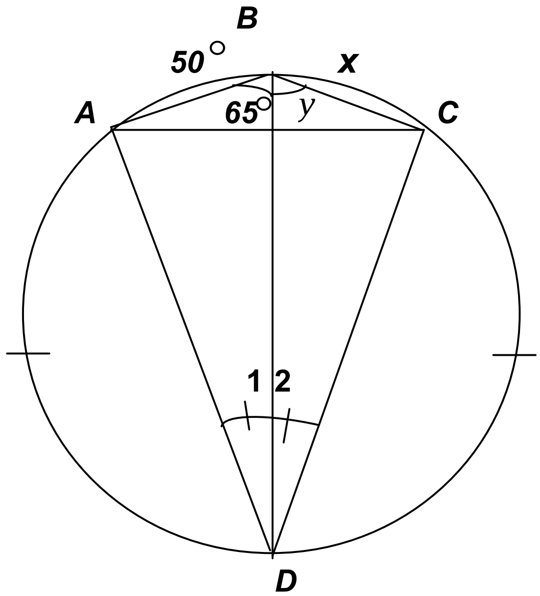
$\angle$**ABD** = *65* °

$\overset{\frown}{AB}$ = *50* °

$\angle$ *1* = $\angle$ *2*

$\angle$ **x** = °

$y =$ °



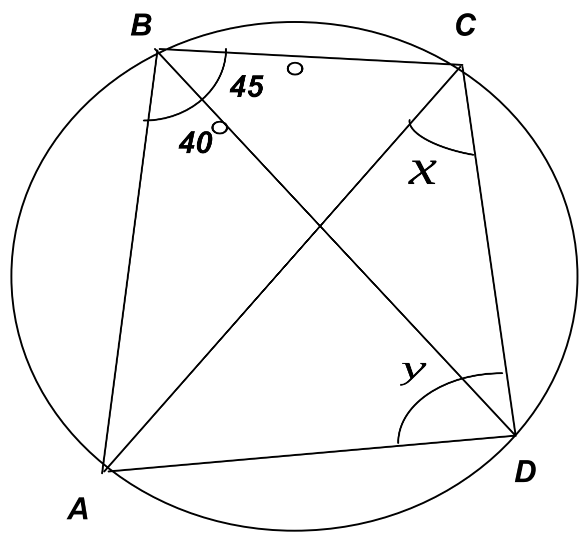
Datos:

$\angle$**ABD** = *40* °

$\angle$*DBC* = *45* °

$\angle$ **x** = °

$y =$ °



Principio 6: Un án

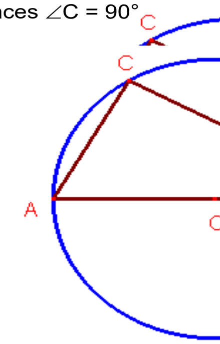
Principio 6: Un ángu

En la siguiente figu

entonces ∠C = 90°

En la siguiente figura

entonces ∠C = 90°



suplementarios.

Principio 7: Los áng

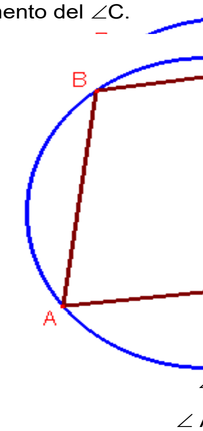
suplementarios.

En la siguiente figu

suplemento del ∠C.

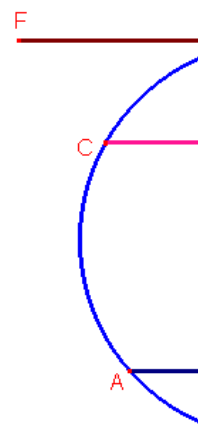
En la siguiente figura

suplemento del ∠C.

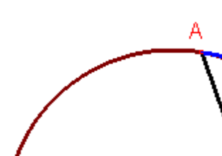


Principio 8: Las líne
círculo.

En la siguiente figura
paralela a CD, entonces PC



Principio 9: Un ángu
medido por la mitad de su a



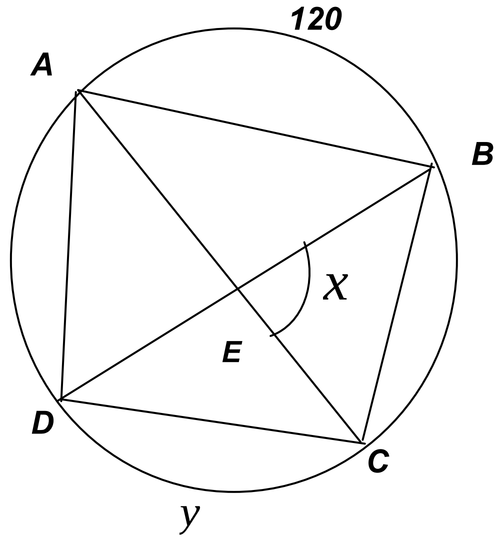
Datos:

$\overset{\frown}{y} = 80^{\circ}$

$\overset{\frown}{AB} = 120^{\circ}$

$\angle DEC = \quad ^{\circ}$

$\angle x = \quad ^{\circ}$



Al finalizar la unidad el estudiante logro los siguientes aprendizajes, de entre otros varios más:

Conoce el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización.
Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa en forma verbal y escrita.

Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz.

Clasifica los ángulos por su medida y su relación con otros.

Conoce e identifica los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.

Concluye que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.

Aplica los conceptos anteriores en la resolución de problemas.

Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos.

Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.

Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo.

Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.

Distingue las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo

Determina geométricamente la distancia de un punto a una recta.

Justifica y aplica las propiedades del triángulo isósceles

Describe los polígonos por sus características (regulares e irregulares).

Conoce y aplica las propiedades de los polígonos.

Calcula el perímetro y área de un polígono regular.

Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.

Identifica las líneas notables de la circunferencia.

Localiza el centro de una circunferencia.

Aproxima el perímetro y área del círculo.

Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.

Bibliografía Para el alumno Básica:

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: PEARSON. Addison Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría. México: Publicaciones Cultural.

Complementaria:

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México, PEARSON.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGRAW HILL, INTERAMERICANA

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: PEARSON.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICANA.

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: ESFINGE.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). Álgebra. México: PEARSON.

Para el profesor

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México: PEARSON.

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGRAW HILL, INTERAMERICANA

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: PEARSON. Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICANA

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: ESFINGE.

Larson, R. y Hostetler, R. (2006). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.

Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). Geometría y trigonometría. México: PRENTICE HALL.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: PEARSON. Addison Wesley.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría. México: Publicaciones Cultural.

Polya, G. (1981). Cómo plantear y resolver problemas (1 ed., 9 reimp. ed.). México: Trillas. Rees, P. y Sparks, F. (2005). Álgebra. México: REVERTE.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). Álgebra. México: PEARSON.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMATICAS

EXAMEN ORDINARIO DE LA UNIDAD IV MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES: lee cuidadosamente los enunciados de los siguientes problemas. Para optimizar tu tiempo, selecciona el ejercicio que tú consideres más sencillo para comenzar. Recuerda que para que tu respuesta sea considerada, es necesario que anexes el desarrollo de cada uno de los problemas que se proponen en esta evaluación.

1.- Sean a, b y c unas magnitudes con las cuales se desea construir un triángulo, verificar que el triángulo sea ***construible*** y ***clasifícalo de acuerdo a sus lados y de acuerdo a sus ángulos:***

a = 3, b = 4 y c = 5.

2.- En los siguientes triángulos construye la ***recta de Euler***.

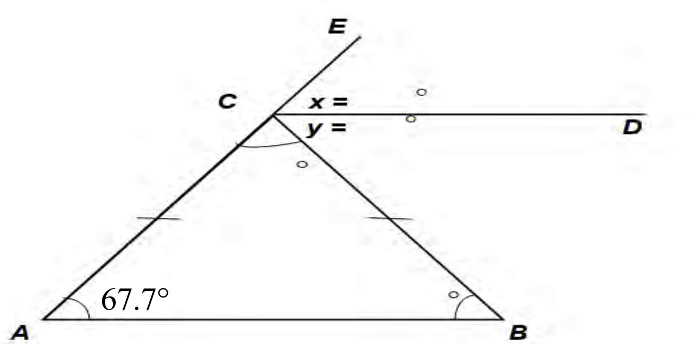
i.- En un triángulo isósceles

i.- En un triángulo equiángulo.

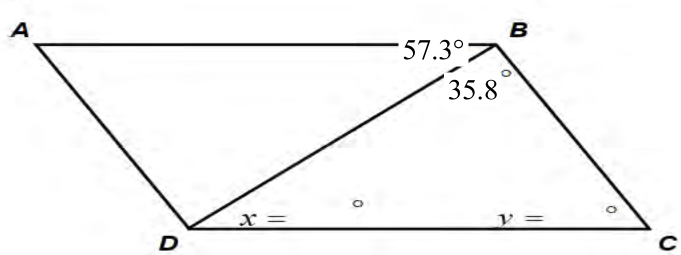
iii.- En un triángulo obtusángulo.

3.- En los siguientes problemas hallar los valores de ***x*** y de ***y***.

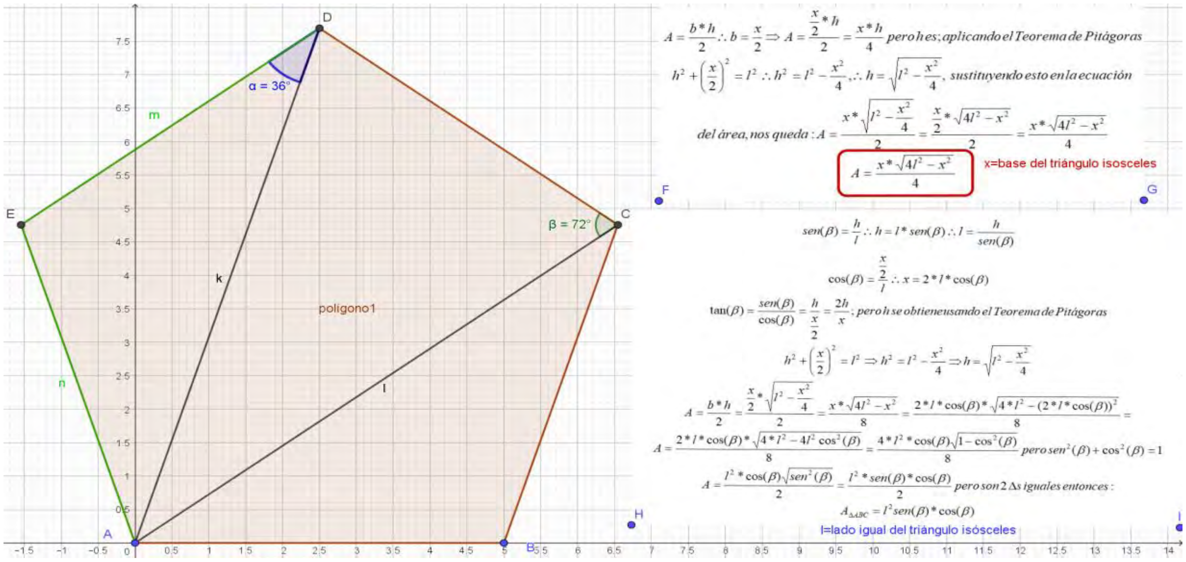
Datos:
$\angle A = 67.7°$
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



Datos:
$\angle ABD = 57.3°$
$\angle DBC = 35.8°$
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AD} \parallel \overline{CB}$



4.- Por medio de triangulación encuéntrese el área de pentágono regular de lado 5. Ver la figura siguiente:



5.- Por medio de triangulación encuéntrese el área de hexágono regular de lado 6. Ver la figura siguiente:

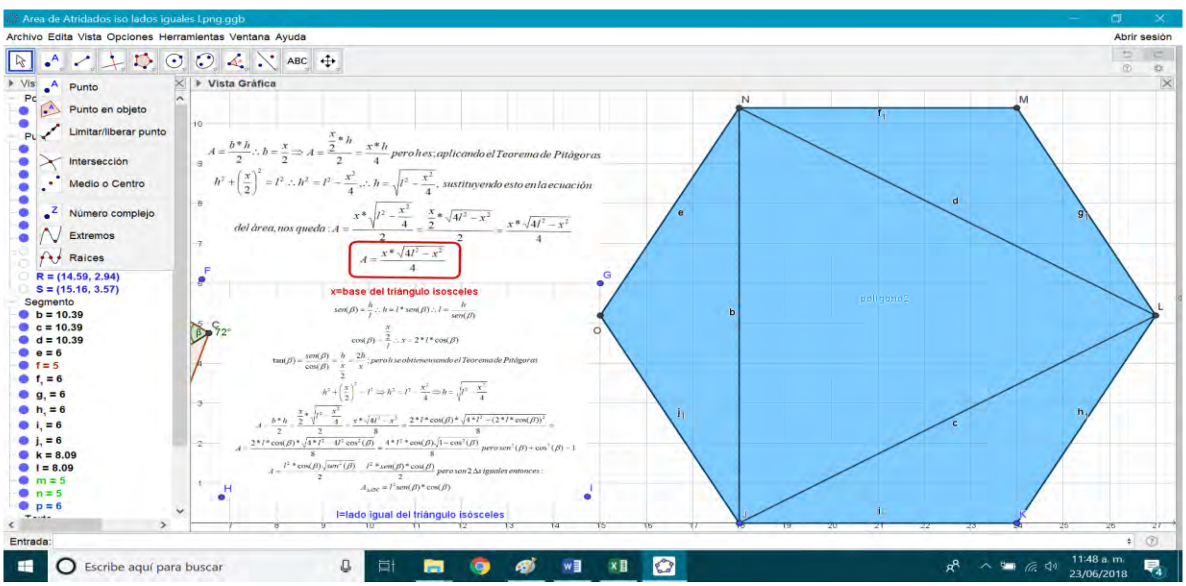


TABLA DE VALUACIÓN:

Cada acierto vale 2 puntos

ELABORÓ EL EXAMEN: PROF. JAIME RAMÍREZ SÁNCHEZ

PROF. DE CARRERA TITULAR "C" DEFINITIVO.

UNIDAD 4

Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras

PROPÓSITO:
Al finalizar, el alumno:

Al finalizar, el alumno: Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

Tiempo Estimado: 25 horas.

1.0 PRESENTACIÓN

En esta parte de la Guía de Profesor de matemáticas II, se abordan los aprendizajes de la unidad IV de Matemáticas II señalados por el Programa de estudios, plan 2016: Los aprendizajes que debe lograr el alumno, los contenidos de la unidad y cómo abordarlos a través de estrategias de aprendizaje; en particular el uso de la resolución de problemas y la metodología de Polya. Se proporcionan recomendaciones acerca del nivel de tratamiento de la docencia a nivel bachillerato, el sentido de la Unidad y Conexiones de las **Elementos básicos de geometría plana** con otros temas del mismo semestre y posteriores y anteriores, el tiempo disponible que es de veinticinco horas para lograr estos propósitos.

Las estrategias que se proporcionan en esta unidad son las más recomendables de acuerdo al programa de estudios vigente, para abordar cada uno de los aprendizajes, guiando al profesor para que este logre realizar su docencia abordando los principios del CCH de aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser.

En cuanto a las actividades de enseñanza aprendizaje se busca que el alumno profundice, en el conocimiento de los **Elementos básicos de geometría plana**, a través del planteamiento y resolución de problemas. La Geometría Euclidiana, ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades; contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, explora, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establecen relaciones entre ellas por la vía deductiva, sin llegar a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

El Material de esta unidad busca que el estudiante reafirme estrategias generales también sepa comprobar sus soluciones, y determinar si el proceso seguido es correcto o incorrecto.
Posteriormente este material buscará enfrentar al alumno con problemas de aplicación que le ayuden a modelar problemas reales que abren una panorámica mayor sobre la matemática y en especial de la ecuación cuadrática.

Finalmente se proporciona una propuesta de evaluación de la Unidad con su respectiva bibliografía tanto básica como complementaria.

1.2 LOS APRENDIZAJES, LA TEMÁTICA Y LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDOS POR EL PROGRAMA DE ESTUDIOS.

1.2.1 LOS APRENDIZAJES

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Utiliza correctamente la notación propia de la congruencia.
- Comprende el concepto de congruencia.
- Construye segmentos y ángulos congruentes.
- Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.
- Argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia.
- Argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones. Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos. Resuelve problemas, por medio de los criterios de congruencia. Utiliza correctamente la notación propia de la semejanza. Comprende el concepto de semejanza.
- Reconoce cuándo dos figuras son semejantes.
- Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.
- Establece como válidos los criterios de semejanza.
- Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.
- Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.
- Divide un segmento en n partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales.
- Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.
- Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.

1.2.2 LA TEMÁTICA

1. Notación. Concepto de Congruencia.

2. Figuras congruentes.

3. Congruencia de triángulos. Criterios de congruencia de triángulos. a) LAL. b) LLL. c) ALA.

4. Construcciones de: Bisectriz de un ángulo. Mediatriz de un segmento. Perpendicular a una recta. Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

5. Problemas de aplicación.

6. Notación. Semejanza.

7. Figuras semejantes.

8. Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza de triángulos: a) LLL, b) LAL, c) AAA

9. Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.

10. Problemas de aplicación.

11. Teorema de Thales y su recíproco. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

12. Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

1.2.3. LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE SUGERIDAS

- Para el logro de los aprendizajes se sugiere que el profesor fomente, tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación activa del grupo, en un escenario de resolución de problemas. El profesor propondrá usar el software de geometría dinámica para que el alumno visualice, descubra y/o conjeture propiedades y características de figuras geométricas. Resaltará la diferencia entre mostrar y demostrar; así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos.
- El profesor plantee actividades donde se vea la necesidad de usar una nomenclatura adecuada, para el entendimiento y comunicación de ideas y conceptos. El profesor define congruencia y pide a los alumnos la identificación de objetos congruentes.
- El profesor guía la construcción de segmentos y ángulos congruentes, usando regla y compás.
- El profesor propone actividades donde el alumno verifique la congruencia de

triángulos haciendo uso de la definición.

- • El profesor construye un triángulo congruente a otro considerando los elementos mínimos. • Enfatice la identificación de ángulos y lados homólogos para justificar la congruencia de triángulos. • El profesor utilice contraejemplos para refutar enunciados falsos, por ejemplo, LLA.
- El profesor sugiere el uso de congruencia de triángulos para justificar las construcciones. Sugiere a sus alumnos, se apoyen en construcciones de figuras que permitan visualizar las propiedades que se quieren demostrar. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida.
- El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.
- El profesor plantea actividades donde se vea la necesidad de usar una nomenclatura adecuada, para el entendimiento y comunicación de ideas y conceptos. El profesor define semejanza y pide a los alumnos la identificación de objetos semejantes.
- Introduce al concepto de semejanza mediante los modelos a escala como lo son: mapas, maquetas, planos, fotos, etcétera.
- El profesor propone actividades donde el alumno verifique la semejanza de triángulos haciendo uso de la definición.
- El profesor propone ejercicios de triángulos semejantes, dadas sus razones de semejanza y pide a los alumnos que comparen sus perímetros y áreas y busquen un patrón en los resultados obtenidos.
- El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.
- El profesor oriente al estudiante para que infiera el Teorema de Thales, a partir de dividir un segmento en n partes iguales.
- El profesor hace una demostración del Teorema de Pitágoras y solicita a los alumnos que investiguen otras demostraciones, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos. Además, solicita a los alumnos que construyan triángulos que satisfacen la conclusión del Teorema de Pitágoras y verifiquen que son rectángulos.
- El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas planteados.

5.3 SENTIDO DE LA UNIDAD 4 “Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras”

El propósito fundamental en el tratamiento y presentación de esta Unidad 4 **Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras**, de la asignatura de matemáticas II, está orientada a satisfacer los requisitos institucionales del programa actualizado de matemáticas II; buscando que el estudiante , a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno: Adquiera la capacidad para resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado, percibiendo que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno. Identificando las relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas e infiera algunas conexiones entre resultados, valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico y a partir del conocimiento básico de los conceptos vistos en la unidad anterior, se introduzca al alumno al razonamiento deductivo y a la comprensión del “por qué” de las demostraciones.

También se busca que tanto el profesor que imparta esta asignatura y el alumno que la estudie puedan contar con un material que se adecue al programa de estudios y a las necesidades dentro y fuera del aula, ya que la Guía de profesor ofrece una gran variedad de problemas y ejercicios resueltos y propuestos y garantiza que les permitirá alcanzar los objetivos de la unidad. Permitiendo también que el estudioso de estos temas cuente con un material que se ajusta al programa actual del curso (plan de estudios 2016).

5.4 CONEXIÓN CON OTRAS UNIDADES DE OTRAS ASIGNATURAS.

La unidad 4 “Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.” de la asignatura de matemáticas II, tiene necesariamente antecedentes y consecuentes que es necesario establecer.

Matemáticas I
Sin conexión aparente. Sin embargo, históricamente en la civilización griega se estableció un puente entre la aritmética y la geometría. La Unidad 1: El significado de los números y sus operaciones básicas corresponde a la Aritmética.

Matemáticas II
La Unidad 4 Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras, se relaciona directamente con La unidad 3, Elementos básicos de geometría plana, del mismo programa, siendo ésta última la antecedente de esta unidad.

Matemáticas III
Se prosigue el estudio de la geometría, en particular la representación geométrica de un lugar geométrico, tales como altura, bisectriz. También en la deducción de las ecuación de la parábola; la ecuación de la circunferencia y la de la elipse, al usarse el concepto de rectas, e igualdad de longitud de segmentos de recta, en

las unidades de 4 y 5 de dicho programa de estudios. Se aplica la geometría para deducir las ecuaciones de estos lugares geométricos, en particular el teorema de Pitágoras. También esta unidad permite acceder a los conocimientos de la Unidad 1: Elementos de trigonometría.

Matemáticas IV
Sin conexión aparente. Sin embargo es necesario el manejo de conversiones de ángulos a Radianes al tabular y graficar funciones en la Unidad IV: Funciones trigonométricas.

Calculo Diferencial e Integral I
En los temas de Límites, y derivadas de funciones trigonométricas, al hablar del concepto de ángulo.

Calculo diferencial e integral II.
En la solución de integrales sencillas que involucran el uso de un esquema geométrico o un dibujo (heurística) calcular áreas.

Estadística y probabilidad I **y** **Estadística y probabilidad II**
En apariencia pareciera que no existe ninguna conexión específica con alguno de los temas, sin embargo es indudable que para logro de los aprendizajes de los conocimientos en estas asignaturas por parte de nuestros estudiantes, se requiere para su comprensión de los conocimientos aritméticos y algebraicos, y geométricos en particular en la deducción de la Moda para datos agrupados a través del conocimiento de triángulos semejantes, la construcción de grafica de barras (en particular en el cálculo de la media aritmética de datos agrupados, que requieren la obtención de las marcas de clase) y de las llamadas ojivas y aunque de manera indirecta es útil en el razonamiento y aplicación del proceso de prueba de hipótesis. Esto último por el tipo de argumentación hipótesis – contrastación y conclusión.

5.5 NIVEL DE TRATAMIENTO

El tratamiento de los temas que se abordan en este material son de un nivel básico; ya que se entiende que el alumno esta poco familiarizado con este tema y aunque lo estudia en la enseñanza secundaria, lo cierto es que lo más probable su tratamiento haya sido deficiente para la mayoría de los alumnos.

Se introduce cada tema con ejemplos y problemas muy sencillos y variados con la finalidad de ir introduciendo los conceptos de geometría plana euclidiana, para que el profesor pueda contar con ejemplos variados que le sirvan como orientación en la planeación, desarrollo de su clase, y realice la evaluación de aprendizajes.

5.6 OBSTÁCULOS PREVISIBLES

Debemos estar conscientes en la dificultad para alcanzar todos los objetivos de la

Unidad 4, de la asignatura de matemáticas II, es de esperarse que los alumnos tengan una serie de deficiencias conceptuales y operativas. Por otra parte, tenemos que tener presente que tenemos por lo general 25 alumnos en el salón de clase y cada uno es distinto en la forma que aprenden.

Por otra parte, la falta de conocimientos y/o deficiencia de ellos determinara el éxito para abordar esta unidad. Sabemos que muchos alumnos que están inscritos en el segundo semestre no siempre tienen los antecedentes académicos necesarios para el buen desempeño en el aprendizaje de los temas y conceptos de matemáticas I, o que muchos de ellos ya no recuerdan, o bien han olvidado varios de los conceptos de geometría vistos en niveles anteriores (secundaria). Por dicha razón siempre es necesario considerar los antecedentes para abordar un nuevo aprendizaje, a veces será necesario revisar y repasar un tema, de manera rápida, antes de retomar el nuevo aprendizaje.

Otro obstáculo que se puede presentar es la falta de tiempo en el calendario de estudios ya que este tema es la última unidad del primer semestre y por consiguiente no se alcanzan a cubrir todos los temas de esta unidad.

Todas estas situaciones comentadas son salvables siempre y cuando el profesor realice una planeación de su docencia, tomando en cuenta los aprendizajes, la temática y la metodología para abordarlo (estrategias de aprendizaje), así como también los tiempos disponibles para lograr los objetivos. Si el profesor toma en cuenta el material didáctico dentro de su planeación, la cual presentamos como Guía de Profesor de matemáticas II. De esta forma ante tales contingencias se pueden realizar los ajustes necesarios para lograr los aprendizajes sugeridos por el programa de estudios (Plan 2016), en los tiempos disponibles.

5.7 SESIONES DIDACTICAS.
Usando las secuencias didácticas, de la Guía.

En el programa de matemáticas II se abordan los conceptos que no son nuevos para los alumnos del CCH. Como son conceptos de geometría plana euclidiana.

Si bien es cierto que el alumno en la enseñanza media básica trabajo y aplicó estos temas, éste los manejó de manera superficial y tangencial, sin realizar un análisis concreto. Ahora nos proponemos expandir y profundizar estos conceptos. Dándole un carácter no solo de aplicaciones prácticas, sino fundamentalmente como una rama de las matemáticas que tienen una estructura y fundamentos sólidos en el campo de esta ciencia. Ver y analizar los conceptos Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras. Como una unidad sólida, útil y con bases matemáticas que le permitirán al alumno abordar una gran cantidad de problemas donde se involucran este tipo de problemas, las cuales trascenderán a otras más complejas, en los siguientes cursos no solo en las matemáticas que se imparten en el colegio a nivel Bachillerato, sino a otros niveles de las matemáticas que pudiera hallar en los niveles de licenciatura.

En esta unidad se toma en cuenta que el alumno tiene familiaridad con los conceptos e ideas de: línea, triangulo, polígono, perímetro y área, así como las clasificaciones correspondientes para diversos tipos de triángulos y polígonos.

En la Unidad Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras. El alumno tendrá la oportunidad de comprender y darse cuenta de que existen métodos y procedimientos eficaces que le permiten abordar y resolver una gran cantidad de problemas donde se vean involucrados los conceptos de perímetro, área, y aunque no se exige en el presente programa de esta asignatura, ampliarlo al concepto de volumen. Por otra parte, se busca que el alumno Argumente deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y los procesos en la resolución de problemas induciendo al alumno a realizar un razonamiento deductivo y de esto a la comprensión del “por qué “la necesidad de realizar demostraciones.

En esta unidad temática se busca desarrollar en el estudiante de habilidades para el manejo de estrategias generales y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema tales como: introducir al alumno en el proceso del razonamiento deductivo y a la comprensión de las demostraciones.

5.7.1 SESIONES.

A través de las “secuencias didácticas” de la Guía de profesor de matemáticas II

UNIDAD 4

Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

Contenido Temático:	**página**
1. 1. Notación. Concepto de Congruencia. Figuras congruentes. 3. Congruencia de triángulos. Criterios de congruencia de triángulos. a) LAL. b) LLL. c) ALA.	
1.2 Construcciones de: Bisectriz de un ángulo. Mediatriz de un segmento. Perpendicular a una recta. Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Problemas de aplicación.	
1.3. Notación. Semejanza. Figuras semejantes. Semejanza de triángulos. Criterios de semejanza de triángulos: a) LLL, b) LAL, c) AAA. Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes. Problemas de aplicación.	
1.4. Teorema de Thales y su recíproco. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.	
1.5. Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	

Introducción.

La geometría es una rama de las matemáticas que trata de las propiedades y medida del espacio o del plano, fundamentalmente, su utilidad práctica es muy variada, por ejemplo, se pude citar que, en el diseño de la tarjeta de crédito, débito, la credencial de la Escuela, los televisores de pantalla plana se presenta una relación perfecta. Sus logos, aristas, curvas, tamaño establecen una asociación con la geometría propia del ser humano.

La geometría Es un código en donde se utilizan patrones diferentes como el arte; diseño de productos que consumimos; por ejemplo una lata de refresco; que busca atraer al comprador a través de su belleza estética, la arquitectura; en el diseño de edificios, templos, mezquitas, pirámides, auditorios aeropuertos, en la estética del cuerpo humano, relacionada a través de la proporción de phi ; el ancho a razón del largo de la cabeza tiende a phi; La mano a razón del antebrazo tiende a phi; en la mano, la distancia entre las falanges.
En la música; los acordes del sonido de una cuerda de guitarra producen sonidos diferentes al dividir la cuerda en partes, ½, ¼, 1/8. En los símbolos esvástica, estrella, cruz, circulo, cuadrado entre otros. Al dividir una cuerda en la mitad, se duplica su tono. Existe la escala Pitagórica basada en quintos harmónicos, la cual está presente como raíz en la música moderna. Algunos médicos basados en la llamada geometría sagrada afirman que el cuerpo del ser humano, está construido con patrones geométricos y proporciones, en el latido del corazón, la sístole y la diástole están espaciadas a razón de phi , los códigos de la geometría dicen ellos, se pueden utilizar en la vida diaria, al pintar una pared para obtener mayor armonía, se puede multiplicar el alto total por 0,618 y así se generan dos segmentos: el de abajo debe ser más oscuro y el de arriba, más claro.

El propósito principal de esta unidad es que al finalizar el alumno, sea capaz de Identificar relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiere algunas conexiones entre resultados. Que el estudiante valore la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico. Que aplique conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana para resolver problemas.
El tiempo destinado a cubrir estos objetivos de aprendizaje de esta unidad 4: Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras es de 25 horas

Referencias:

Desconocido. (No se indica). Geometría se aplica en la vida diaria. 25 de agosto de 2018, de Trato contrato Sitio web:
http://www.portafolio.co/economia/finanzas/geometria-aplica-vida-diaria-180528

Varios. (No se indica). Aplicaciones de la geometría. 25 de agosto de 2018, de Universidad Estatal a Distancia Sitio web:
https://multimedia.uned.ac.cr/pem/geometria_euclidea/aplicaciones.html

Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

Propósito:
Al finalizar la unidad, el alumno aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

Tiempo: 25 horas

Temática:

Congruencia

Notación.
Congruencia
Figuras congruentes
Congruencia de triángulos.
Criterios de congruencia de triángulos.

a) LAL
b) LLL
c) ALA

Construcciones de:
Bisectriz de un ángulo.
Mediatriz de un segmento.
Perpendicular a una recta.
Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.
Problemas de aplicación.

Semejanza y teorema de Pitágoras.

Notación
Semejanza
Figuras semejantes
Semejanza de triángulos.
Criterios de semejanza de triángulos:

a) LLL
b) LAL
c) AAA

Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.
Problemas de aplicación.
Teorema de Thales y su recíproco.
Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.
Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

Desarrollo:

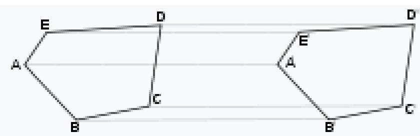
Congruencia (geometría)

Congruencia de triángulos

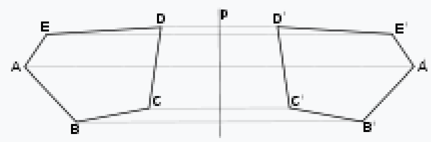
Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Notación: Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes, esto se notará como:

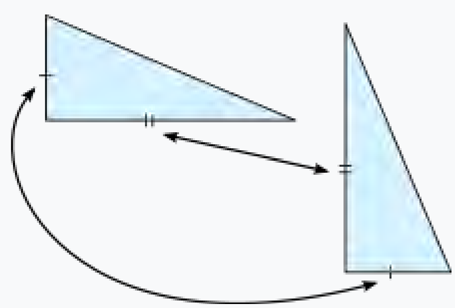
$$\triangle \mathrm{ABC} \cong \triangle \mathrm{DEF}$$



Figuras congruentes relacionadas mediante traslación.



Figuras congruentes relacionadas mediante reflexión.



Figuras congruentes relacionadas mediante reflexión y rotación.

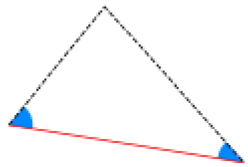
En matemáticas, dos figuras geométricas son **congruentes** si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir, si existe una isometría que los relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación y/o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras congruentes se llaman **homólogas** o correspondientes.

Criterios de congruencia

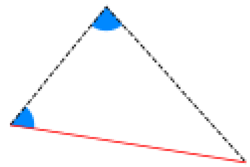
Criterios para establecer que dos triángulos sean congruentes con un mínimo de condiciones, a veces llamado de forma genérica *postulados* o *teoremas de congruencia* ya que, aunque triviales se tienen que demostrar. En principio se busca construir triángulos congruentes con el mínimo de información sobre este.

1. **Caso AAL o ALA**: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus ángulos respectivos y el lado entre ellos. En un triángulo

si conocemos dos de sus ángulos el tercer ángulo queda unívocamente determinado.

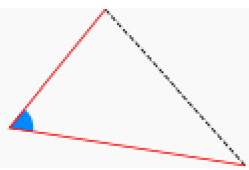


ALA



AAL

2. **Caso LAL**: Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados iguales y el mismo ángulo comprendido entre ellos.



LAL

3. **Caso LLL**: Dos triángulos son congruentes si tienen los tres lados iguales.

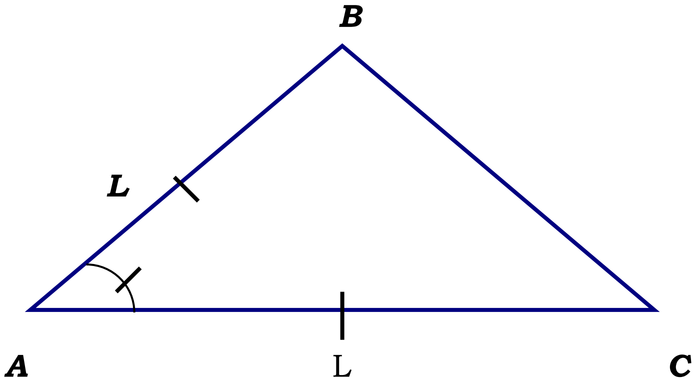
4. **Caso LLA**: Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo sobre uno de ellos iguales. Este caso no es de congruencia si no damos más información sobre el triángulo, como la de ser triángulo rectángulo o si tiene o no ángulos obtusos.

https://es.wikipedia.org/wiki/Congruencia_(geometr%C3%ADa)

- **Reproducir un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)**

  Caso I

  LAL (en este orden, es decir lado, lado y su ángulo comprendido)



Reproducir el ΔABC anterior, dados los lados AB, AC y el ∠BAC.

Construcción:

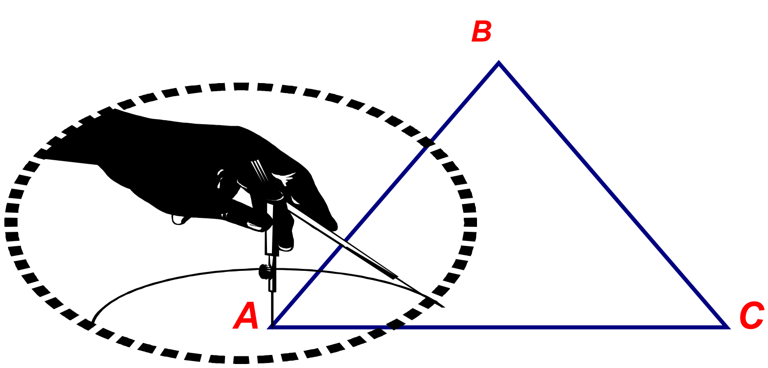
Primero, construir una línea de trabajo (**LT**)

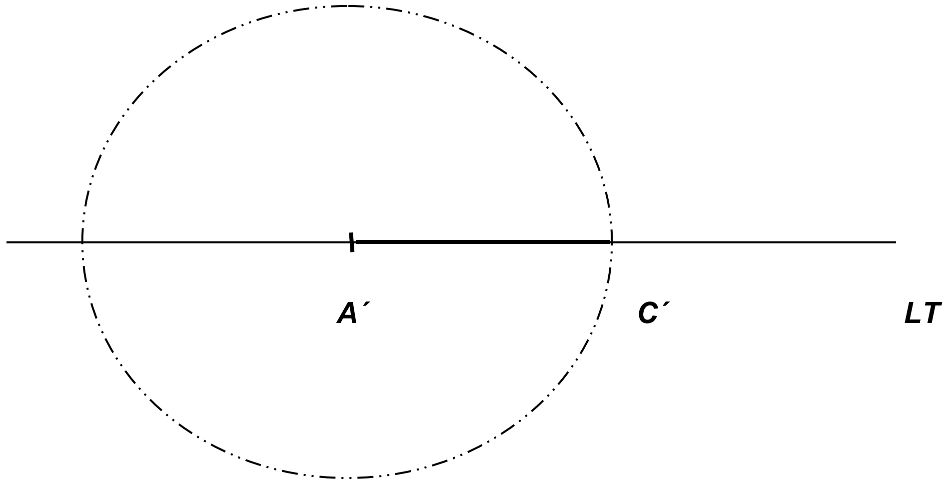
LT

Segundo, sobre la **LT** localizar un punto ***A´***, cualquiera.

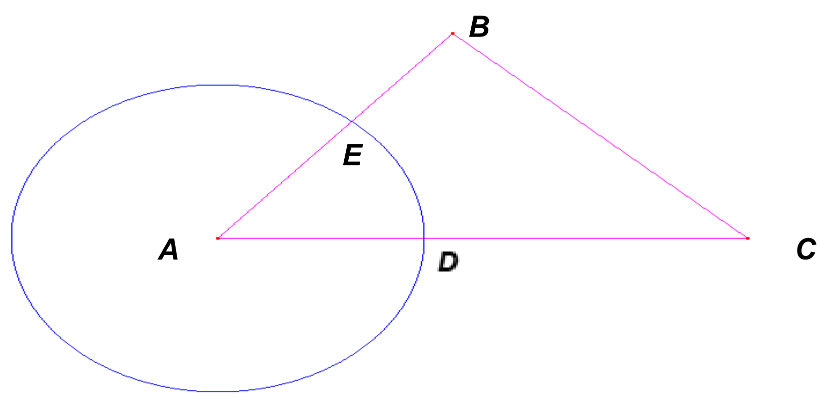
A´ **LT**

Después con el compás apoyándose en el punto **A** del segmento **AC** del ***ΔABC*** abrirlo hasta tocar el punto **C**, con esta abertura, del compás, y apoyándose en el punto ***A´*** en la **LT**, trazar una circunferencia, llamando al punto de intersección de la circunferencia y la **LT**, C´, a este segmento en la LT llámale A¨C´ y es igual a AC.

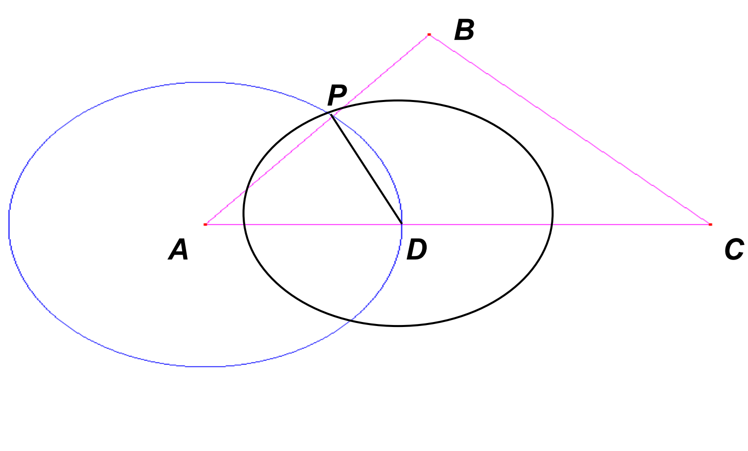




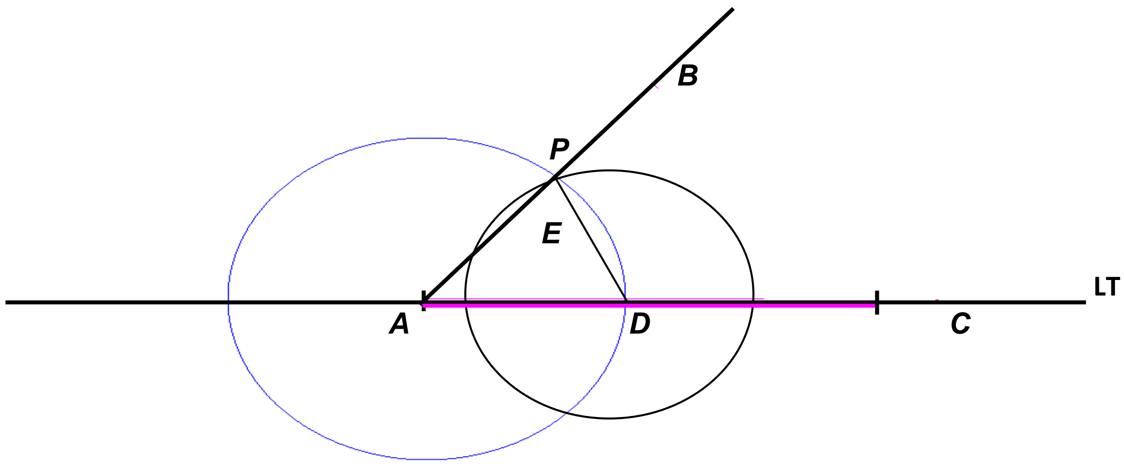
Tercero, construir el ∠BAC. Apoyándose en el punto A del ΔABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto C y traza una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto D y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto E.



Ahora, apoyándose en el punto D abre el compás hasta tocar el punto E y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.

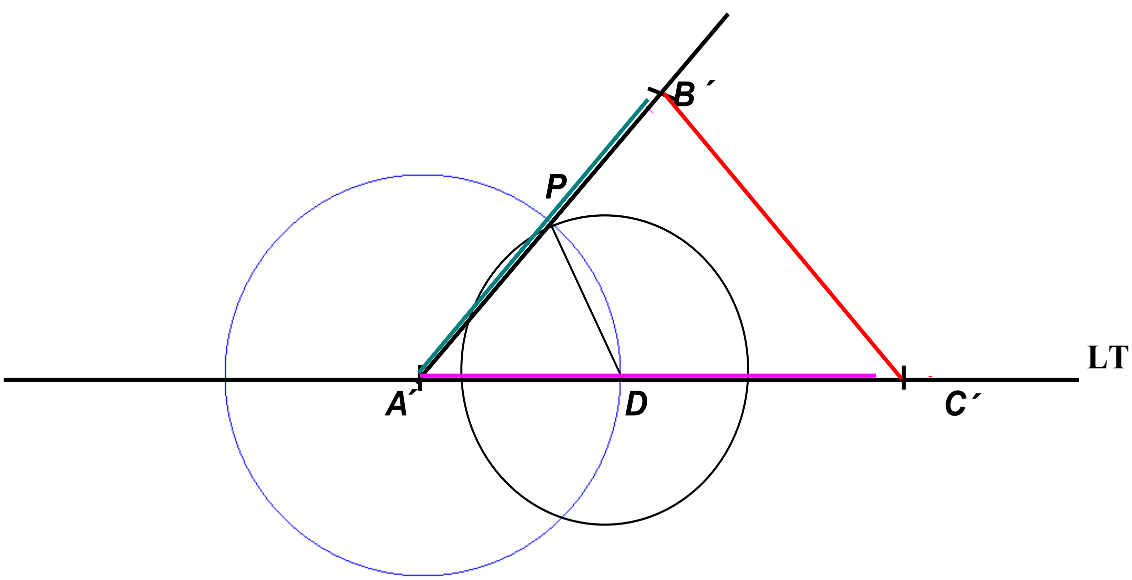


Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***A´*** y con la abertura ***AD,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***D*** y con la abertura ***DE***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***P***, une los puntos ***A´*** y ***P*** con una línea recta prolongada hacia arriba.



Luego, apoyándote en el punto ***A*** y sobre el segmento AB abre el compás hasta el punto B.

Con esta misma abertura apoyándose en el punto ***A´*** en la **LT** y traza una circunferencia a la intersección de esta circunferencia con la recta prolongada hacia arriba llámale el punto ***B´***, la distancia A´B´ = AB.

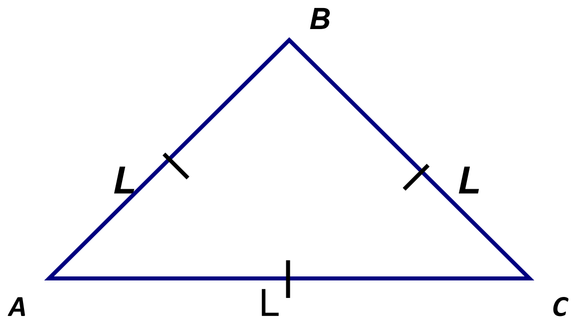


Finalmente une los puntos B´ y C´ con lo cual obtendrás el triángulo ΔA´B´C´ solicitado. Ver archivo:

[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Congruencia de triangulo criterio L.A.L.ggb]

Caso II   Ver archivo:

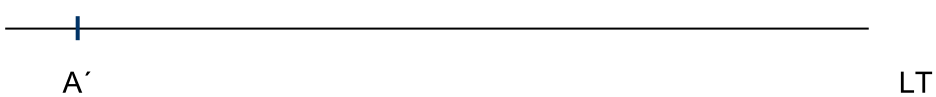
LLL



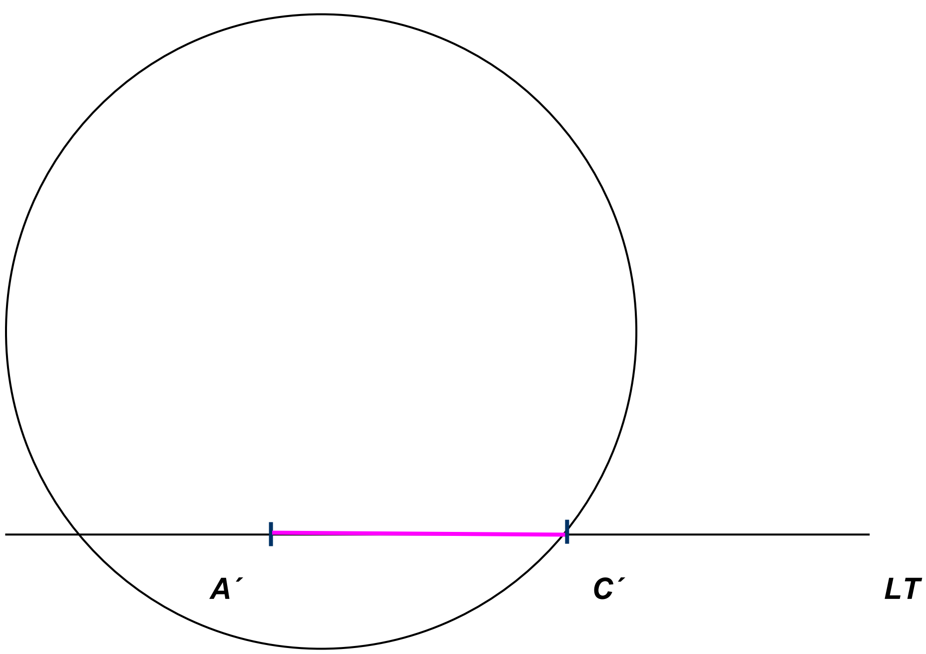
Reproducir el ΔABC anterior, dados los lados AB, AC y BC

Construcción:

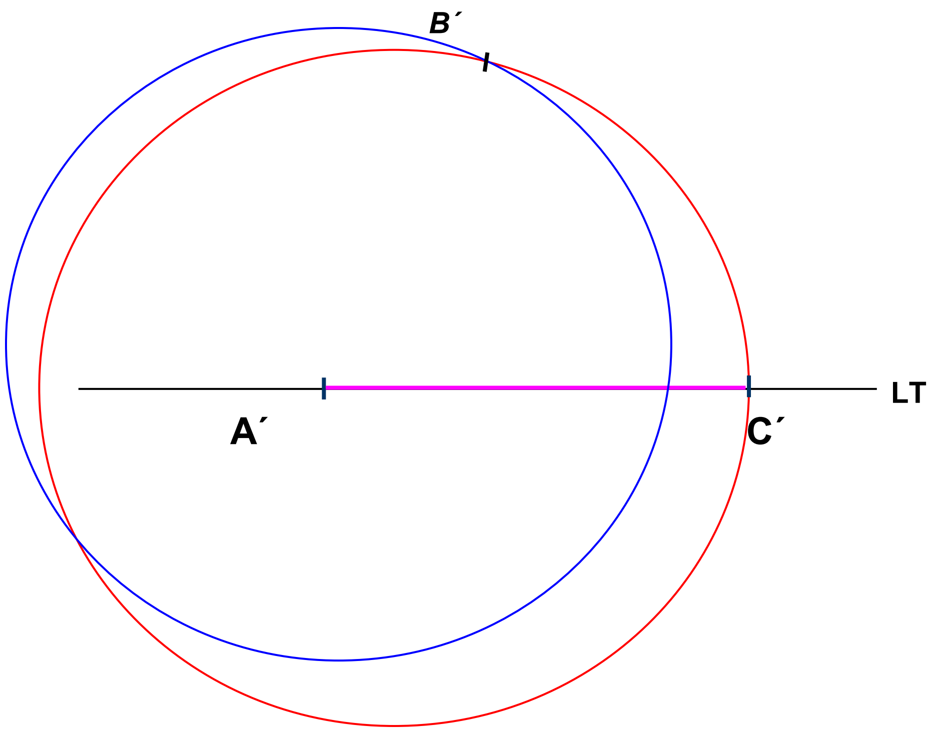
Primero construye una línea de trabajo LT y encuentra un punto A´ sobre la LT.



En el ΔABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto C, ahora en la LT apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre la circunferencia y la LT llámale el punto ***C´***.

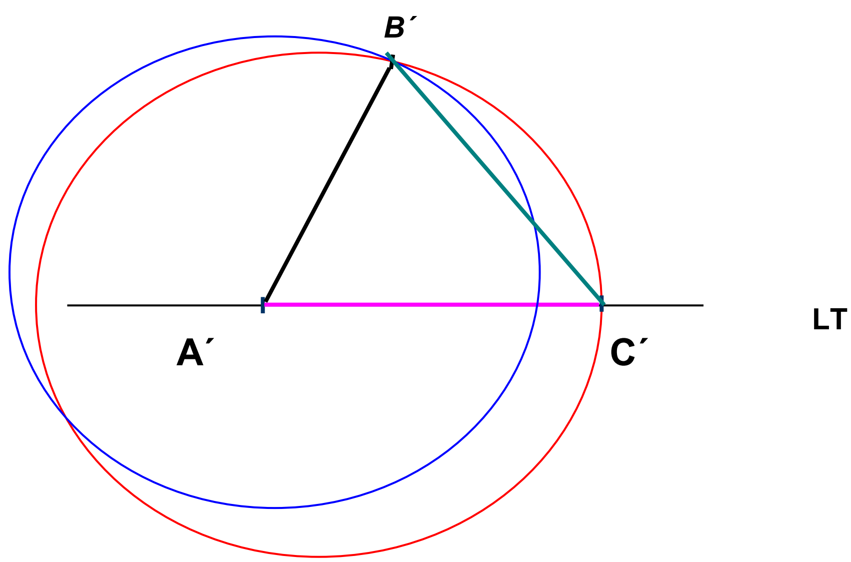


Nuevamente en el ∆ABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto B, ahora en la LT apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre las circunferencias llámale el punto ***B´***.



Une los puntos A’ y B´ con una recta, esta recta A´B´= AB.

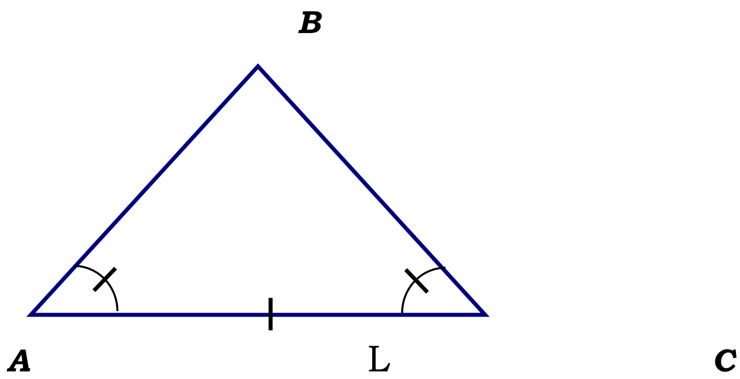
Finalmente une los puntos B´ y C´ con una recta, esta recta B´C´= BC, estas líneas definirán el ∆A´B´C´ solicitado.



[**Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Congruencia de triangulos tres lados.ggb**]

Caso III

ALA (ángulo, lado y otro ángulo seleccionados de manera consecutiva)



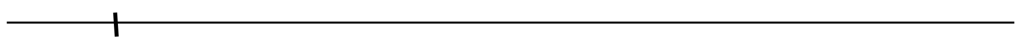
Reproducir el ΔABC anterior, dados un lado AC y los $\angle BAC$ y $\angle BCA$.

Construcción:

Primero, construir una línea de trabajo (**LT**)

LT

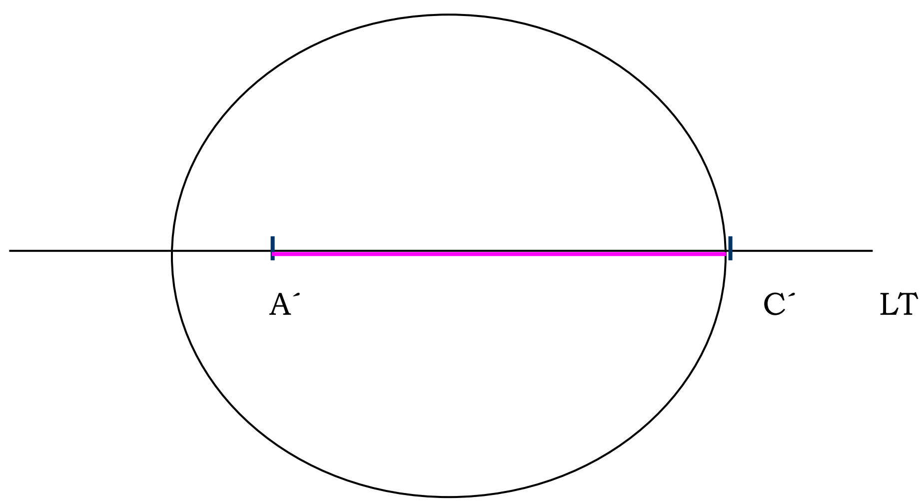
Segundo, sobre la **LT** localizar un punto ***A´***, cualquiera.



LT

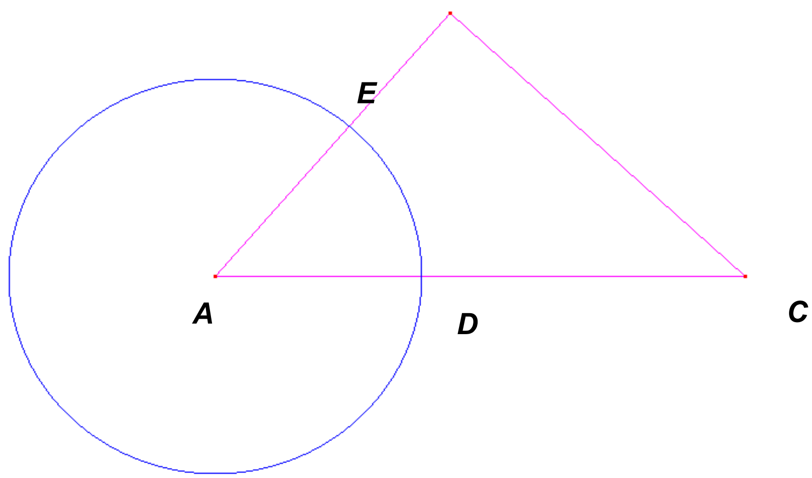
A´

En el ΔABC, con el compás apóyate en el punto A y ábrelo hasta el punto C, ahora en la L.T. apóyate en el punto A´ y con esta abertura, del compás, traza una circunferencia, al punto de intersección entre la circunferencia y la L.T. llámale el punto ***C´***.

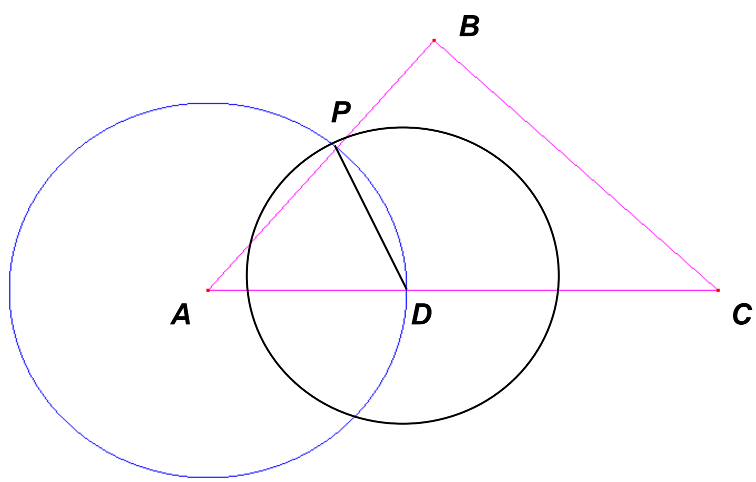


Esta recta A´C´= AC

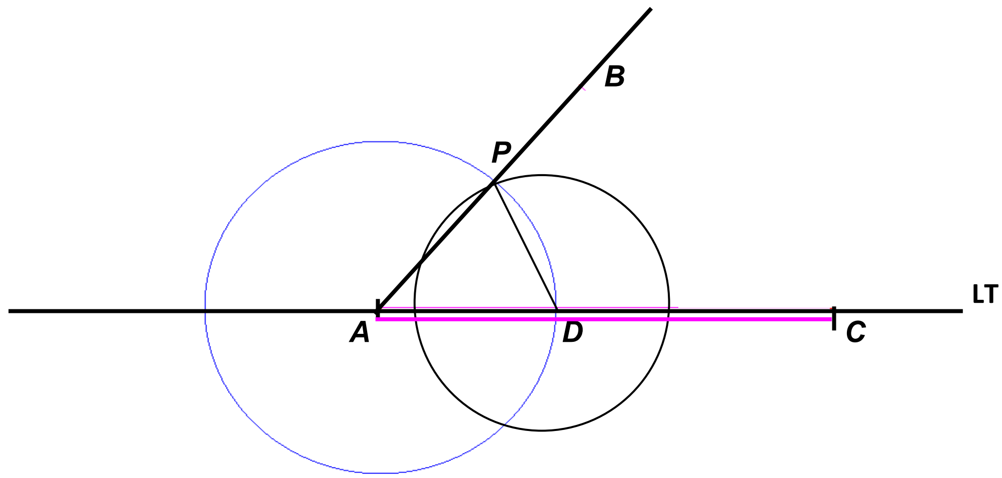
Construir el ∠BAC. Apoyándose en el punto A del ΔABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto C y traza una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto D y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto E.



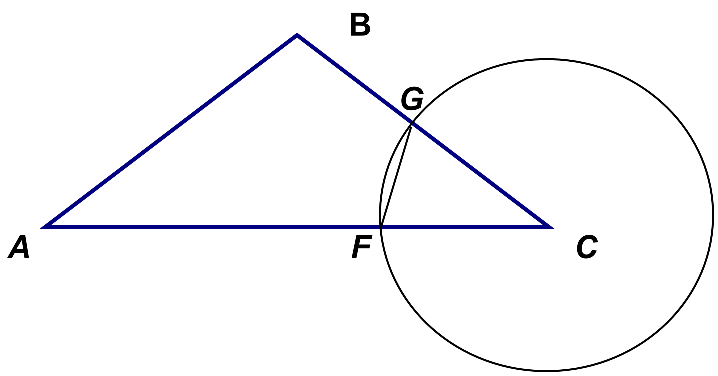
Ahora, apoyándose en el punto D abre el compás hasta tocar el punto E y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.



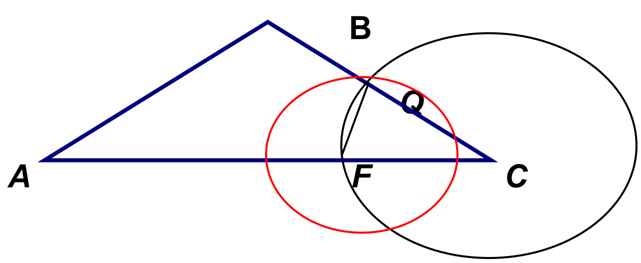
Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***A´*** y con la abertura ***AD,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***D*** y con la abertura ***DE***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***P***, une los puntos ***A´*** y ***P*** con una línea recta prolongada hacia arriba.



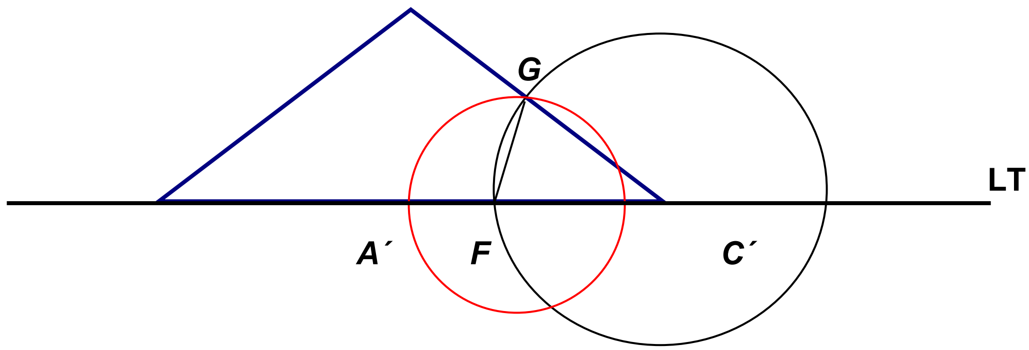
Construir el ∠BCA. Apoyándose en el punto C del ΔABC, abrir el compás sobre el segmento AC tocándolo en un punto anterior al punto A y traza una circunferencia, llama a la intersección de esta circunferencia con el segmento AC el punto F y a la intersección de la circunferencia con el segmento AB el punto G.



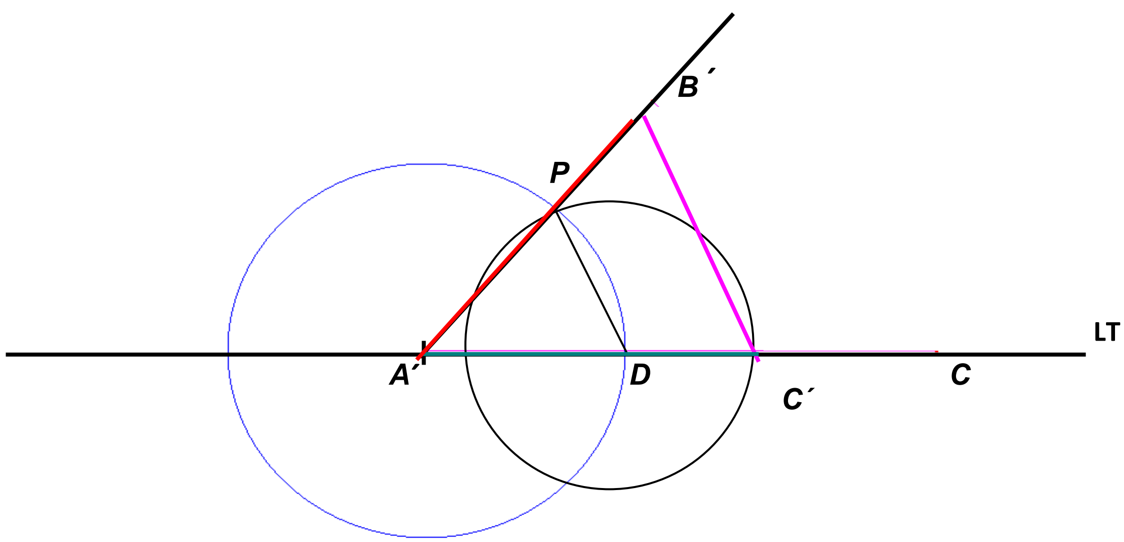
Ahora, apoyándose en el punto F abre el compás hasta tocar el punto G y traza la circunferencia correspondiente, el punto de intersección entre estas dos circunferencias llámale P.



Hagamos esto mismo sobre la **LT** apóyate en el punto ***C´*** y con la abertura ***CF,*** del compás, traza una circunferencia y luego apoyándote en el punto ***F*** y con la abertura ***FG***, del compás, traza otra circunferencia al punto de intersección de estas dos circunferencias llámale el punto ***Q***, une los puntos ***C´*** y ***Q*** con una línea recta prolongada hacia arriba.



Observa que si prolongas la recta A´P y C´G estas se cortan, el punto donde se cortan llámale el punto B´, lo que tiene como consecuencia que los segmentos AB = A´B´ y BC = B´C´ y estos forman el triángulo ΔA´B´C´ solicitado.



[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Matematicas II Unidad III nueva\Congruencia de triangulos A.L.A.ggb]

Construcciones de:

La Bisectriz de un ángulo:

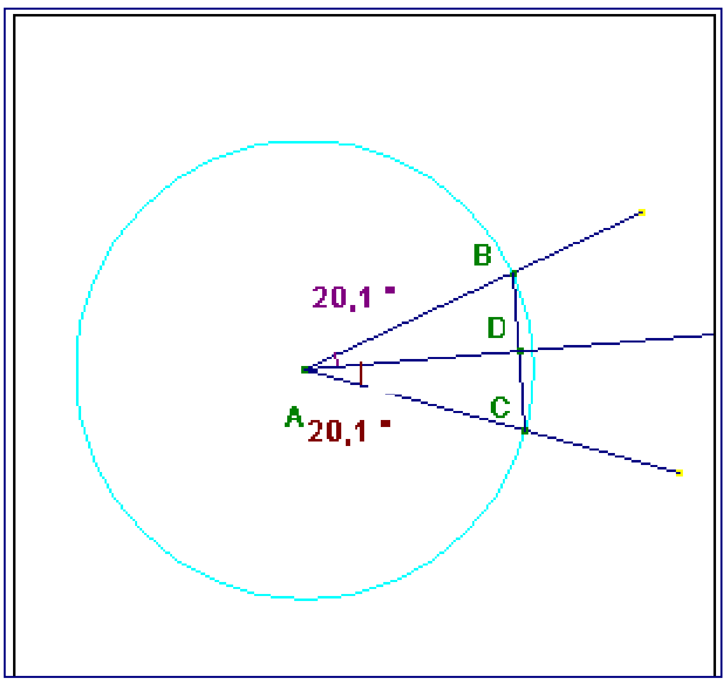
Construir un segmento definido por dos puntos con extremo en un punto llamado A. Construir un segmento distinto al anterior definido por dos puntos con extremo también en A.

Encontrar un punto sobre el primer segmento al que llamaremos B. Construir un círculo definido por dos puntos con centro en A y radio AB. Encontrar la intersección del círculo y el segundo segmento, al punto de esta intersección le llamamos C.

Construimos el segmento definido por los puntos B y C. Encontrar el punto medio del segmento BC, al que llamaremos D.

Construir el segmento definido por los puntos AD. Marcar y medir los ángulos definidos por los tres puntos BAD y DAC respectivamente. Verificamos así el teorema. Podemos observar diferentes ángulos arrastrando el punto A con el ratón o el punto extremo del primer segmento.

Hemos así verificado la existencia de la bisectriz que es AD.



Demostración

Considérese el $\angle$ A de la figura.

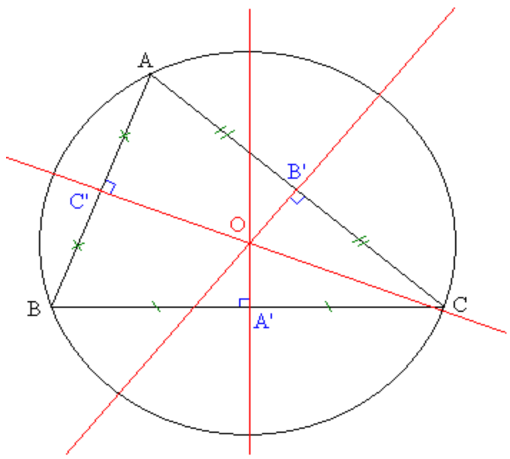
Tómese B y C en los lados del $\angle$ A, de manera que AB $\cong$ AC. Sea D el punto medio de BC. Entonces

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ADC pues están en una correspondencia LLL. Por lo tanto $\angle$BAD $\cong$ $\angle$ CAD por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes, por lo que el $\angle$ A tiene una bisectriz AD.

- Mediatriz de un segmento.

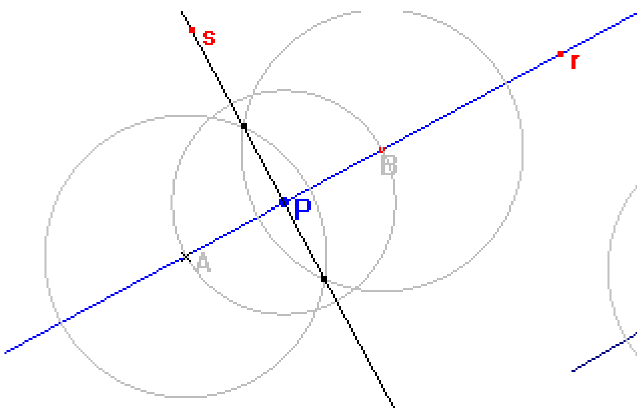
La **mediatriz** de un segmento [AB] es la recta de los puntos del plano equidistantes de A y B. Por razones de simetría, la mediatriz corta el segmento [AB] por su mitad y perpendicularmente.

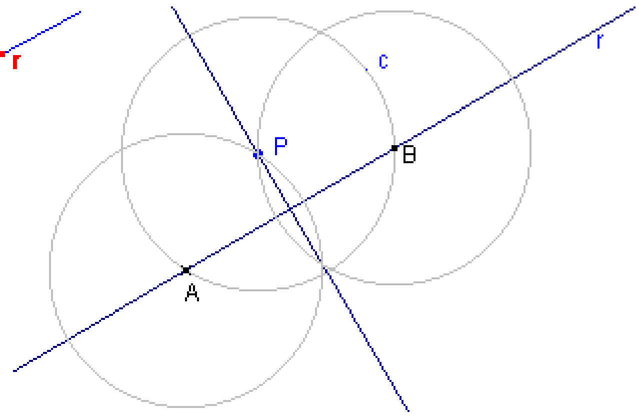
En un triángulo ABC, las mediatrices de los tres lados se cortan en un único punto, el circuncentro - O en la figura - que es centro del **círculo circunscrito** al triángulo.



Recta perpendicular a una recta r por un punto P:

P perteneciente a r, P exterior a r





Observa que, en ambos casos, la recta solución es la mediatriz de un segmento AB.

Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto:

a.- que pertenece a la recta.

Sea ***L*** una recta dada y un punto ***A*** sobre la recta ***L***, tal como lo muestra la figura1.

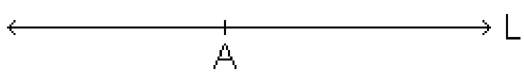


Fig. 1

Usando una abertura arbitraria del compás y apoyando la aguja de éste sobre el punto **A**, se determinan dos puntos ***C*** y ***D***, sobre la recta ***L***, tal que

CA* = *AD. Ver Figura 2

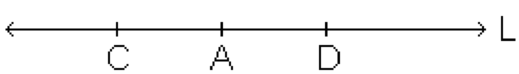


Fig. 2

Con una abertura un poco mayor que la abertura anterior y con centro en ***C*** y ***D*** se trazan dos arcos que se interceptarán en ***P*** y ***Q.*** La recta será la perpendicular pedida que pasará por ***A***. Ver Figura 3.

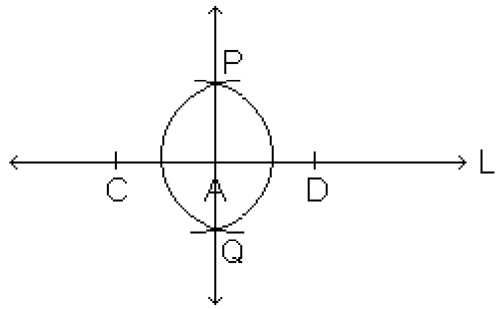
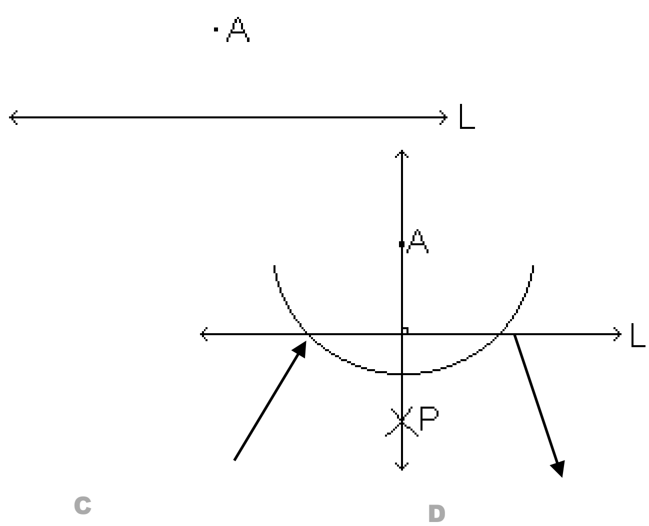


Fig. 3

b). - fuera de ella

Sean ***L*** una recta dada y ***A*** un punto cualquiera, fuera de la recta.

Con una abertura del compás, cuya distancia entre el punto de apoyo y el lápiz del compás es mayor que la distancia entre el punto ***A*** y la recta ***L***. Con centro en ***A*** se traza un arco de circunferencia que se intercepta a ***L*** en los puntos ***C*** y ***D***. Luego con la misma abertura y con centro en ***C*** y ***D*** se trazan dos arcos, en el semiplano distinto al semiplano donde está ***A***, los que se interceptan en ***P***. La recta es la perpendicular pedida. Ver figuras siguientes.



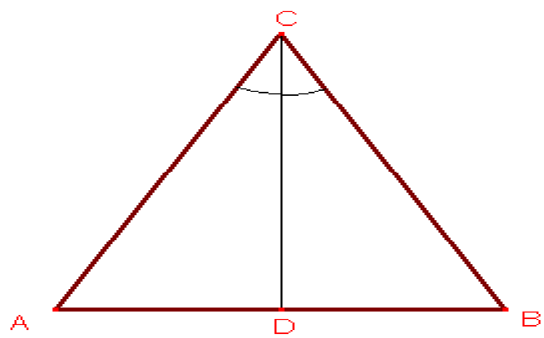
Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de su base son congruentes (*Teorema del triángulo isósceles*).

Sea ABC un triángulo isósceles en que AC es igual a BC.

Demostrar que: $\angle A = \angle B$

Trazar la bisectriz CD del $\angle ACB$, ahora en los triángulos ADC y BDC,



$AC = BC$	Por hipótesis
$CD = CD$	Por Identidad
$\angle ACD = \angle DCB$	Por construcción
$\therefore \Delta\, ADC \cong \Delta\, BDC$	Por el criterio de congruencia l.a.l.

$\therefore \angle\, A \cong \angle\, B$ Partes homologas de 2 figuras congruentes son iguales

(Teorema de Tales: Puente de los Asnos)

Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces es un triángulo isósceles (*Recíproco del teorema del triángulo isósceles*).

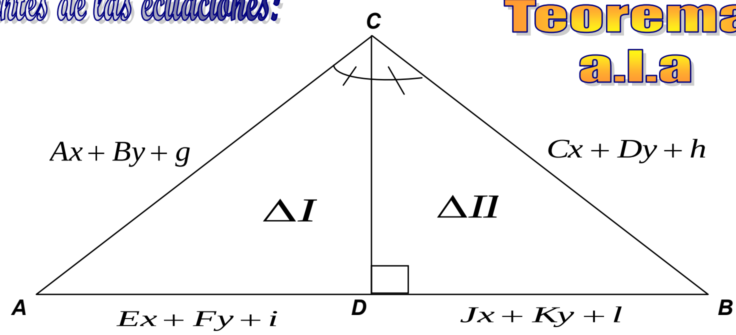
Problemas de aplicación.

Ejemplo 1). - Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

Teorema: a.l.a

A = 7
B = 0
g = 0
C = 4
D = 6
h = 0
E = 3
F = 0
i = 0
J = 0
K = 7
l = -4



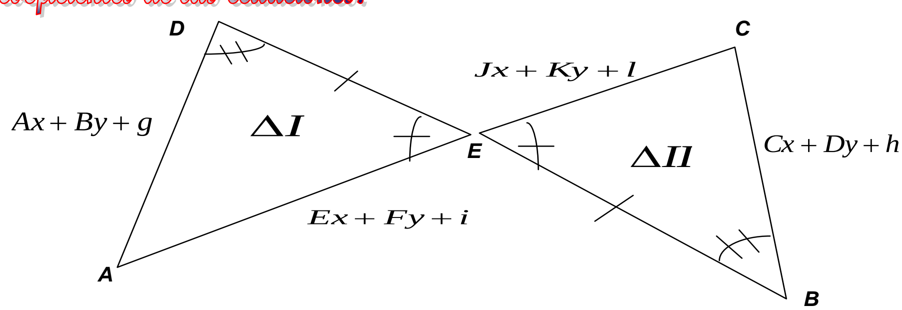
$\overline{AC}=$	7 x	+	0 y	+	0
$\overline{BC}=$	4 x	+	6 y	+	0
$\overline{AD}=$	3 x	+	0 y	+	0
$\overline{BD}=$	0 x	+	7 y	-	4

$x =$ 8 $y =$ 4

Ejemplo 2). - Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = 0
B = 6
g = 5
C = 0
D = 0
h = 56
E = 4
F = 0
i = -3
J = 0
K = 0
l = 20



$\overline{AD}=$	0 x	+	6 y	+	5
$\overline{BC}=$	0 x	+	0 y	+	56
$\overline{AE}=$	4 x	+	0 y	-	3
$\overline{EC}=$	0 x	+	0 y	+	20

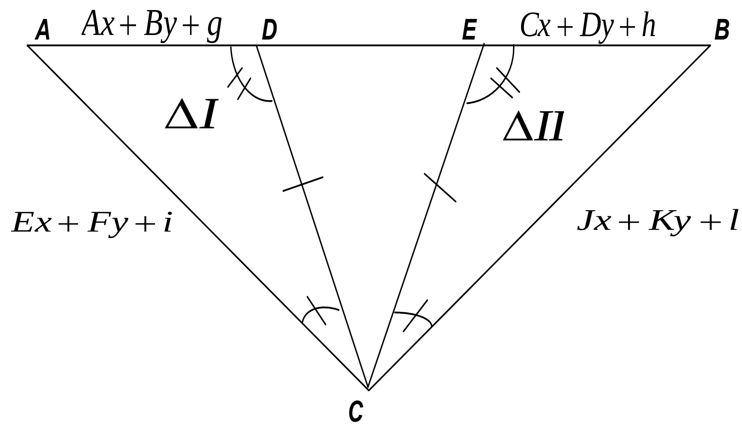
Teorema: a.l.a

$x =$ 5 3/4 $y =$ 8 1/2

Ejemplo 3).- Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = 1
B = 0
g = 6
C = 5
D = 0
h = 0
E = 0
F = 2
i = 5
J = 0
K = 3
l = 1



$\overline{AD}=$	x	+	0 y	+	6	
$\overline{BC}=$	5 x	+	0 y	+	0	
$\overline{AE}=$	0 x	+	2 y	+	5	
$\overline{EC}=$	0 x	+	3 y	+	1	

-6 -4 16 4

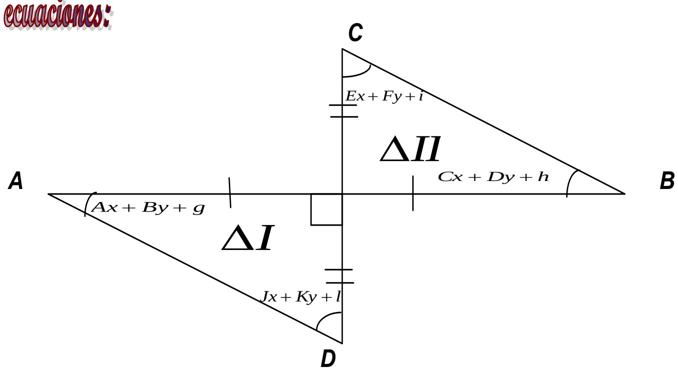
$x=$ 1 1/2 $y=$ 4

Teorema: a.l.a

Ejemplo 4).- Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = 0
B = 5
g = 0
C = 7
D = 0
h = 0
E = 4
F = 0
i = -3
J = 0
K = 5
l = -7



$\angle A=$	0 x	+	5 y	+	0
$\angle B=$	7 x	+	0 y	+	0
$\angle C=$	4 x	+	0 y	-	3
$\angle D=$	0 x	+	5 y	-	7

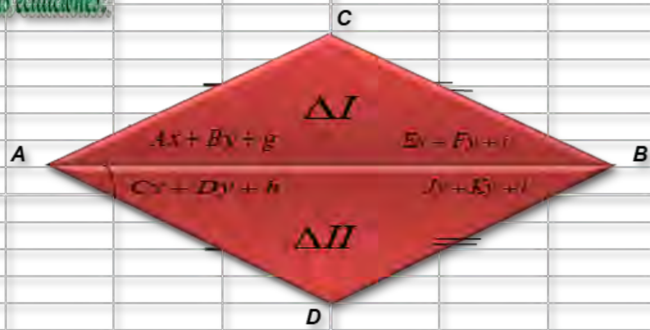
$x=$ 1 1/3 $y=$ 1 7/8

Teorema: l.a.l

[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\congruencia1 con ecuaciones.xlsx]

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A =	0
B =	1
g =	-5
C =	0
D =	0
h =	42
E =	1
F =	0
i =	20
J =	0
K =	0
l =	26



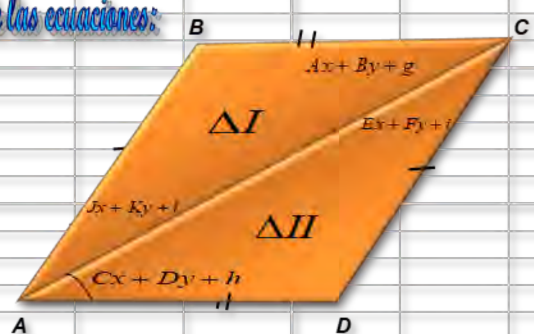
$\angle BAC =$	$0\,x$	+	y	-	5
$\angle BAD =$	$0\,x$	+	$0\,y$	+	42
$\angle ABC =$	x	+	$0\,y$	+	20
$\angle ABD =$	$0\,x$	+	$0\,y$	+	26
	6	1	-47	-1	
	$x =$	6	$y =$	47	

Teorema: L.L.L

$$x = \frac{b\cdot(i-l) + d\cdot(l-i) + (f-k)\cdot(h-g)}{a\cdot(f-k) + b\cdot(j-e) + c\cdot(k-f) + d\cdot(e-j)} \wedge y = -\frac{a\cdot(i-l) + c\cdot(l-i) + (e-j)\cdot(h-g)}{a\cdot(f-k) + b\cdot(j-e) + c\cdot(k-f) + d\cdot(e-j)}$$

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A =	2
B =	0
g =	0
C =	0
D =	0
h =	24
E =	0
F =	3
i =	0
J =	0
K =	0
l =	60



$\angle BAC =$	$2\,x$	+	$0\,y$	+	0
$\angle BAD =$	$0\,x$	+	$0\,y$	+	24
$\angle ABC =$	$0\,x$	+	$3\,y$	+	0
$\angle ABD =$	$0\,x$	+	$0\,y$	+	60
	-72	-6	120	6	
	$x =$	12	$y =$	20	

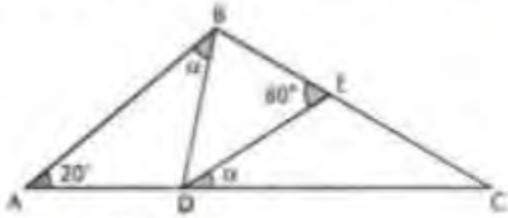
Teorema: L.L.L

$$x = \frac{b\cdot(i-l) + d\cdot(l-i) + (f-k)\cdot(h-g)}{a\cdot(f-k) + b\cdot(j-e) + c\cdot(k-f) + d\cdot(e-j)} \wedge y = -\frac{a\cdot(i-l) + c\cdot(l-i) + (e-j)\cdot(h-g)}{a\cdot(f-k) + b\cdot(j-e) + c\cdot(k-f) + d\cdot(e-j)}$$

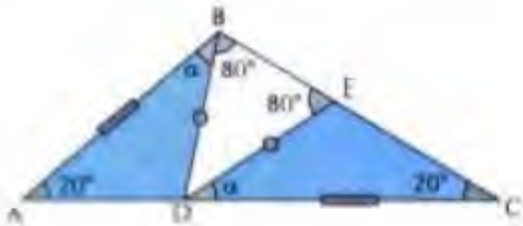
Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\congruencia1 con ecuaciones.xlsx

Ejemplo 7.-

En la figura: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{DB} \cong \overline{DE}$ .Hallar $\boldsymbol{\alpha}$.



Solucion:



- **Δ** ABD ≅**Δ** EDC (**LAL**)

  $m\angle ECD = m\angle BAD = 20°$

- Como el **Δ** DBE es isósceles

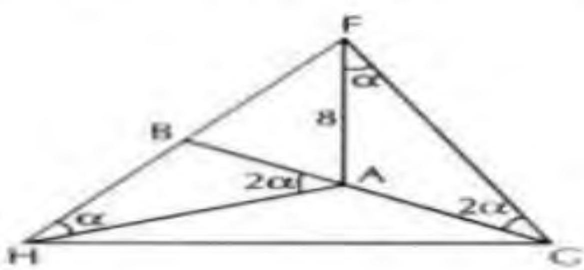
  $m\angle DBE = m\angle DEB = 80°$

- En el**Δ** ABC
  $20° + (\alpha + 80°) + 20° = 180°$

$\boxed{\alpha = 60°}$

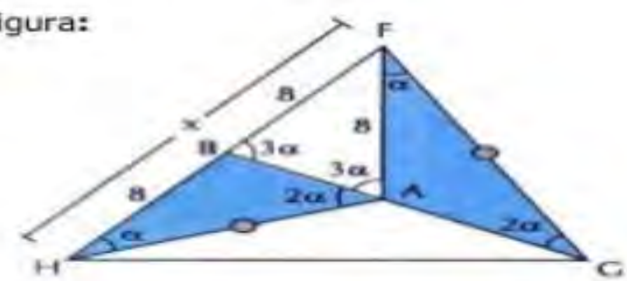
Ejemplo 8.-

Del gráfico $\overline{HA} \cong \overline{FG}$, FA = 8, hallar la longitud de $\overline{HF}$



Solución:

Identificamos datos en la figura:



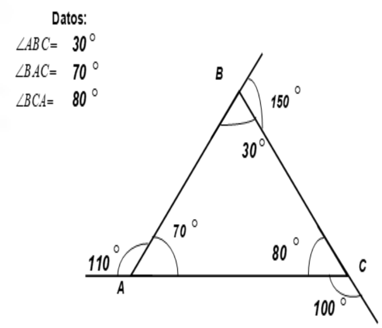
- **Δ**BHA ≅**Δ** FGA (**ALA**)
  HB = AF = 8 u.

- Por el teorema de

  Δ FAG: $\angle$ externo A $= \alpha + 2\alpha = 3\alpha$
  Δ BHA: $\angle$ externo B $= \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

- El Δ BFA es isósceles
  BF = AF = 8
- Luego: x = 8 + 8

$$\boxed{\overline{HF} = 16\ u}$$



Ángulos Internos y el ángulo externo de un triángulo

Ejemplo 9.-

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. La bisectriz exterior de A con la prolongación de $\overline{CB}$ se cortan en N.si $\overline{AB}$ = 3cm., AH = 2cm.

Solución:

- Sea NP = x la distancia pedida.
- Al trazar $\overline{NQ}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{CA}$ resulta:

  ◺ AQN ≅ ◺ ABN

  ⇒ AQ = AB = 3 cm

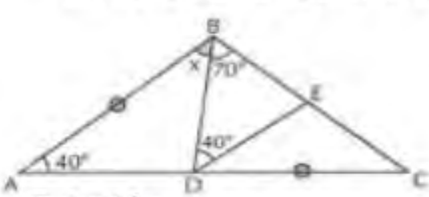
- En el rectángulo NQHP:

$$\underbrace{NP}_{x} = \underbrace{QH}_{5}$$

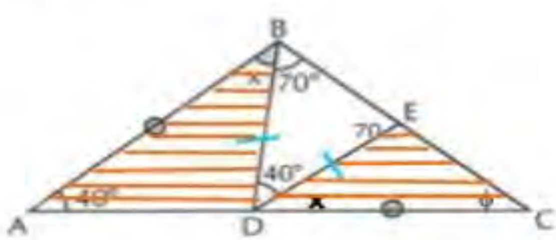
$$\boxed{NP = 5\ cm}$$

Ejemplo 10.-

En la siguiente figura Sí: AB = CD calcular "x"



Solución:



El Δ BDE es isósceles:

DB = DE

$\Delta ABD \cong \Delta CDE$ (**L.A.L**)
Entonces: $\phi = 40°$

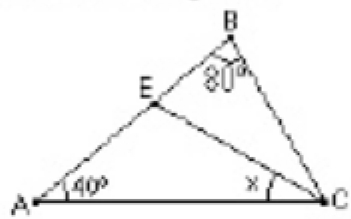
ΔABC: $40° + (x + 70°) + \phi = 180°$
$40° + (x + 70°) + 40° = 180°$

$$\boxed{x = 30°}$$

Bisectriz de un ángulo.

Ejemplo 1.-

Si $\overline{CE}$ es bisectríz del ángulo C. Calcular la medida del ángulo " x "



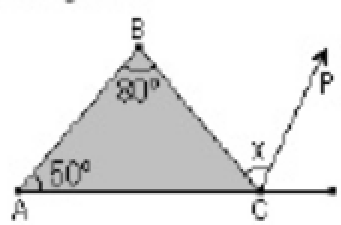
Suma de ángulos internos en el ΔABC :

$$80° + 40° + 2x = 180° \therefore 2x = 180° - 120° = 60°$$

$$x = \frac{60°}{2} = 30°$$

Ejemplo 2.-

Si $\overline{CP}$ es bisectríz exterior del ángulo C. Calcular el ángulo " x "



Suma de ángulos internos en el ΔABC :

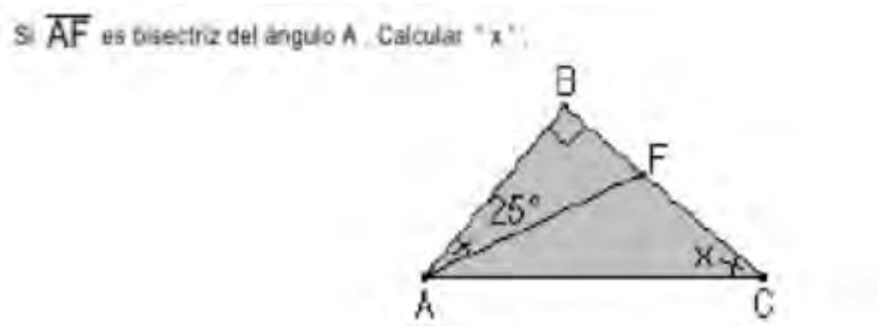
$$80° + 50° + \angle C = 180° \therefore \angle C = 180° - 130° = 50°$$

$$\angle C + \angle C = 180° \therefore \angle C' = 180° - 50° = 130°$$

$$\therefore x = \frac{130°}{2} = 65°$$

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/triangulo-isosceles/#comment-7592

Ejemplo 3.-

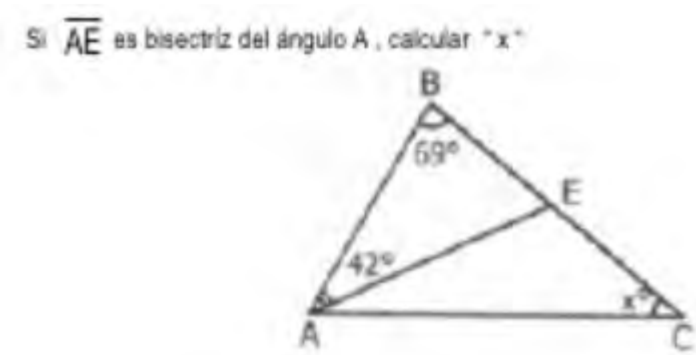


Suma de ángulos internos en el ΔABC :

$90° + 50° + x = 180° \therefore x = 180° - 140° = 40°$

$x = 40°$

Ejemplo 4.-

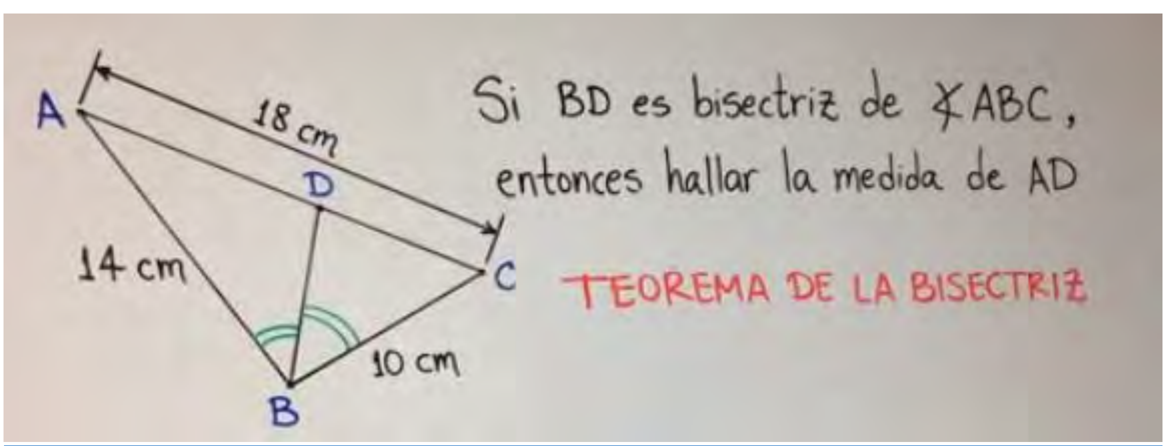


Suma de ángulos internos en el ΔABC :

$69° + 84° + x = 180° \therefore x = 180° - 153° = 27°$

$x = 27°$

Ejemplo 5.-

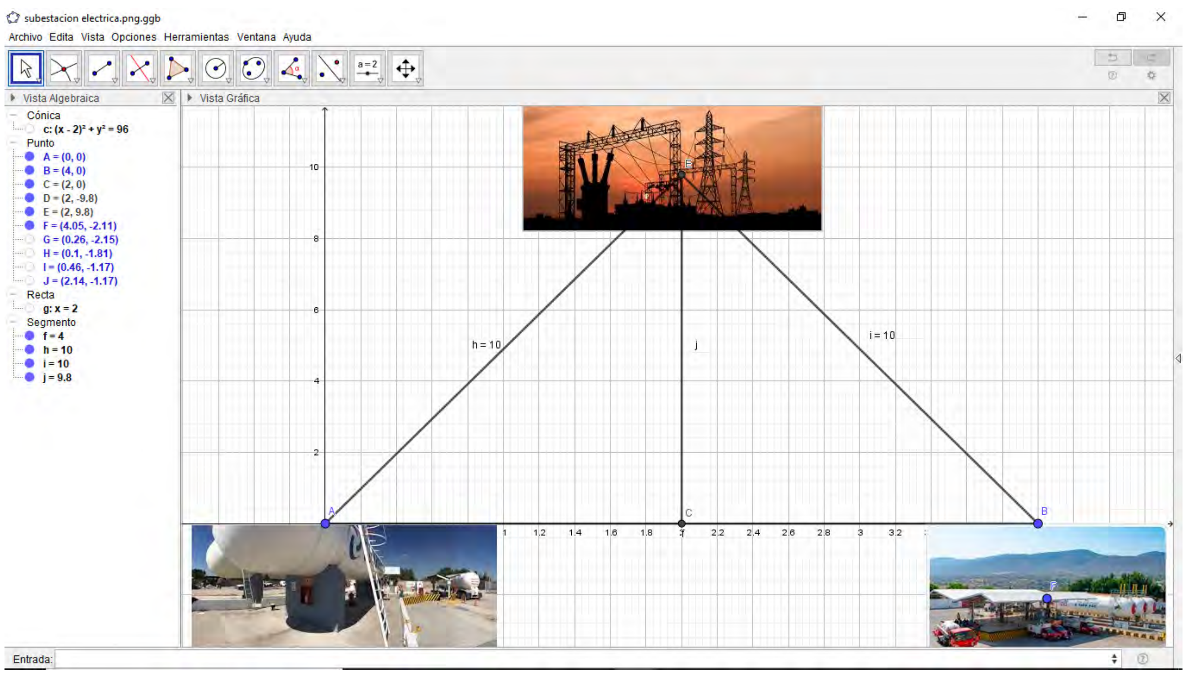


[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\teo de la bisectriz1.ggb](Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\teo de la bisectriz1.ggb)
[Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Teo de la bisectriz.ggb](Carpeta alumnos de MAGA I y II 2013-2014 Jaime R. S (mejorandolo)\Teo de la bisectriz.ggb)

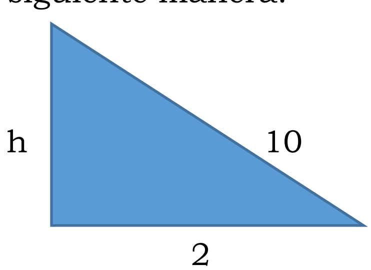
Mediatriz de un segmento.

Ejemplo 1.-

La distancia entre un almacén de distribución de gas butano y otro de gas ciudad es de cuatro kilómetros. Se desea construir una subestación transformadora de electricidad que diste de ambas instalaciones diez kilómetros.



Construir un segmento de recta entre las dos distribuidoras de gas, trazar a este segmento de recta su mediatriz, sobre esta calcular la altura de la siguiente manera:



$$\textit{Por el Teorema de Pitágoras}:$$

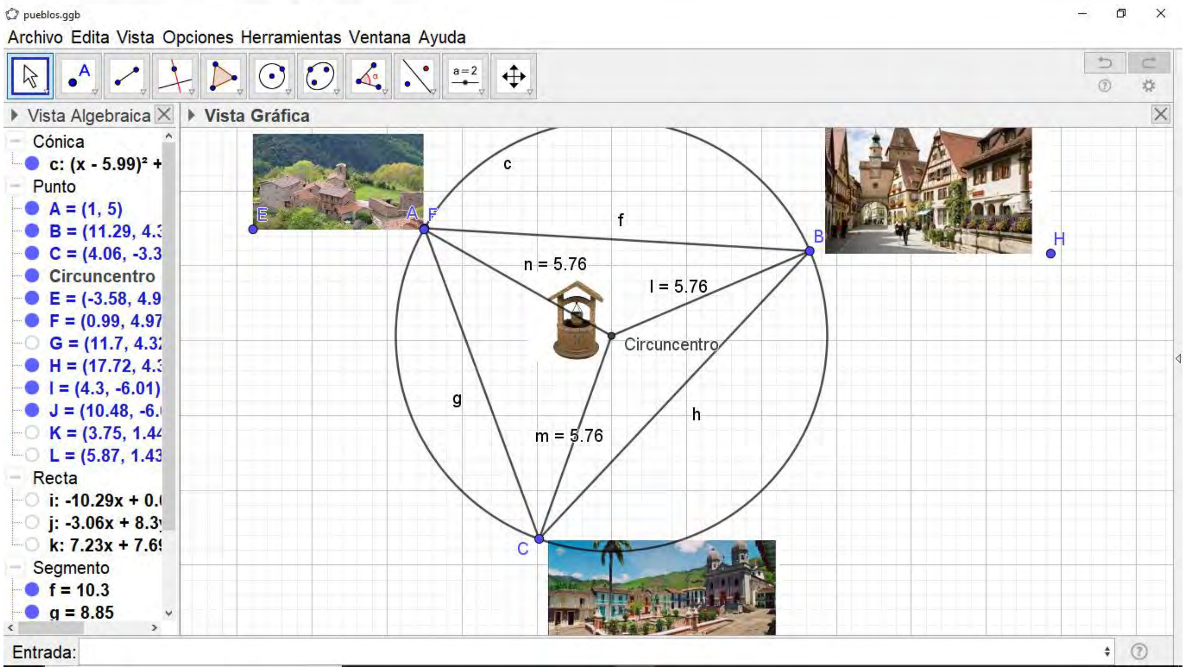
$$h^2 + 2^2 = 10^2 \rightarrow h^2 = 100 - 4 = 96$$

$$h = \sqrt{96}$$

La subestación se debe de construir a la mitad de la distancia entre las estaciones de gas y de manera perpendicular a la altura h, (2, √96)

Ejemplo 2.-

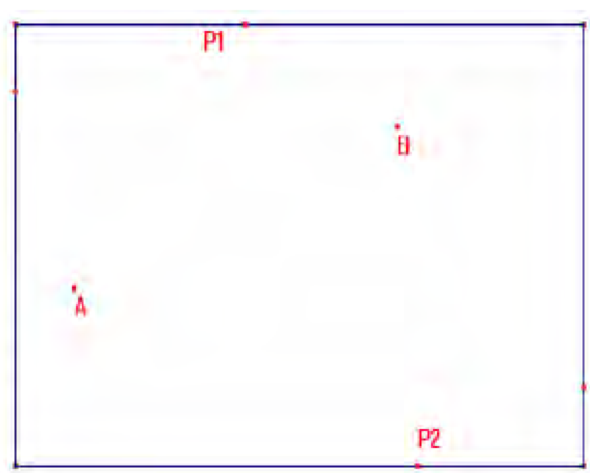
Tres pueblos compiten por instalar en sus proximidades un gran depósito de agua que suministre a los tres, agua potable. Si los tres pueblos no están alineados, encuentra un lugar del plano que equidiste de los tres pueblos

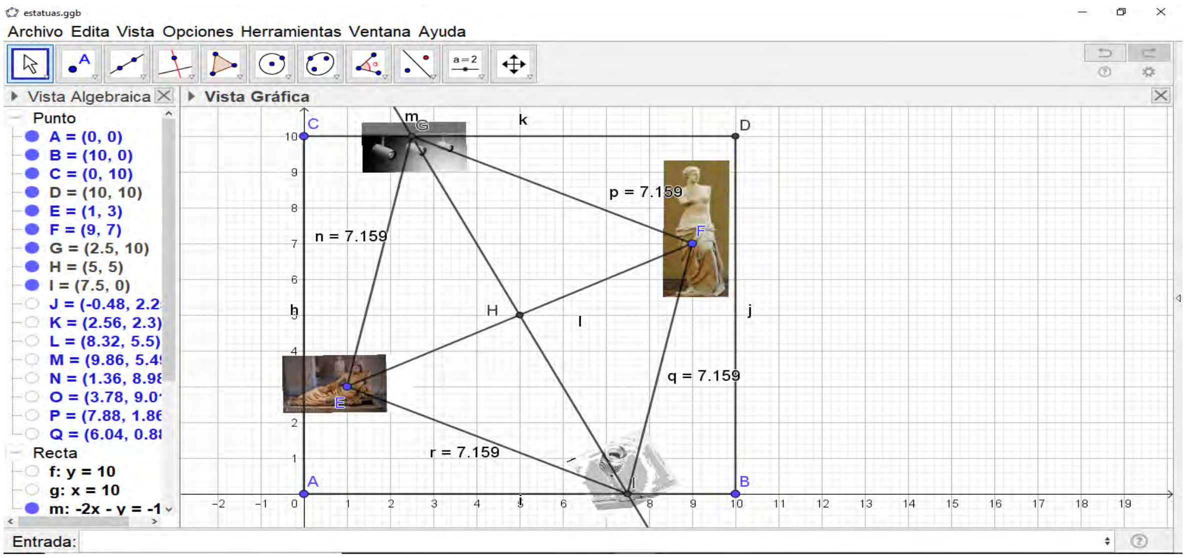


Construir 3 segmentos de recta, cada uno formado por las distancias entre cada par de pueblos, trazar sus respectivas mediatrices, las intersecciones de estas determinan el punto en donde debe de colocarse el gran depósito de agua.

Ejemplo 3.-

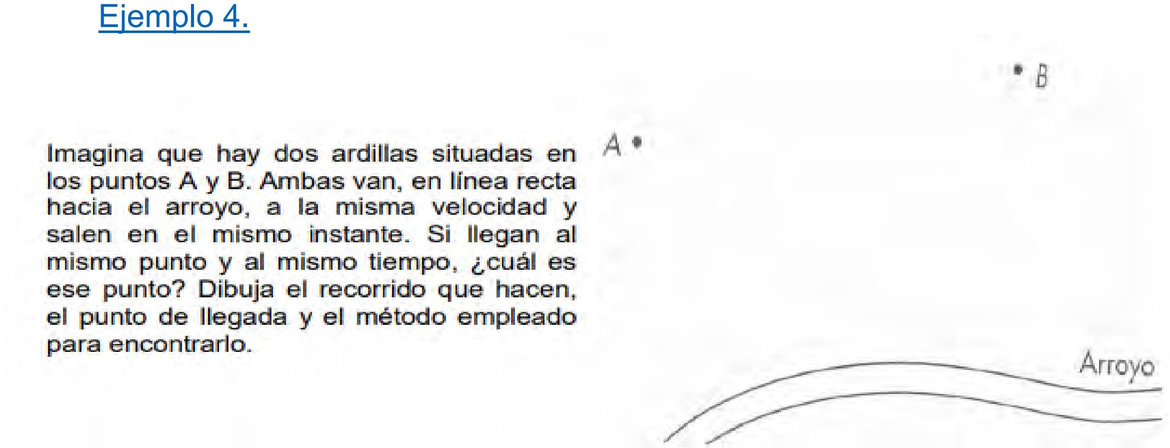
En el rectángulo de la figura representa una sala de un museo. En los puntos A y B se encuentran dos esculturas que debemos iluminar con focos de luz que hemos de situar en las paredes P1 ó P2. Señalarlos puntos de dichas paredes cuyas distancias a las esculturas sean iguales e indicar el procedimiento utilizado para averiguarlo.

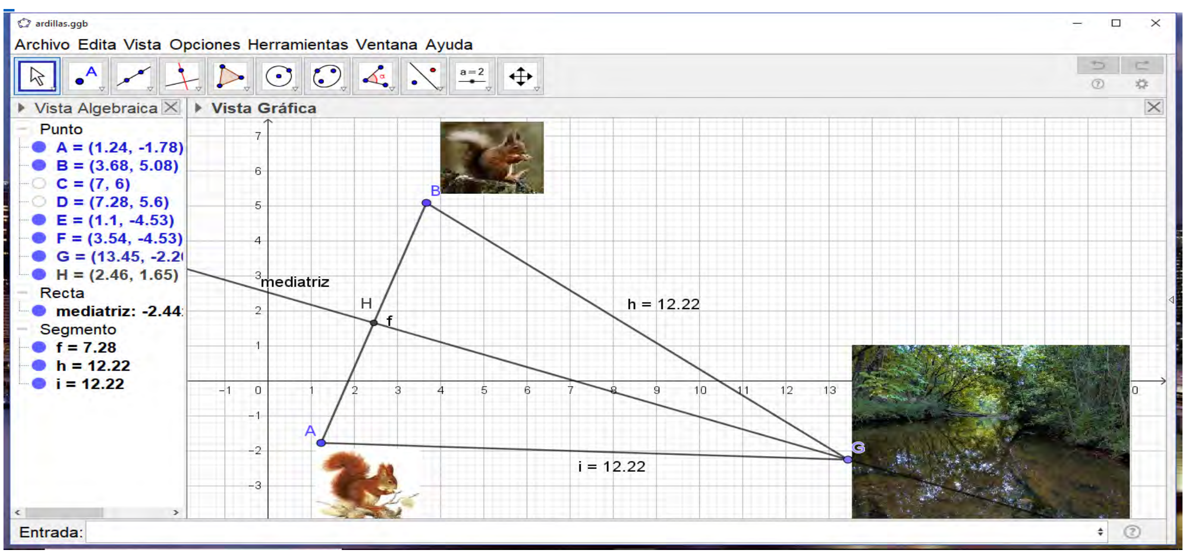




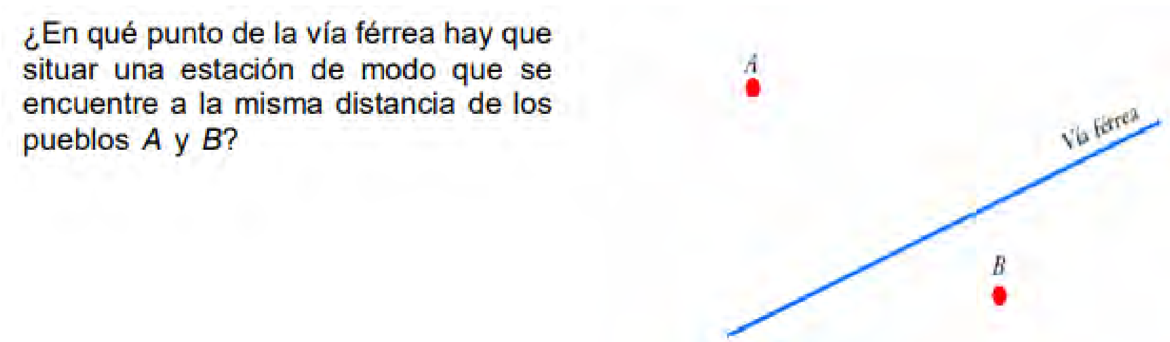
Construir un segmento de recta entre las dos estatuas, a este trazarle su mediatriz, los puntos de intersección de la mediatriz con las paredes determinan en donde deben de colocarse los focos.

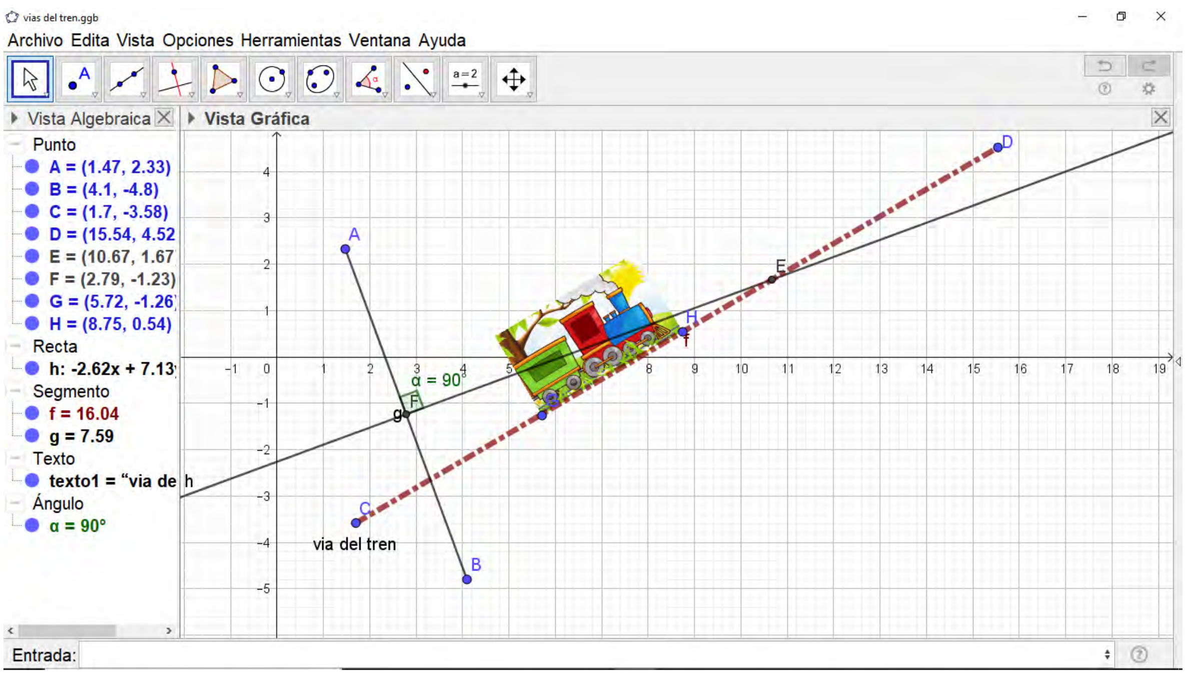
[Ejemplo 4.]()


Imagina que hay dos ardillas situadas en los puntos A y B. Ambas van, en línea recta hacia el arroyo, a la misma velocidad y salen en el mismo instante. Si llegan al mismo punto y al mismo tiempo, ¿cuál es ese punto? Dibuja el recorrido que hacen, el punto de llegada y el método empleado para encontrarlo.



Trazar un segmento de recta que una la posición de cada una de las ardillas, luego trazar su mediatriz encontrar el punto sobre la mediatriz que ubique el lugar de reunión de estas ardillas y trazar los segmentos correspondientes.
[Ejemplo 5.]





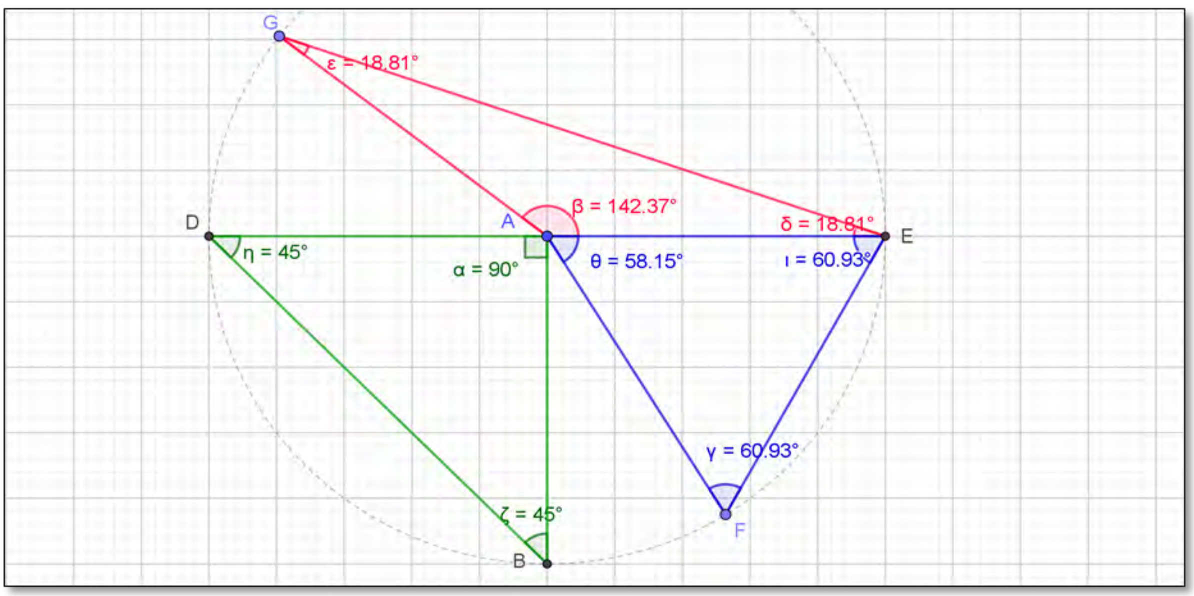
Unir los puntos A y B con un segmento de recta, trazarle su mediatriz localizar el punto de intersección de la vía del tren y la mediatriz ese es el punto en donde se debe de construir la estación.

Teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

Problemas:

Ejemplo 1.

De entre los siguientes tipos de triangulo (Obtusángulo, Acutángulo o Rectángulo) habrá alguno de este tipo que sea al mismo tiempo isósceles, justifique su respuesta.
Si, muchos, por ejemplo: observe los ángulos marcados, por ejemplo, él Δ es obtusángulo y además es un Δ isósceles, él Δ es rectángulo y además es isósceles y finalmente él Δ es acutángulo y además es isósceles.



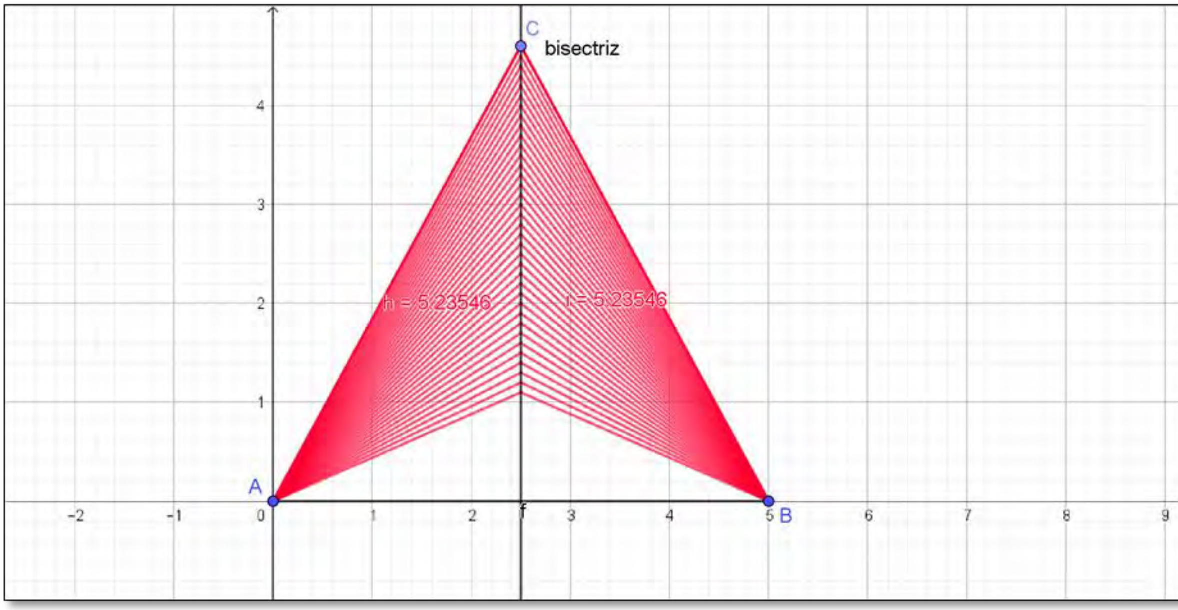
triangulos isosceles tipo obtusangulo, etc..ggb
Y también se puede decir que hay muchos triángulos que son_Obtusángulos, Acutángulos o Rectángulos que no sean al mismo tiempo isósceles.

Ejemplo 2.

Dado un segmento de recta, trazarle su mediatriz, tomando un punto móvil sobre la mediatriz, trazarle segmentos de recta desde este punto hacia los extremos del segmento de recta ¿Qué tipos de triángulos puede trazar?

Se puede trazar un solo triángulo equilátero y (n-1) triángulos isósceles.

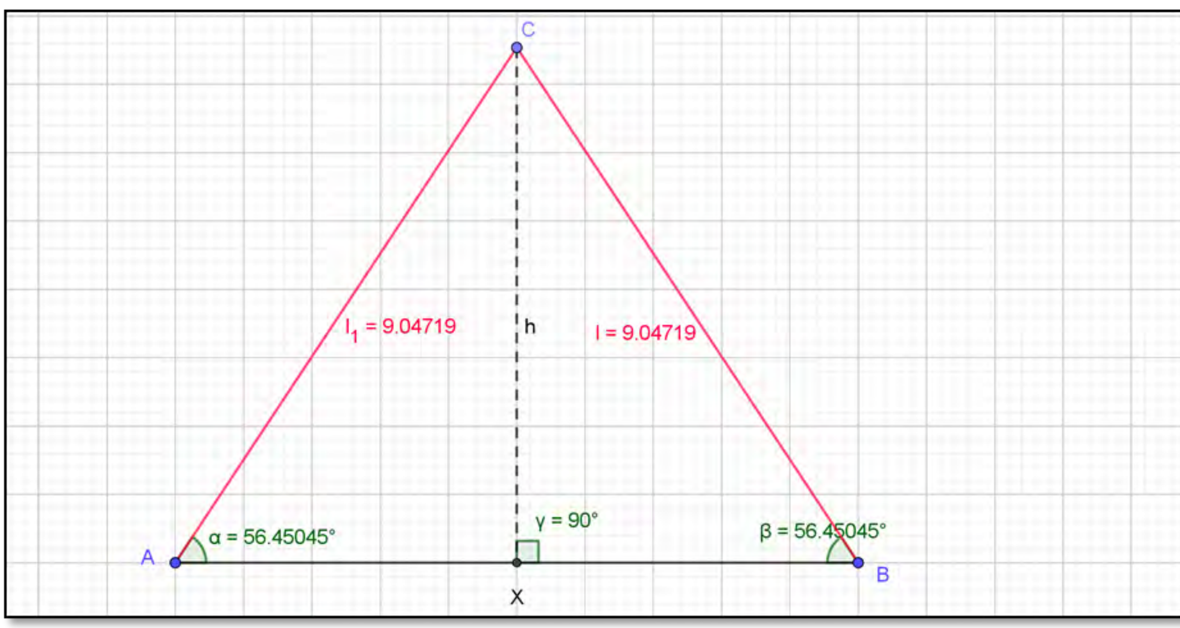
De aquí se puede decir ***"que todo triángulo equilátero es isósceles, pero no todo triangulo isósceles es equilátero".***



[mediatriz con tri isosceles y un tri equi.ggb]

Ejemplo 3.

Dado un triángulo isósceles, como el de la siguiente figura, encuentre un modelo para hallar su área en función de la base ***x*** y el valor de uno de sus lados iguales *l*:



Del ΔABC se puede observar que se puede dividir en 2Δs, siendo cada uno de ellos un Δ rectángulo, en donde cada una de sus áreas es igual a:

$$A=\frac{b*h}{2}\therefore b=\frac{x}{2}\Rightarrow A=\frac{\frac{x}{2}*h}{2}=\frac{x*h}{4}\ pero\ h\ es;aplicando\ el\ Teorema\ de\ Pitágoras$$

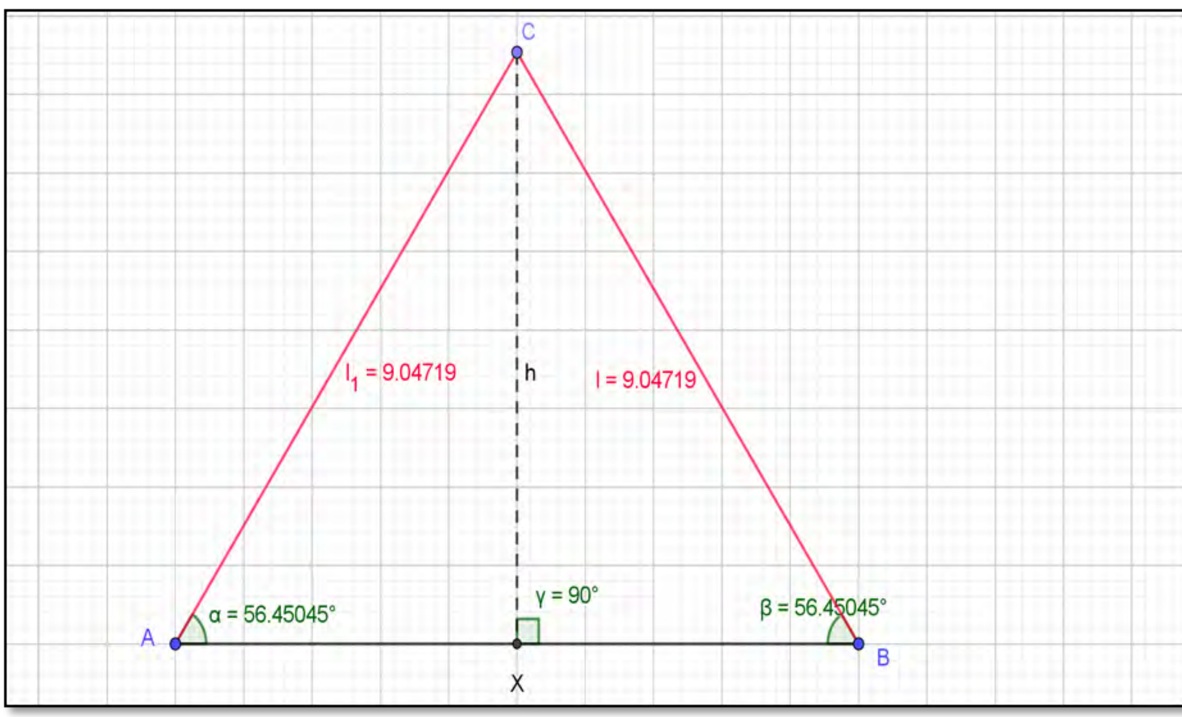
$$h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=l^2\ \therefore h^2=l^2-\frac{x^2}{4},\therefore h=\sqrt{l^2-\frac{x^2}{4}},\ sustituyendo\ esto\ en\ la\ ecuación$$

$$del\ área, nos\ queda: A=\frac{x*\sqrt{l^2-\frac{x^2}{4}}}{2}=\frac{\frac{x}{2}*\sqrt{4l^2-x^2}}{2}=\frac{x*\sqrt{4l^2-x^2}}{4}$$

$$\boxed{A=\frac{x*\sqrt{4l^2-x^2}}{4}}$$

Ejemplo 4.

Dado un triángulo isósceles, como el de la siguiente figura, encuentre un modelo para hallar su área en función del valor de uno de sus lados iguales l y uno de sus ángulos iguales.



Usando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en uno de los triángulos rectángulos se puede observar que:

$$sen(\beta)=\frac{h}{l}\therefore h=l*sen(\beta)\therefore l=\frac{h}{sen(\beta)}$$

$$\cos(\beta)=\frac{\frac{x}{2}}{l}\therefore x=2*l*\cos(\beta)$$

$$\tan(\beta)=\frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}=\frac{h}{\frac{x}{2}}=\frac{2h}{x};\ pero\ h\ se\ obtiene\ usando\ el\ Teorema\ de\ Pitágoras$$

$$h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=l^2\Rightarrow h^2=l^2-\frac{x^2}{4}\Rightarrow h=\sqrt{l^2-\frac{x^2}{4}}$$

$$A=\frac{b*h}{2}=\frac{\frac{x}{2}*\sqrt{l^2-\frac{x^2}{4}}}{2}=\frac{x*\sqrt{4l^2-x^2}}{8}=\frac{2*l*\cos(\beta)*\sqrt{4*l^2-(2*l*\cos(\beta))^2}}{8}=$$

$$A=\frac{2*l*\cos(\beta)*\sqrt{4*l^2-4l^2\cos^2(\beta)}}{8}=\frac{4*l^2*\cos(\beta)\sqrt{1-\cos^2(\beta)}}{8}\ pero\ sen^2(\beta)+\cos^2(\beta)=1$$

$$A=\frac{l^2*\cos(\beta)\sqrt{sen^2(\beta)}}{2}=\frac{l^2*sen(\beta)*\cos(\beta)}{2}\ pero\ son\ 2\ \Delta s\ iguales\ entonces:$$

$$A_{\Delta ABC}=l^2 sen(\beta)*\cos(\beta)$$

Problema propuesto 1.

Dado un triángulo isósceles, como el de la siguiente figura, encuentre un modelo para hallar su área en función del valor de uno de sus lados iguales l y de su altura (h).

$$A(l,h)=h*\sqrt{l^2-h^2}$$

Problema propuesto 2.

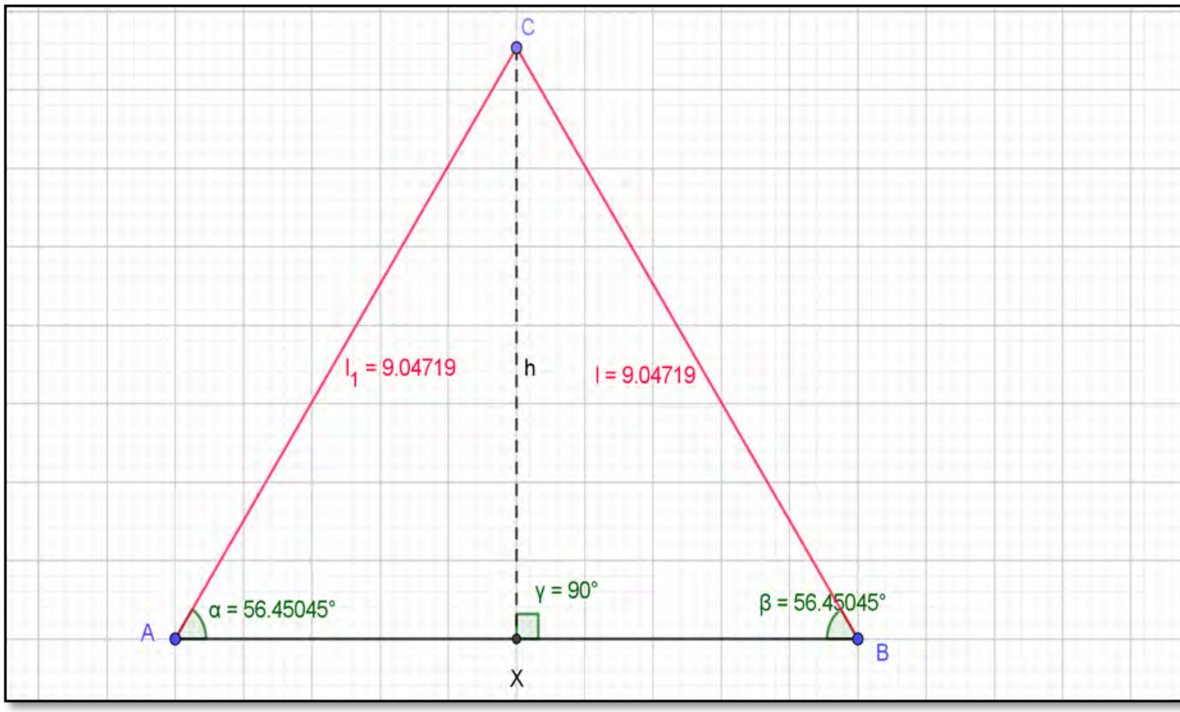
Dado un triángulo isósceles, como el de la siguiente figura, encuentre un modelo para hallar su área en función del valor de su base ***x*** y de su Perímetro (***P***).

$$A(x,P)=\frac{x}{4}*\sqrt{P^2-2xP}$$

Problema propuesto 3.

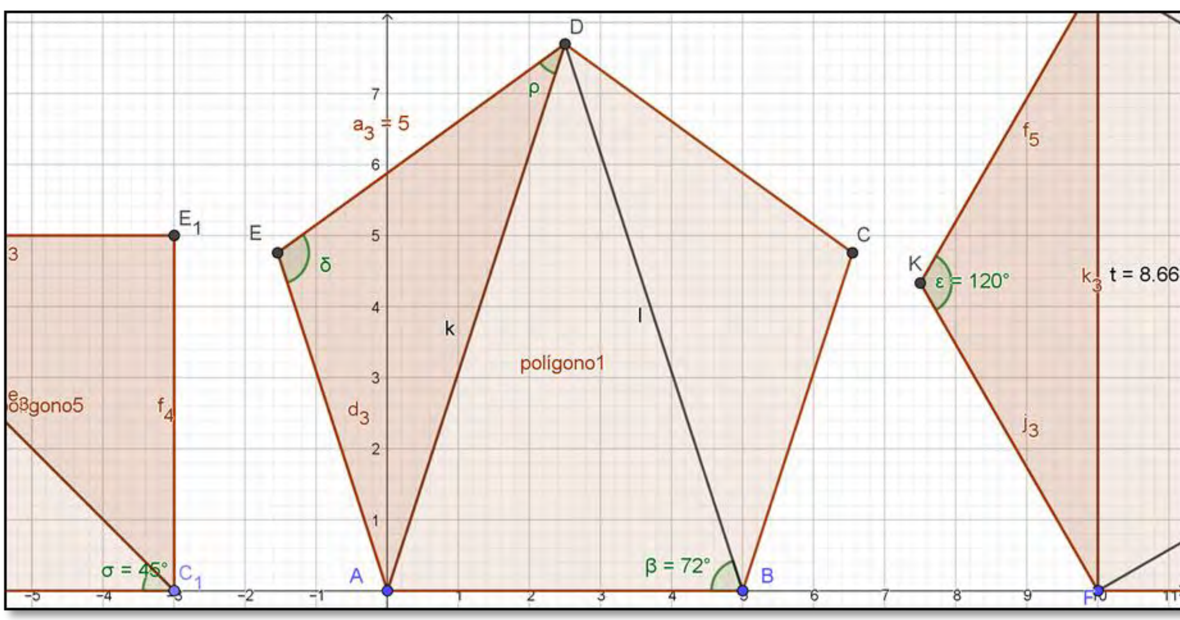
Dado un triángulo isósceles, como el de la siguiente figura, encuentre un modelo para hallar su área de base conocida.
Use las razones trigonométricas.

$$A(x, \beta \, o \, \alpha) = \frac{x^2 \tan(\beta)}{2}$$



[Problema propuesto 4.]

Hallar el área del pentágono, dados los datos en la siguiente figura:
Use los modelos para los triángulos isósceles expuestos anteriormente.



[Problema propuesto 5.]

Hallar el área del hexágono, dados los datos en la siguiente figura:
Use los modelos para los triángulos isósceles expuestos anteriormente y si hay algún triángulo equilátero puedes usar alguna de los siguientes modelos matemáticos:
Área de un Δ equilátero en función del valor de alguno de sus lados:

$$A(l) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Fórmula de Herón

En geometría, **la fórmula de Herón** plantea que la superficie de un triángulo de lados ***a*, *b*, *c*** viene dada por:

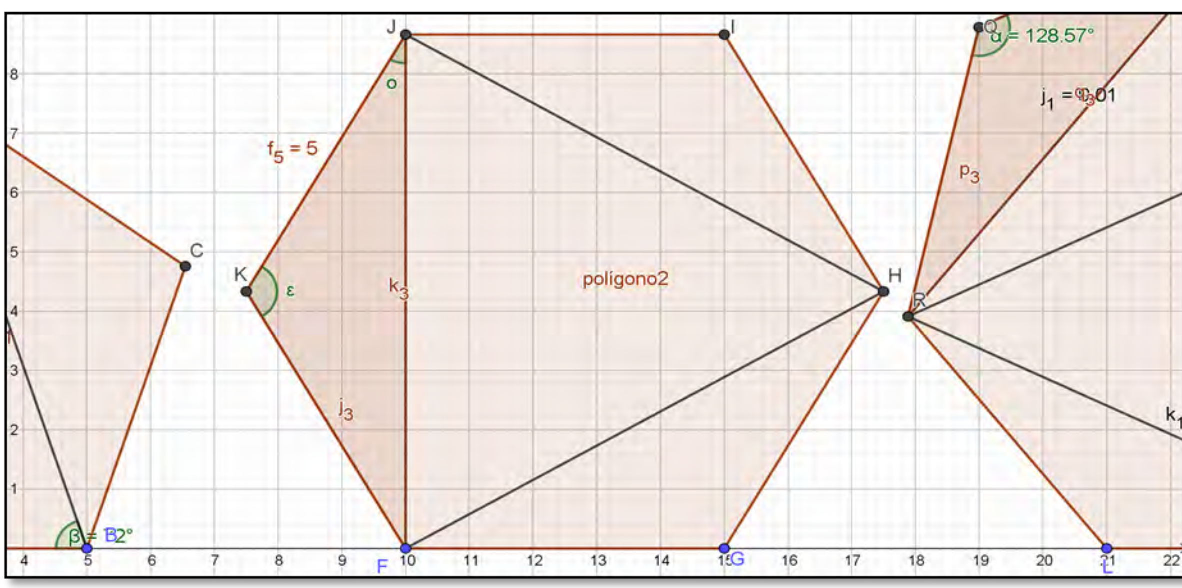
$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Donde p es el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

La fórmula puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}.$$



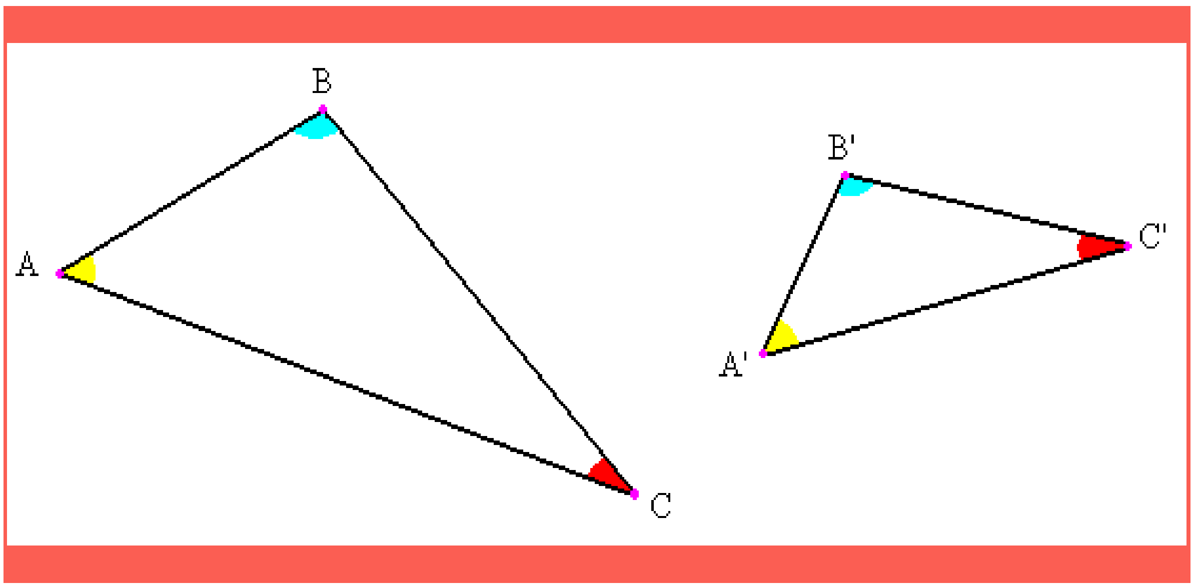
area triangulos isosceles en poligonos regulares.ggb

Semejanza y teorema de Pitágoras.

Notación:

SEMEJANZA:

Es la variación en tamaño entre dos objetos o cuerpos, pero sus formas son idénticas. Se dice que dos figuras geométricas son **semejantes** si tienen la misma forma, pero sus tamaños son diferentes. Por ejemplo, dos mapas a escalas distintas son semejantes, pues la forma del o los contenidos no cambia, pero si el tamaño.

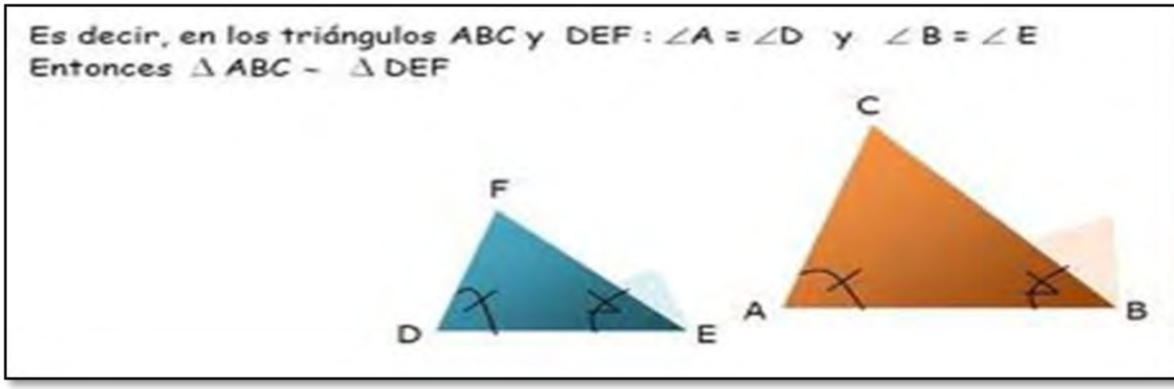


CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS:

1. Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos iguales.

2. Dos triángulos son semejantes, si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

3. Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.



Símbolos en geometría

Los símbolos nos ayudan a ahorrar tiempo y espacio cuando escribimos. Aquí tienes los símbolos geométricos más comunes:

Símbolo	Significado	Ejemplo	En palabras
Δ	Triángulo	ΔABC tiene 3 lados iguales	*El triángulo ABC tiene tres lados iguales*
$\angle$	Ángulo	$\angle$ABC mide 45°	*El ángulo formado por ABC mide 45 grados.*
$\perp$	Perpendicular	AB$\perp$CD	*La línea AB es perpendicular a la línea CD*
$\parallel$	Paralela	EF$\parallel$GH	*La línea EF es paralela a la línea GH*
$^{\circ}$	Grados	360° es un círculo completo	
∟	Ángulo recto (90°)	∟ mide 90°	*Un ángulo recto mide 90 grados*
$\overline{AB}$	Segmento de línea "AB"	AB	*La línea entre A y B*
$\overleftrightarrow{AB}$	Línea "AB"	$\overleftrightarrow{AB}$	*La línea infinita que pasa por A y B*
$\overrightarrow{AB}$	Rayo "AB"	$\overrightarrow{AB}$	*La línea que empieza en A, pasa por B y continúa*
$\cong$	Congruente (mismo tamaño y forma)	ΔABC $\cong$ ΔDEF	*El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF*
$\sim$	Similar (misma forma, distinto tamaño)	ΔDEF$\sim\Delta$MNO	*El triángulo DEF es similar al triángulo MNO*
$\therefore$	Por tanto	*a=b* $\therefore$ *b=a*	*a es igual que b, por tanto b es igual que a*

Nombrar ángulos

En los ángulos la letra del medio dice dónde está el ángulo. Por ejemplo cuando veas "∠ABC mide 45°", el punto "B" es donde está el ángulo.

Ejemplo breve

Así que si alguien escribe: **En △ABC, ∠BAC es ∟**

Ya sabes que quiere decir: **"En el triángulo ABC, el ángulo BAC es un ángulo recto"**

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/simbolos.html

Semejanza (matemáticas) Una **semejanza** (o similitud) es una aplicación entre dos espacios métricos que modifica las distancias entre dos puntos cualesquiera multiplicándolas por un factor fijo. En el caso de los espacios euclídeos, por ejemplo, es la composición de una isometría y una homotecia.

Figuras semejantes

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño.

Matemáticamente, eso quiere decir que sus lados son proporcionales entre sí. De hecho, cuando vemos copias (ampliaciones o reducciones) que no reproducen exactamente al original, decimos que "están desproporcionadas".

Cuando dos figuras son semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante que se denomina razón de proporcionalidad.

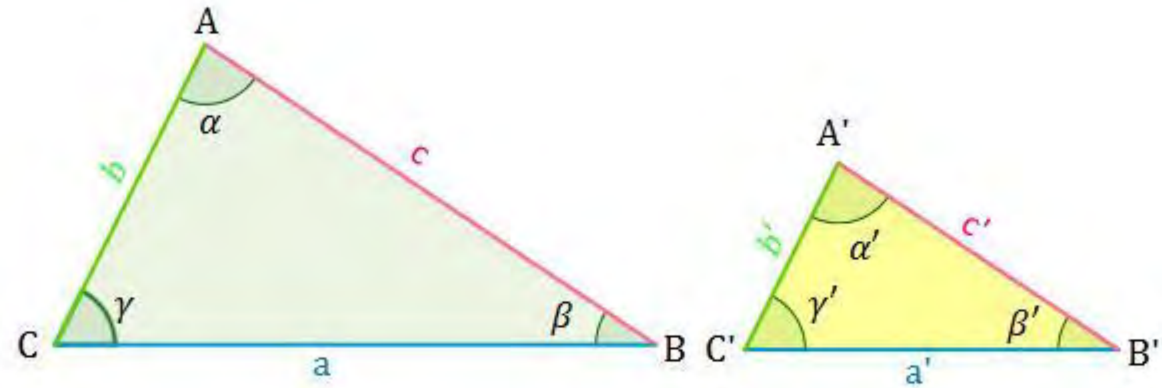
Semejanza de triángulos.

La **semejanza de triángulos** es una característica que hace que dos o más triángulos sean semejantes.

Dos triángulos son **semejantes** cuando tienen sus ángulos iguales (o congruentes) y sus lados correspondientes (u homólogos) son proporcionales.

Son lados homólogos los opuestos a ángulos iguales.

Aquí tenemos un caso, donde se ven los elementos homólogos (ángulos y lados) con la igualdad o congruencia de sus ángulos y la proporcionalidad de los lados:



En los triángulos semejantes se cumplen las condiciones siguientes:

- Los ángulos homólogos son iguales:

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$

- Los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

A *r* se le denomina **razón de semejanza**.

- Se cumple que la razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es también la **razón de semejanza** y que la razón de sus áreas es el **cuadrado de la razón de semejanza**:

$$\frac{\text{perímetro}}{\text{perímetro}'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = r$$

$$\frac{\text{área}}{\text{área}'} = r^2$$

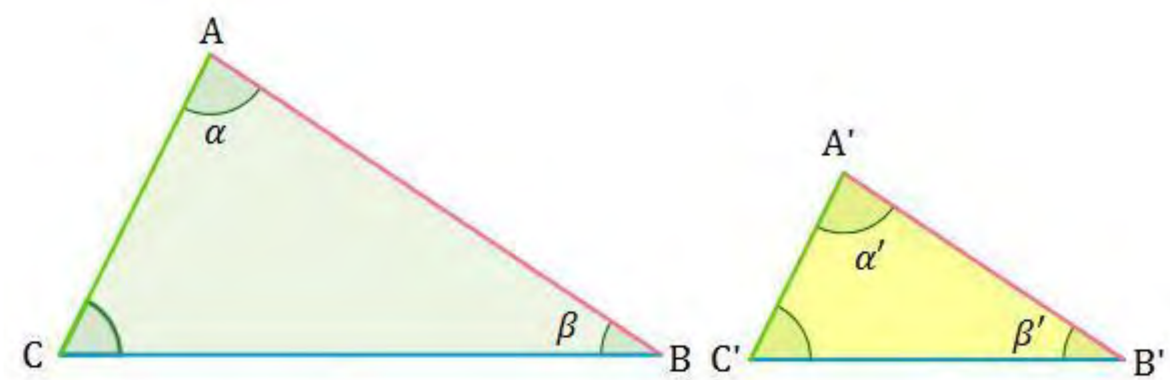
Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer sus tres ángulos y sus tres lados. Existen tres criterios para asegurarlo.

Criterios de semejanza de triángulos:

a) LLL
b) LAL
c) AAA

Caso AAA

Que tengan dos ángulos iguales. (El tercero lo será, porque los tres tienen que sumar 180°).

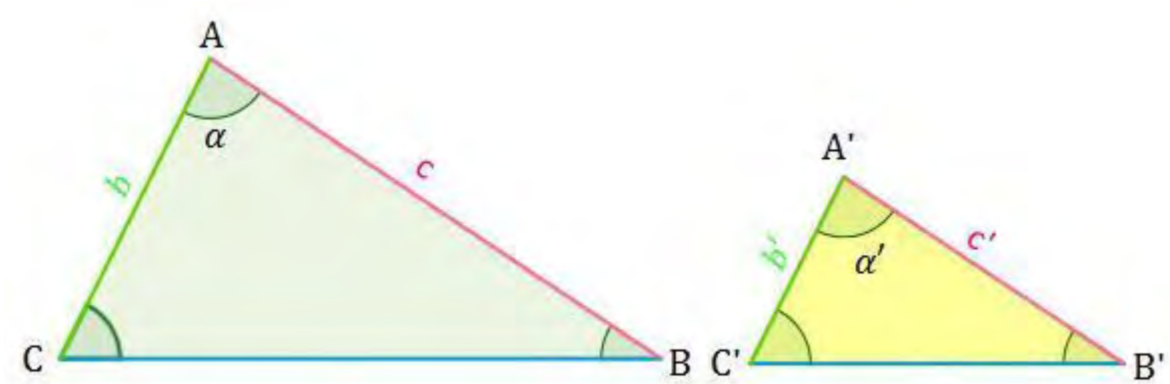


Si α = α’ y β = β’, entonces los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes.

ΔABC ∼ ΔA´B´C´

Caso LAL

Que tengan dos **lados proporcionales** y el **ángulo comprendido entre ellos sea igual**.



Entonces:

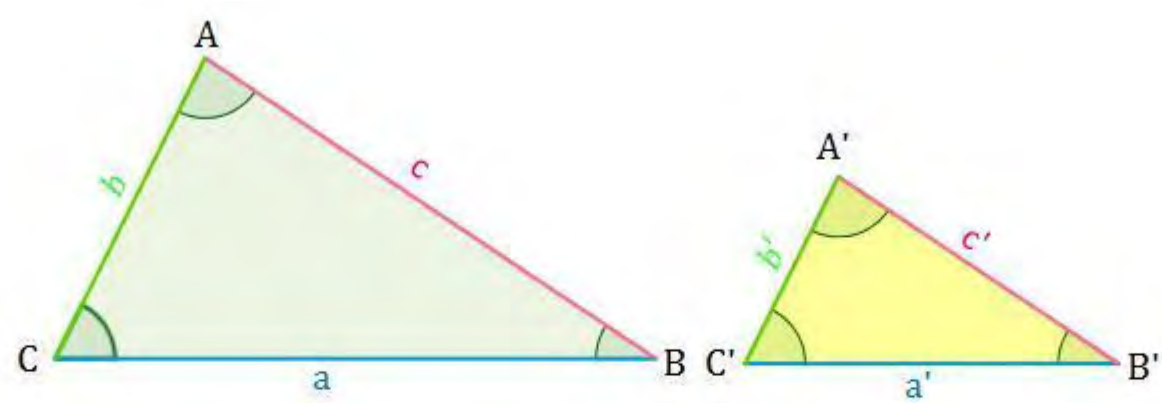
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad y \quad \alpha = \alpha'$$

Y, además, α = α', entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

ΔABC ~ ΔA´B´C´

Caso LLL

Que tengan sus **tres lados correspondientes proporcionales**.



Entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

Tenemos también que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

ΔABC ~ ΔA´B´C´

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/semejanza-triangulos/

Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

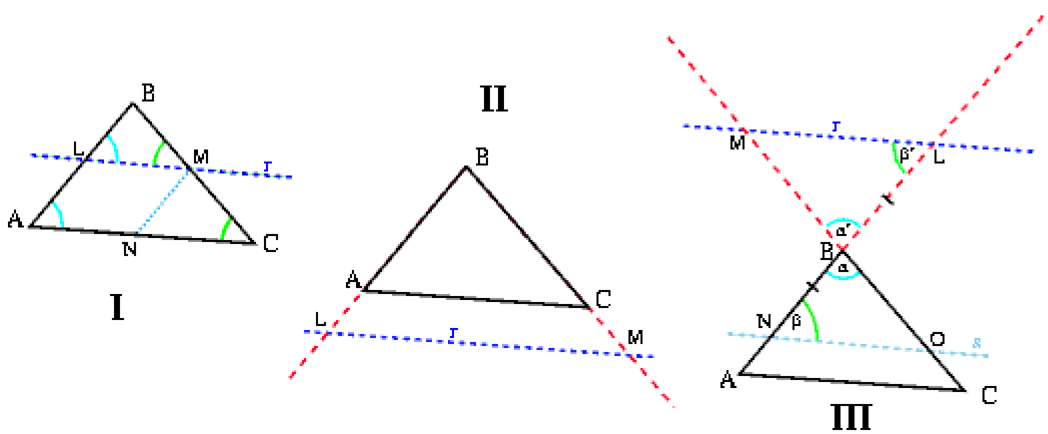
Toda paralela a un lado de un triángulo que no pase por el vértice opuesto, determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados, un triángulo semejante al dado.

H)

ΔABC; r || AC
r corta AB en L
r corta BC en M

T) $(BLM \sim BAC)$

D)



Podrán presentarse 3 casos:

I - r corta a los lados AB y BC por puntos interiores a ellos.

Haremos una primera consideración, referida a los ángulos, y la llamaremos **(1)**:

$B = \wedge B$ por carácter reflejo
$\wedge BLM = \wedge A$ por ser correspondientes entre r || BC, secante AB
$\wedge BML = \wedge C$ por ser correspondientes entre r || BC, secante AC

Por otra parte, en virtud del corolario del Teorema de Tales se tiene:

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} \qquad \otimes$$

Si por M se traza una paralela al lado AB, esta interseca al lado AC en un punto N, y nuevamente por el corolario del Teorema de Tales tenemos:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AC} \qquad \oplus$$

Pero dado que AN = LM, por ser lados opuestos del paralelogramo ALMN, reemplazando en $\oplus$ se obtiene:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC} \qquad \odot$$

De $\otimes$ y $\odot$ se obtiene la consideración que llamaremos **(2)**:

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC}$$

Luego de **(1)** y **(2)**, resulta:

$BLM \sim BAC$ por definición de semejanza.

II - r corta a las rectas de los lados AB y BC por puntos exteriores a ellos, sobre las semirrectas de origen B que los contienen.

Consideramos BLM como si fuera el triángulo dado, y BAC el triángulo nuevo, y por el caso **I** de la demostración, es:

$(BAC \sim BLM) \Rightarrow (BLM \sim BAC)$ por carácter simétrico.

III - r corta a las rectas de los lados AB y BC en puntos que pertenecen a las semirrectas opuestas a las que sirven de sostén a dichos lados.

Sobre la semirrecta de origen B que contiene al punto A, se construye BN=BL y por el extremo N del segmento construido, una paralela a AC (s) que corta la recta de BC por O.

Quedan entonces $BNO \sim BAC$ por el caso **I**, semejanza que llamaremos $\otimes$.

Teniendo en cuenta los triángulos BNO y BLM, se observa:

BN=BM por construcción
$\alpha=\alpha'$ por ser opuestos por el vértice.
$\beta=\beta'$ por ser alternos internos entre r || s, secante MN

Y siendo BNO=BLM es BNO ~ BLM ⊕ por el primer corolario de la definición.

De ⊗ y ⊕, y por carácter transitivo:

BAC ~ BLM ⇒ BLM ~ BAC

https://es.wikipedia.org/wiki/Semejanza_(geometr%C3%ADa)

Problemas de aplicación.

Ejemplo 1.

Hallar x y y

Datos:

$\overline{AC} = 32$

$\overline{AB} = 20$

$\overline{BC} = 26$

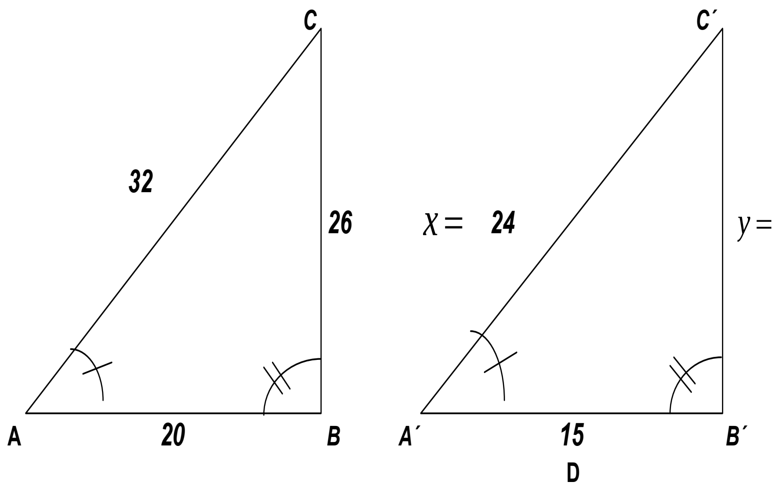
$\overline{A'B'} = 15$

$$\frac{x}{32} = \frac{15}{20}$$

$x = 24$

$$\frac{y}{26} = \frac{15}{20}$$

$y = 19.5$



Ejemplo 2.

Hallar x

Datos:

$\overline{AC} = 18$

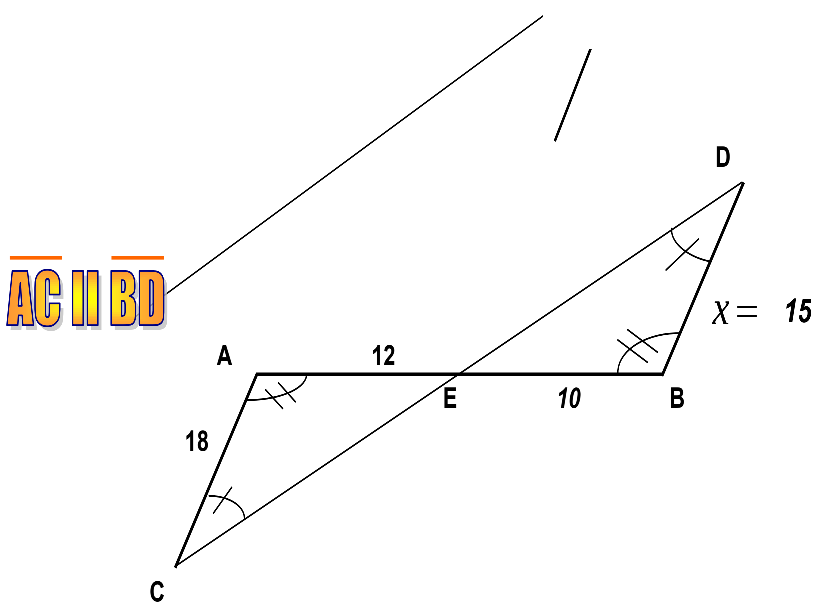
$\overline{AE} = 12$

$\overline{EB} = 10$

$x = \overline{BD} =$

$$\frac{x}{18} = \frac{10}{12}$$

$x = 15$



Ejemplo 3.

Hallar x

Datos:

$\overline{FJ} = 6$

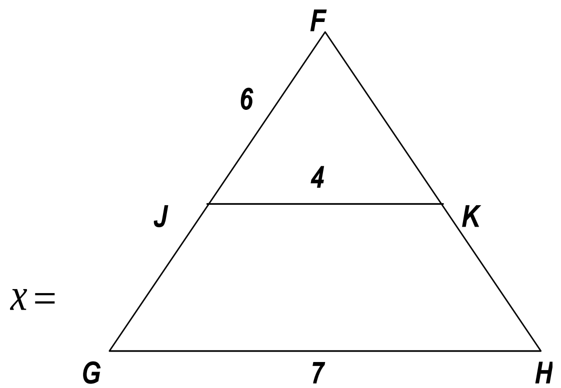
$\overline{JK} = 4$

$\overline{GH} = 7$

$x = \overline{JG} =$

$$\frac{x + 6}{6} = \frac{7}{4}$$

$x = 4.5$



Ejemplo 4.

Hallar x

Datos:

$\overline{AG} = 3$

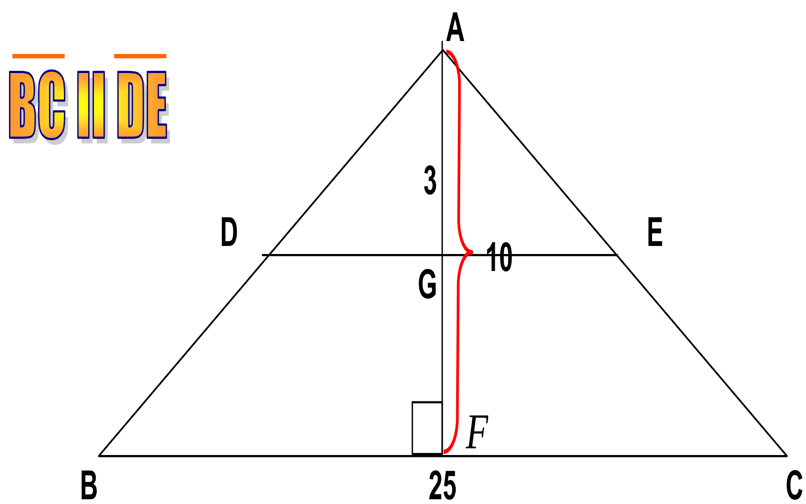
$\overline{BC} = 25$

$\overline{AF} = 10$

$\overline{DE} = x =$

$$\frac{x}{25} = \frac{3}{10}$$

$x = 7.5$



- Teorema de Thales y su recíproco.

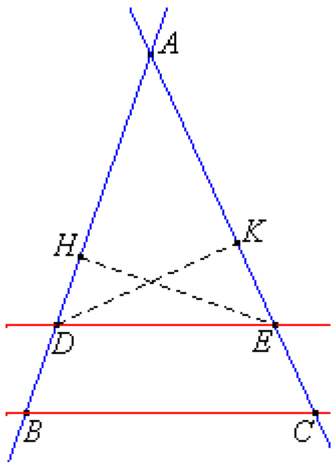
Teorema de Thales

Estos son dos resultados que se conocen como teorema de Thales (Thales de Mileto, 624-547 a.C.):

1. Cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales
2. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Cuando dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan en éstas segmentos proporcionales

En la figura siguiente las paralelas BC y DE cortan a las secantes AB y AC. Además, se han trazado las alturas DK y EH del triángulo ADE. Representamos con (XYZ) el área del triángulo XYZ.



(BDE) = (CED) pues ambos triángulos tienen la misma base DE y la misma altura (distancia entre paralelas).

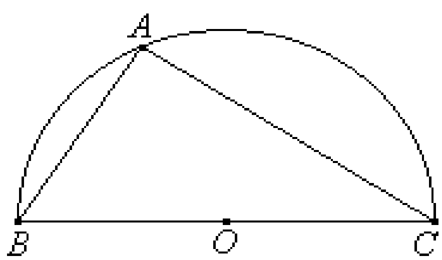
(ADE) = (1/2) AD HE = (1/2) AE DK

(BDE) = (1/2) BD HE; (CED) = (1/2) CE DK

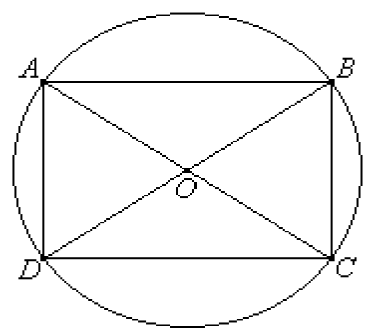
(ADE): (BDE) = (ADE): (CED)

AD : BD = AE : CE

El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



El teorema de Thales dice que el ángulo A es recto, pues está inscrito en una semicircunferencia.

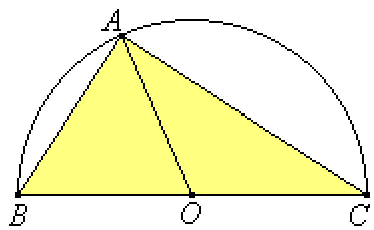


Thales pudiera haber usado esta figura para demostrar el teorema.

Sir Thomas L. Heath, en su libro *Greek Mathematics* aventura que Thales podía haber demostrado el teorema razonando de la siguiente manera sobre la figura del rectángulo *ABCD*:

Como en los triángulos *ADC*, *BCD*, los lados *AD*, *DC* son iguales a *BC*, *CD* respectivamente, y los ángulos comprendidos (ambos rectos) son iguales, los triángulos son iguales en todos los aspectos. Por tanto, el ángulo *ACD* (o sea, OCD) es igual al ángulo *BDC* (o sea, *ODC*). De aquí se deduce, por el recíproco de la proposición 5 del Libro I de los *Elementos* de Euclides, conocido por Thales, que *OC* = *OD*. De forma similar se podría demostrar que *OD*=*OA*. Por tanto, *OA*, *OD*, *OC* (y *OB*) son todos iguales, y una circunferencia con centro O y centro OA pasaría por B, C y D. Ahora, *AOC*, por ser una línea recta, es un diámetro de la circunferencia y *ADC* es una semicircunferencia. El ángulo *ADC* es un ángulo inscrito en una circunferencia y es recto por hipótesis.

A continuación, se muestra la demostración que aparece en la Proposición 32 del Libro III de los *Elementos* de Euclides:

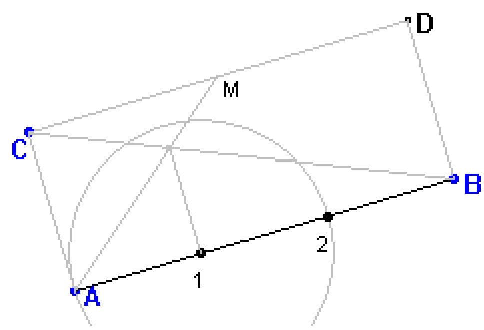


Como *OA* y *OB* son iguales, los ángulos *ABO* y *BOA* también son iguales y como *OA* y *OC* son iguales, los ángulos *OAC* y *OCA* son iguales. Por tanto, *BAC* es la suma de *ABC* y *ACB*. Teniendo en cuenta que la suma de los tres ángulos de un triángulo *BAC* debe ser recto.

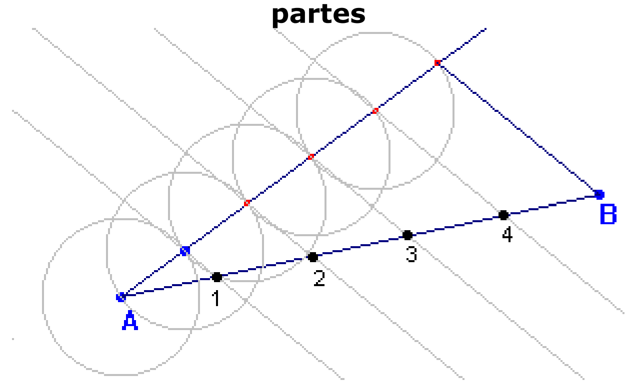
- División de un segmento en *n* partes iguales.

6.- DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

División en 3 partes iguales



División en un número cualquiera de partes



1.- División de un segmento en 3 partes iguales.

Este caso particular es muy sencillo de resolver. Sea AB el segmento que se desea dividir. Se traza el rectángulo ABCD. Se traza la diagonal BC. Sea M el punto medio de CD. Se traza M. sea E el punto de corte con la diagonal. La perpendicular a AB por E determina 1(la primera división). Basta con hacer una circunferencia de centro 1 y radio 1A para obtener 2.

2.- División de un segmento en un número cualquiera de partes.

La construcción se basa en el Teorema de Thales.

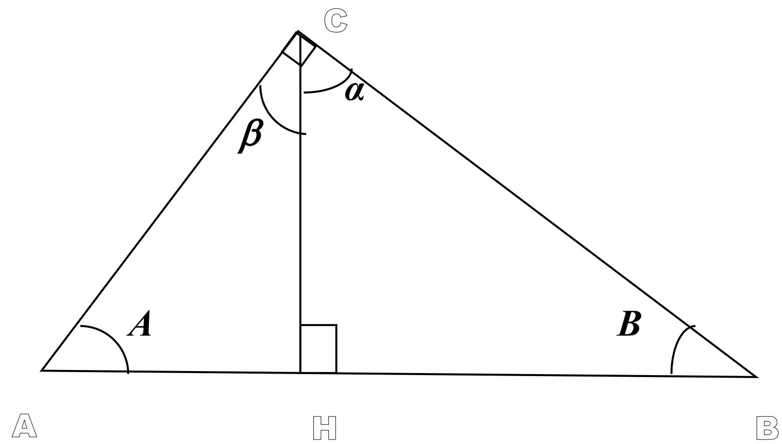
En este ejemplo se ha dividido en 5 partes, el método es idéntico para cualquier número (n)

Dado el segmento AB, se traza una semirrecta cualquiera con origen en A.

Sobre la semirrecta se construyen 5 (n) segmentos iguales. (basta con hacer un segmento con origen en A) y hacer circunferencias iguales.

Desde el extremo del 5º (n-esimo) segmento G, se traza el segmento GB. Basta con hacer rectas paralelas a GB por los puntos intermedios C;D;E;F. Los cortes de estas rectas con AB determinan la división del segmento.

Teorema de Pitágoras
(Semejanza)



En el Δ**ABC** (triángulo rectángulo):

AB es la hipotenusa
AC es un cateto
CB es un cateto

HC es la altura del ΔABC trazada desde su hipotenusa **AB**.

En el Δ**ABC** (triángulo rectángulo):

$$\angle \boldsymbol{A} + \angle \boldsymbol{B} + \angle \boldsymbol{C} = 180^\circ$$
$$\angle \boldsymbol{C} = 90^\circ$$
$$\angle \boldsymbol{C} = \angle \boldsymbol{\alpha} + \angle \boldsymbol{\beta} = 90^\circ \ldots (\mathbf{i})$$

En el Δ**AHC** (triángulo rectángulo):

$$\angle \boldsymbol{A} + \angle \boldsymbol{\beta} + \angle 90^\circ = 180^\circ$$
$$\angle \boldsymbol{A} + \angle \boldsymbol{\beta} = \angle 90^\circ \ldots (\mathbf{ii})$$

En el Δ**HBC** (triángulo rectángulo):

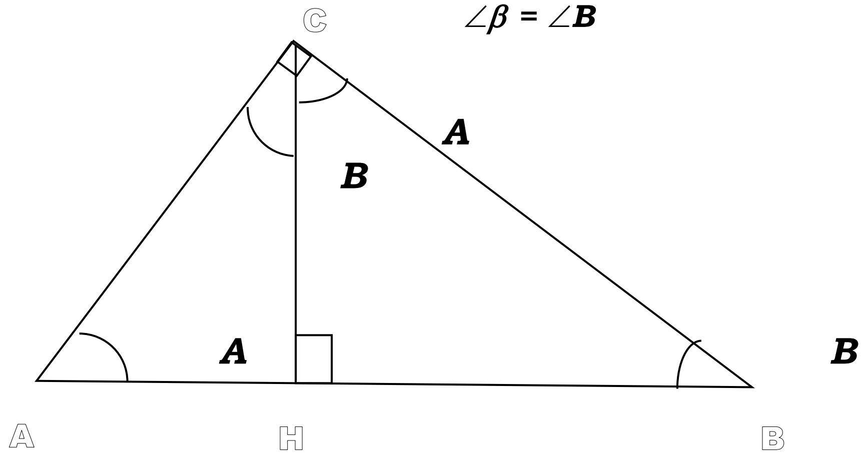
$$\angle \boldsymbol{\alpha} + \angle \boldsymbol{B} + \angle 90^\circ = 180^\circ$$
$$\angle \boldsymbol{\alpha} + \angle \boldsymbol{B} = 90^\circ \ldots (\mathbf{iii})$$

Entonces: haciendo simultaneas las ecuaciones (**i**) y (**ii**)

$$\angle \boldsymbol{\alpha} + \angle \boldsymbol{\beta} = 90^\circ \ldots (\mathbf{i})$$
$$\angle \boldsymbol{A} + \angle \boldsymbol{\beta} = 90^\circ \ldots (\mathbf{ii})$$
$$\angle \boldsymbol{\alpha} + \angle \boldsymbol{\beta} = \angle \boldsymbol{A} + \angle \boldsymbol{\beta}$$
$$\angle \boldsymbol{\alpha} = \angle \boldsymbol{A}$$

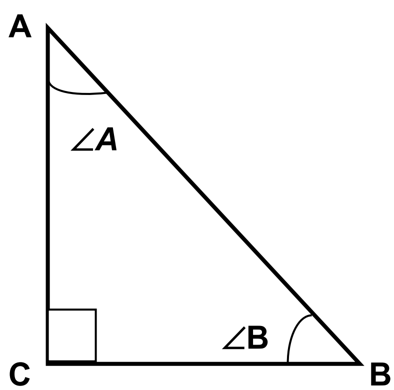
Ahora: haciendo simultaneas las ecuaciones (**i**) y (**iii**)

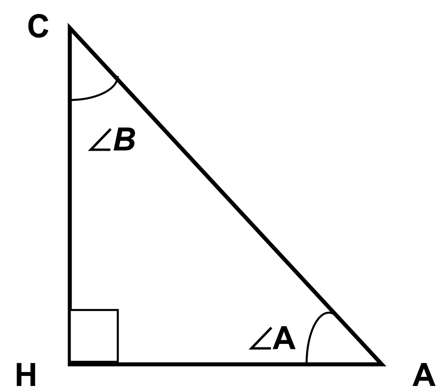
$$\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ \ldots (\mathbf{i})$$
$$\angle\alpha + \angle B = 90^\circ \ldots (\mathbf{iii})$$
$$\angle\alpha + \angle\beta = \angle\alpha + \angle B$$
$$\angle\beta = \angle B$$



Entonces: el Δ**ABC** ≈ Δ**AHC** ≈ Δ**HBC**

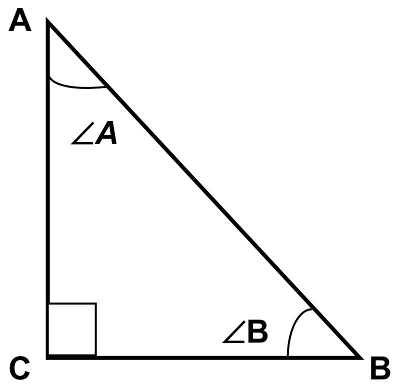
Segmentos Homólogos en el Δ**ABC** y el Δ**AHC**

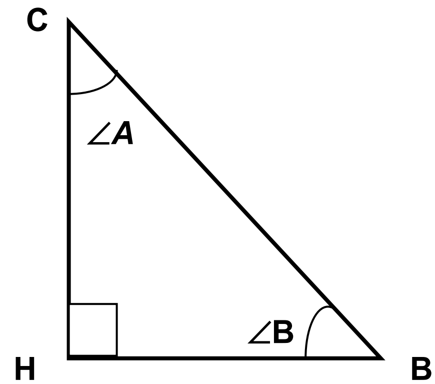




Homólogos	Δ**ABC**	Δ**AHC**	
Al ángulo de 90º	**AB**	**AC**	**AB** y **AC**
Al ángulo de $\angle A$	**CB**	**HC**	**CB** y **HC**
Al ángulo de $\angle B$	**AC**	**HA**	**AC** y **HA**

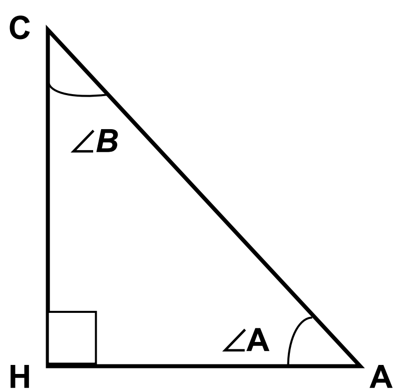
Segmentos Homólogos en el Δ**ABC** y el Δ**HBC**

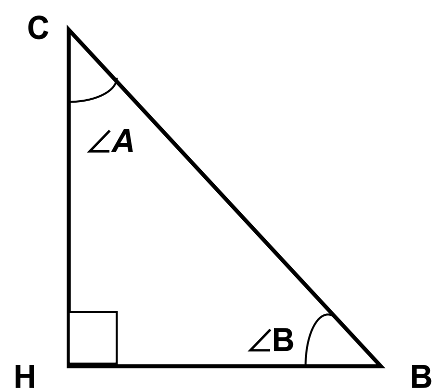




Homólogos	**ΔABC**	**ΔHBC**	
Al ángulo de 90º	**AB**	**CB**	**AB** y **CB**
Al ángulo de ∠***A***	**CB**	**HB**	**CB** y **HB**
Al ángulo de ∠***B***	**AC**	**HC**	**AC** y **HC**

Segmentos Homólogos en el Δ**HAC** y el Δ**HBC**





Homólogos	**ΔHAC**	**ΔHBC**	
Al ángulo de 90º	**AC**	**CB**	**AC** y **CB**
Al ángulo de ∠***A***	**HC**	**HB**	**HC** y **HB**
Al ángulo de ∠***B***	**HA**	**HC**	**HA** y **HC**

Segmentos Homólogos en el ∆**ABC** y el ∆**AHC**, se cumple que:

Homólogos	**∆ABC**	**∆AHC**	
Al ángulo de 90º	**AB**	**AC**	**AB** y **AC**
Al ángulo de ∠***A***	**CB**	**HC**	**CB** y **HC**
Al ángulo de ∠***B***	**AC**	**HA**	**AC** y **HA**

$$\frac{AB}{AC} \quad \frac{AC}{HA}$$

$$\overline{AC}^2 = AB * HA \ldots (1)$$

Segmentos Homólogos en el ∆**ABC** y el ∆**HBC**, se cumple que:

	∆ABC	**∆HBC**	**Homólogos**
Al ángulo de 90º	**AB**	**CB**	**AB** y **CB**
Al ángulo de ∠***A***	**CB**	**HB**	**CB** y **HB**
Al ángulo de ∠***B***	**AC**	**HC**	**AC** y **HC**

$$\frac{AB}{CB} \quad \frac{CB}{HB}$$

$$\overline{CB}^2 = AB * HB \ldots (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2)

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = AB * HB + AB * HA$$

Factorizando:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = AB * (HB + HA) \text{ pero } HB + HA = AB$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = AB * AB$$

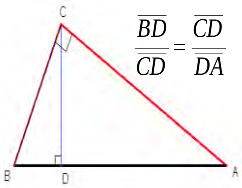
$$\boxed{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2}$$

Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

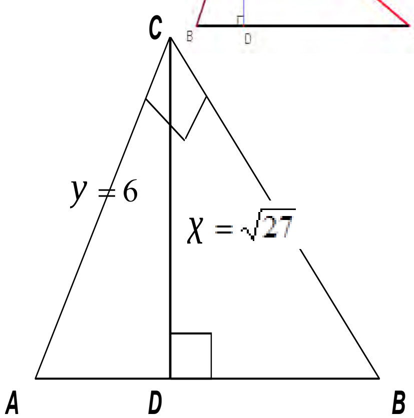
Ejemplo 1.

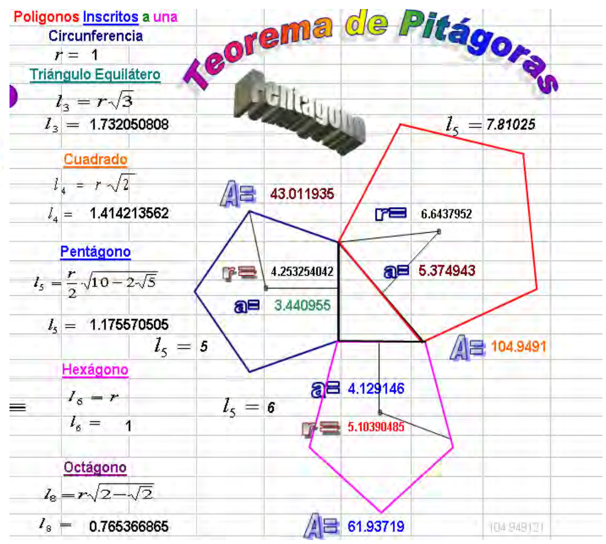
Hallar los valores de ***x*** y de ***y***, dados AD = 3 y BD = 9.

Datos:
$\overline{AD} = 3$
$\overline{BD} = 9$



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}$$



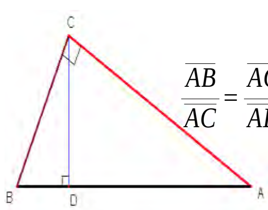


Hallar los valores de ***x*** y de ***y***, dados $\overline{DC}$ = 8 y $\overline{AD}$ = 4.

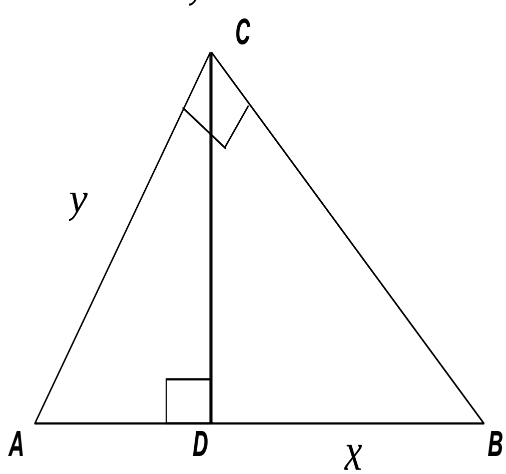
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

Datos:
$\overline{DC} = 8$

$\overline{AD} = 4$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$



$$\frac{x}{8} = \frac{8}{4} \qquad x = 16 \qquad \frac{20}{y} = \frac{y}{4} \qquad y = \sqrt{80}$$

Ejemplo 2.

Con un cable de 50 metros se quiere conseguir un polígono semejante a otro de 90 metros de perímetro. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 5 metros?

La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{P}{P'} = \frac{50}{90} = \frac{a}{5} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 50}{90} = \frac{250}{90} = 2{,}77\ \text{m}$$

[Ejemplo 3.]

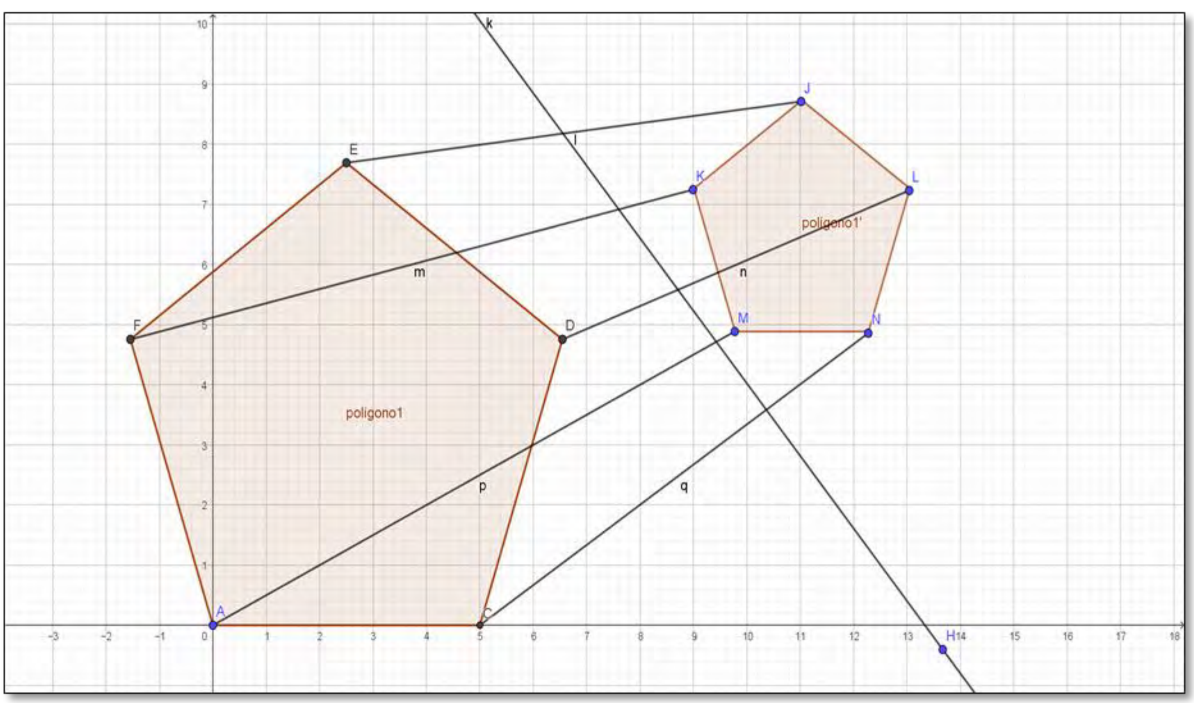
Las áreas de dos polígonos semejantes están en la razón 1:64. ¿Cuál es la razón de semejanza? Todo polígono se puede descomponer en triángulos P, Q, R…., para los cuales se cumple:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot a' \cdot h'} = \frac{a \cdot h}{\cdot a \cdot h'} = r^2 \Rightarrow \frac{P}{P'} = r^2; \frac{Q}{Q'} = r^2; \frac{R}{R'} = r^2$$

$$\Rightarrow P = r^2 \cdot P'; Q = r^2 \cdot Q'; R = r^2 \cdot R' \Rightarrow P + Q + R = r^2 \cdot (P' + Q' + R')$$

$$\Rightarrow S = r^2 \cdot S' \Rightarrow \frac{S}{S'} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{64} = r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{8}$$

http://www.edu.xunta.gal/centros/iessanchezcanton/aulavirtual2/file.php/351/EJERCICIOS/SEMEJANZA_Ejercicios_resueltos_II.pdf

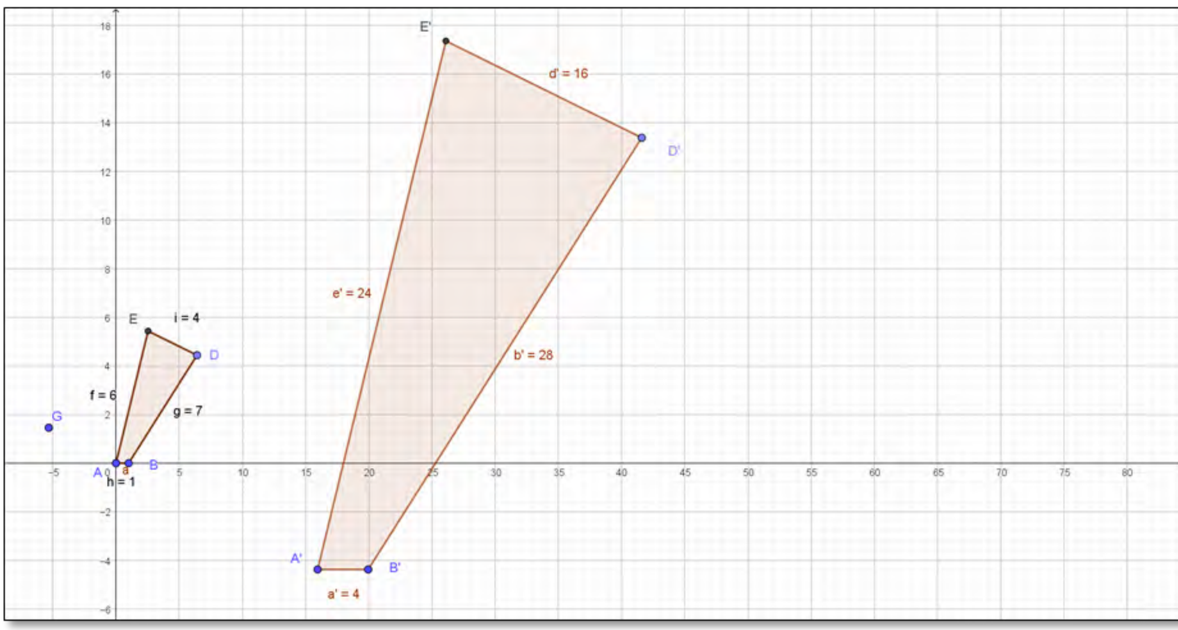


Ejemplo 4.

Los lados de un cuadrilátero son: a=1 cm, b=6 cm, c=7 cm y d=4 cm. Se sabe que el área de otro semejante es 16 veces mayor que el área del primero. Determina la medida de los lados del cuadrilátero semejante.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = 16 \Rightarrow r = \frac{a}{a'} = 4$$

$$\begin{aligned} a' &= 4 \cdot a = 4 \cdot 1 = 4\,\text{cm} \\ b' &= 4 \cdot b = 4 \cdot 6 = 24\,\text{cm} \\ c' &= 4 \cdot c = 4 \cdot 7 = 28\,\text{cm} \\ d' &= 4 \cdot d = 4 \cdot 4 = 16\,\text{cm} \end{aligned}$$



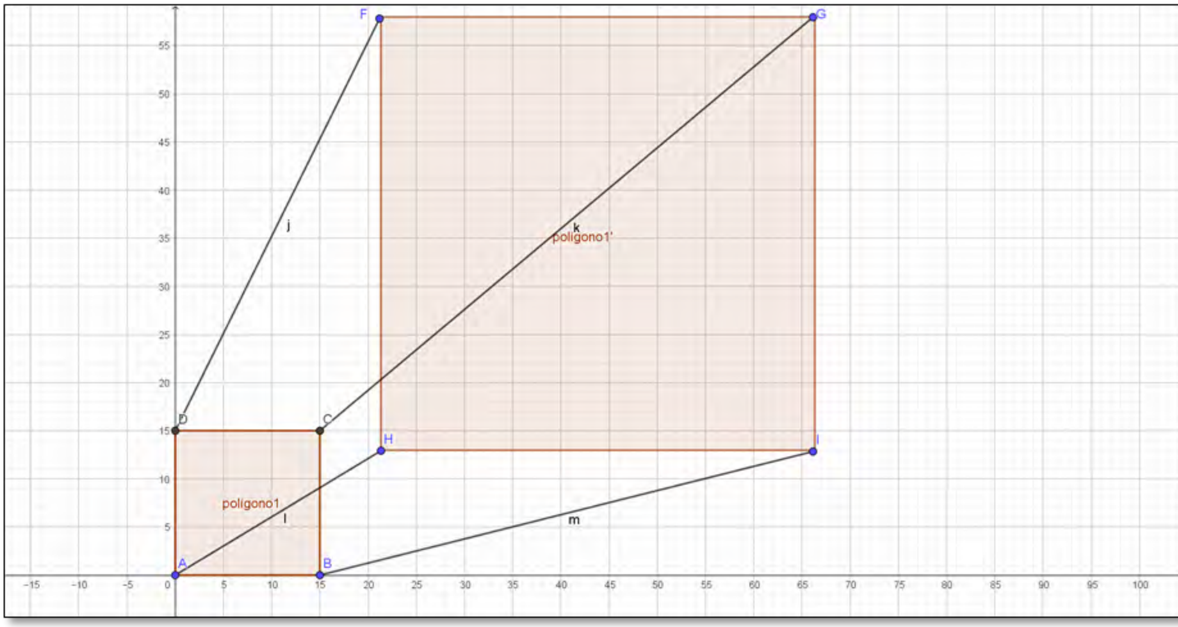
Ejemplo 5.

Se quiere dibujar un polígono de perímetro 60 cm, semejante a otro de perímetro 180 cm. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 15 metros?

La razón de los perímetros de dos polígonos es igual a la razón de semejanza.

En donde **a** es el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 15 metros

$$\frac{P}{P'} = \frac{60}{180} = \frac{a}{15} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot 60}{180} = \frac{900}{180} = 5\,\text{cm}$$



Ejemplo 6.

Dado un trapecio isósceles de 4 cm de altura y bases 8 y 6 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 1,5. Calcula la superficie del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del área del trapecio y utilizando la razón de semejanza entre áreas.

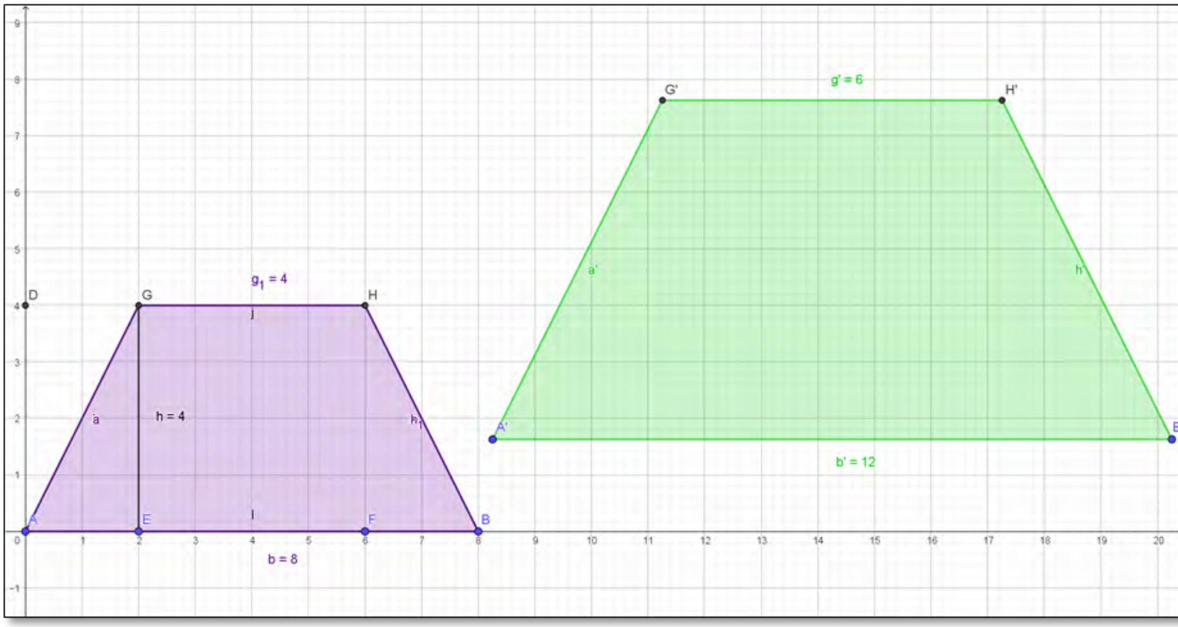
1. Las medidas del segundo trapecio son:

Altura = 4 · 1,5 = 6 cm.
Base mayor = 8 · 1,5 = 12 cm.
Base menor = 6 · 1,5 = 9 cm. Y su área es $A = \frac{(B+b)}{2}h = \frac{(12+9)}{2}6 = 63$

2. La razón de semejanza entre áreas es $r^2=(1.5)^2=2.25$

Y el área del primer trapecio es $A = \frac{(B+b)}{2}h = \frac{(8+6)}{2}4 = 28$, entonces

el área del segundo trapecio es $A = 28 * 2.25 = 63$



[Ejemplo 7.](#)

En el plano de una vivienda, a escala 1:350, las medidas del jardín son 36 mm y 29 mm. ¿Cuál es la superficie real de la terraza?

Las medidas del jardín son:

1:350

36 mm*350 = 12600 mm = 12.6 m

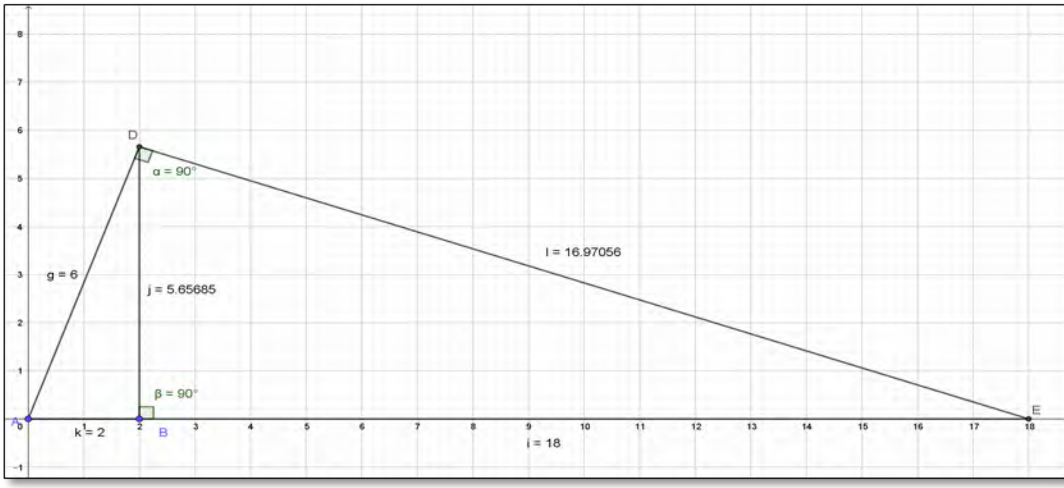
29 mm*350 = 10150 mm = 10.150 m

S = 12.6*10.150 = 127.89 m²

[Ejemplo 8.](#)

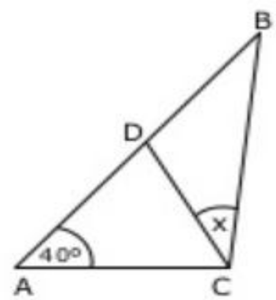
Un cateto de un triángulo rectángulo mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 2 cm. Determinar los otros dos lados y la altura sobre la hipotenusa.

Ver figura siguiente:

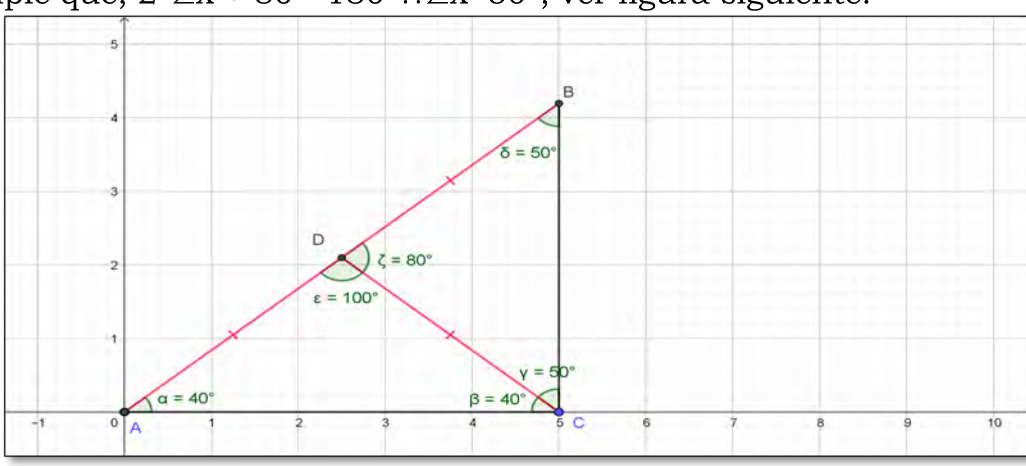


[Ejemplo 9.](#)

En el triángulo ABC de la figura $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{DB}$. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle x$?

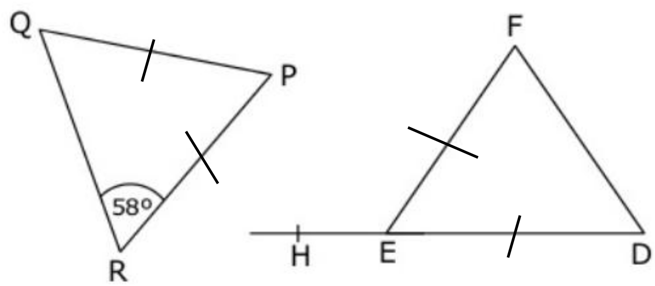


En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales, entonces como $\overline{AD} \cong \overline{CD} \rightarrow \angle A = \angle\beta = 40°$, también $\angle A + \angle\beta + \angle\varepsilon = 180° \therefore \angle\varepsilon = 100°$, pero $\angle\varepsilon + \angle\zeta = 180° \therefore \angle\zeta = 180° - 100° = 80°$, en el ΔCDB los lados $\overline{DB} \cong \overline{CD}$, entonces, "en un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales", se cumple que, $2 * \angle x + 80° = 180° \therefore \angle x = 50°$, ver figura siguiente.



[Ejemplo 10.]()

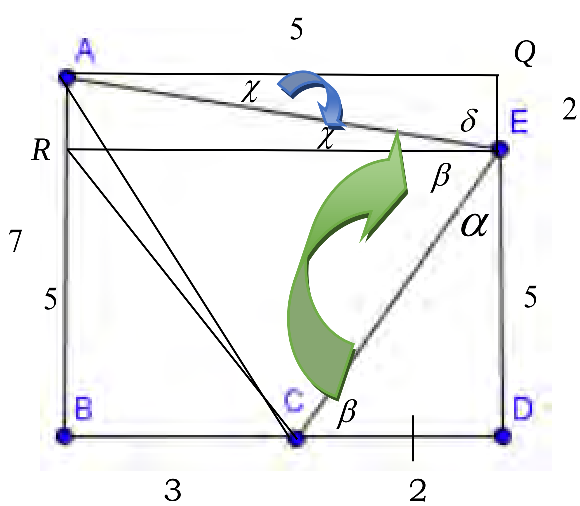
En la figura $\Delta QRP \cong \Delta DFE$. Si $\overline{QP} \cong \overline{PR}$, ¿cuánto mide el ángulo exterior HEF?



Sean $\overline{ED} \cong \overline{FD}$ $\therefore \angle EFD \cong \angle EDF = 58°$ $\therefore$ $\angle DEF = 180°-116° = 64°$ y por lo tanto el $\angle HEF = 180°-64° = 116°$

[Ejemplo 11.]()

En la figura $AE = EC$; $\overline{AE} \perp \overline{EC}$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\overline{ED} \perp \overline{DC}$. Si $BC = 3$ y $ED = 5$, Hallar AB.



De la figura anterior $\angle AEC = 90° = \chi + \beta$; $\alpha + \angle AEC + \delta = 180°$;
$\alpha + \delta = 180° - \angle AEC = 90°$; pero $\alpha+\beta = 90° \rightarrow \alpha+\beta = \alpha+\delta \rightarrow$ $\boldsymbol{\beta = \delta}$ y $\boldsymbol{\alpha = \chi}$
AB = 7

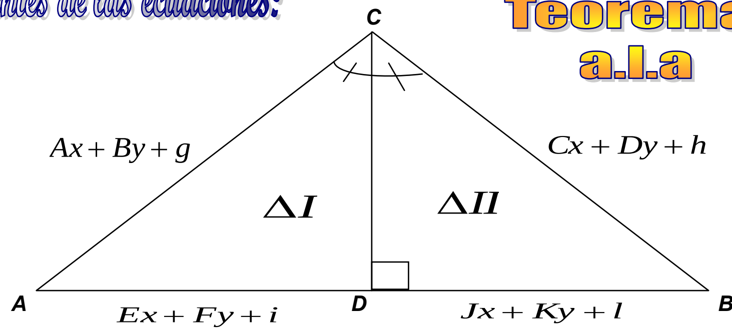
[Ejemplo 12.]()

Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

Teorema: a.l.a

A = *7*
B = *0*
g = *0*
C = *4*
D = *6*
h = *0*
E = *3*
F = *0*
i = *0*
J = *0*
K = *7*
l = *-4*



$\overline{AC}=$	7 x	+	0 y	+	0
$\overline{BC}=$	4 x	+	6 y	+	0
$\overline{AD}=$	3 x	+	0 y	+	0
$\overline{BD}=$	0 x	+	7 y	-	4

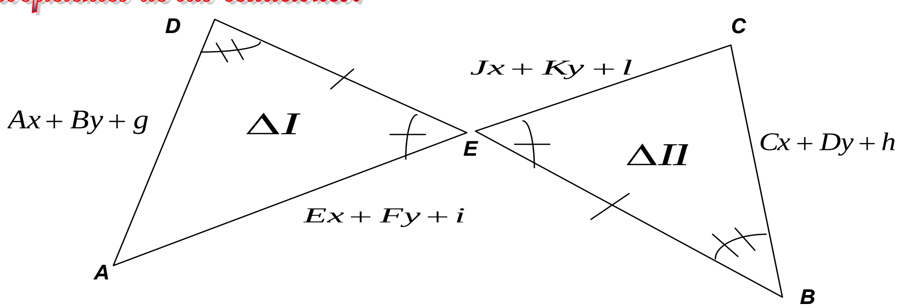
$x=$ **8** $\quad y=$ **4**

Ejemplo 13). -

Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = *0*
B = *6*
g = *5*
C = *0*
D = *0*
h = *56*
E = *4*
F = *0*
i = *-3*
J = *0*
K = *0*
l = *20*



$\overline{AD}=$	0 x	+	6 y	+	5
$\overline{BC}=$	0 x	+	0 y	+	56
$\overline{AE}=$	4 x	+	0 y	-	3
$\overline{EC}=$	0 x	+	0 y	+	20

Teorema: a.l.a

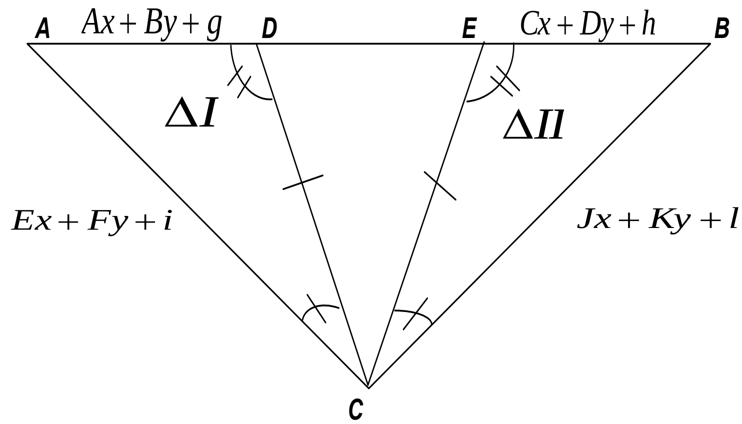
$x=$ **5 3/4** $\quad y=$ **8 1/2**

Ejemplo 14). -

Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = 1
B = 0
g = 6
C = 5
D = 0
h = 0
E = 0
F = 2
i = 5
J = 0
K = 3
l = 1



$\overline{AD} =$	x	+	0 y	+	6	
$\overline{BC} =$	5 x	+	0 y	+	0	
$\overline{AE} =$	0 x	+	2 y	+	5	
$\overline{EC} =$	0 x	+	3 y	+	1	
	-6	-4	16	4		

Teorema: a.l.a

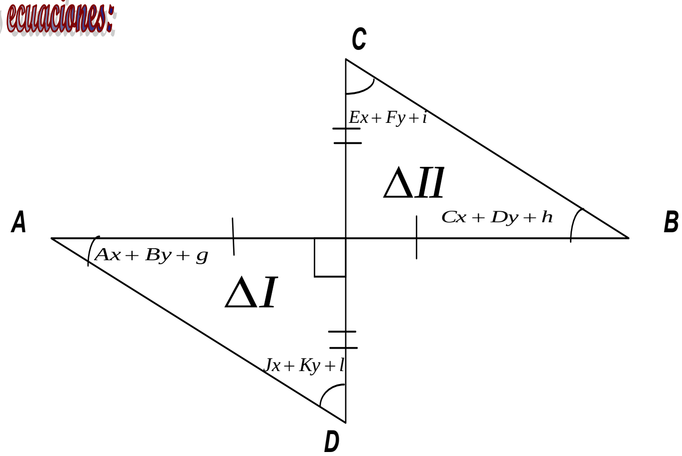
$x =$ 1 1/2 $\quad y =$ 4

Ejemplo 15). -

Hallar los valores de x y y.

Escriba aquí los coeficientes de las ecuaciones:

A = 0
B = 5
g = 0
C = 7
D = 0
h = 0
E = 4
F = 0
i = -3
J = 0
K = 5
l = -7



$\angle A =$	0 x	+	5 y	+	0
$\angle B =$	7 x	+	0 y	+	0
$\angle C =$	4 x	+	0 y	-	3
$\angle D =$	0 x	+	5 y	-	7

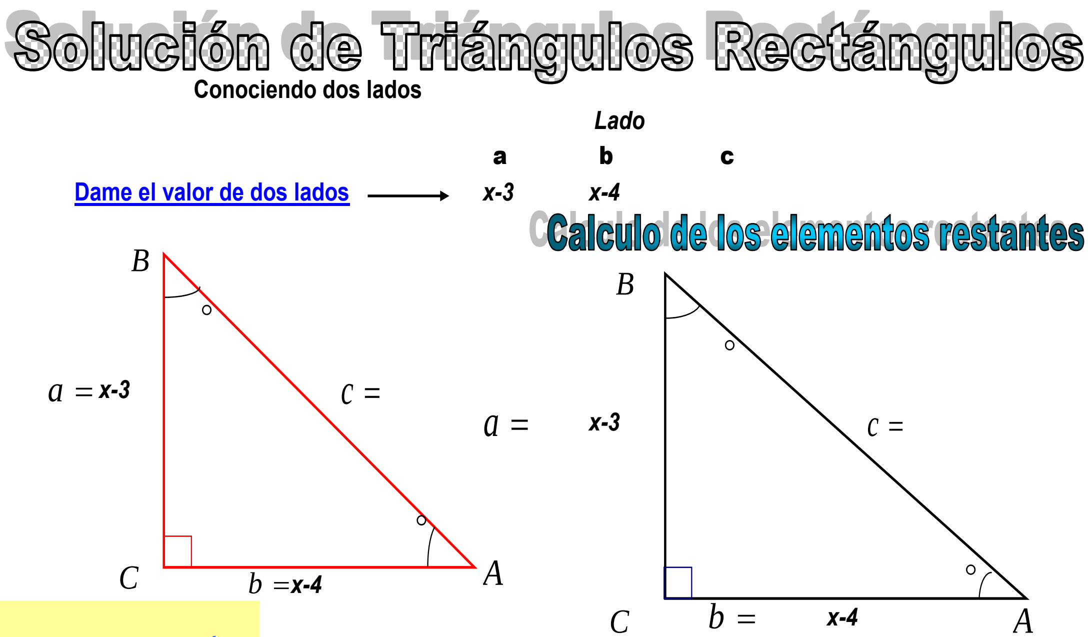
Teorema: l.a.l

$x =$ 1 1/3 $\quad y =$ 1 7/8

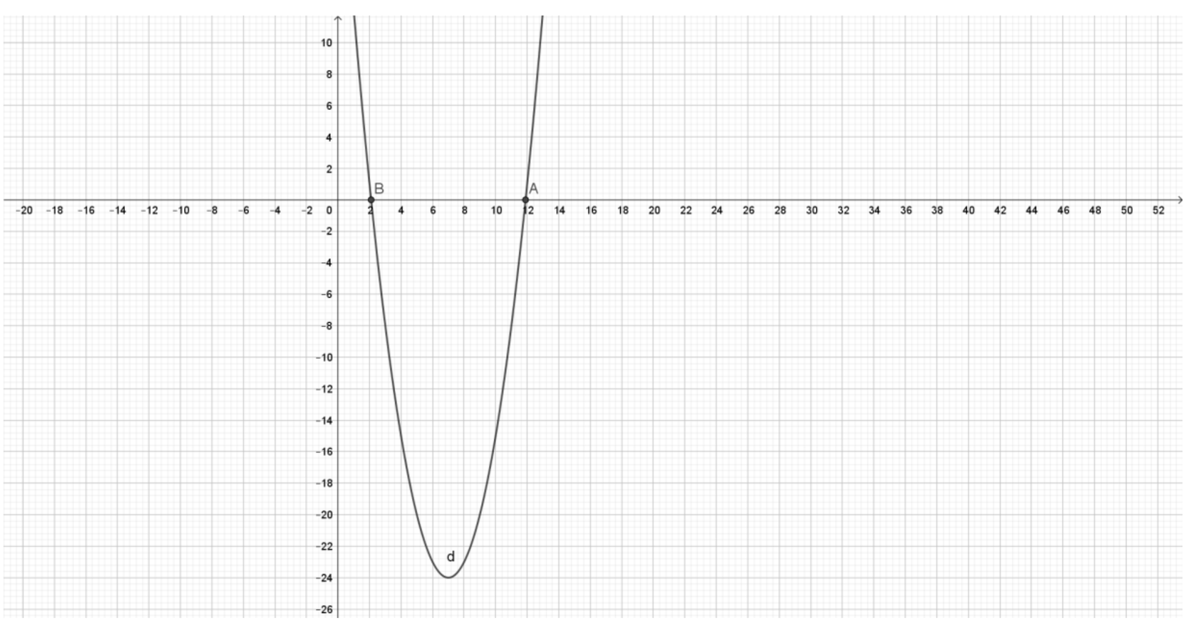
Teorema de Pitágoras:

Ejemplo 16). -

Hallar el valor de c=x, dados a = x - 3 y b = x – 4.

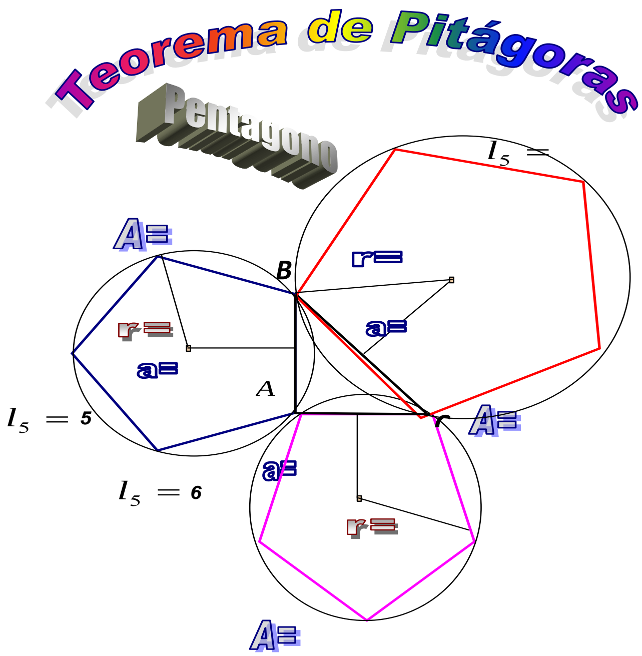


$$
\begin{aligned}
&\textit{Teorema de Pitágoras}\\
&(x-3)^2+(x-4)^2=x^2\\
&x^2-6x+9+x^2-8x+16=x^2\\
&2x^2-14x+25-x^2=0\\
&x^2-14x+25=0\\
&x=11.89898, \quad x=2.10102051
\end{aligned}
$$

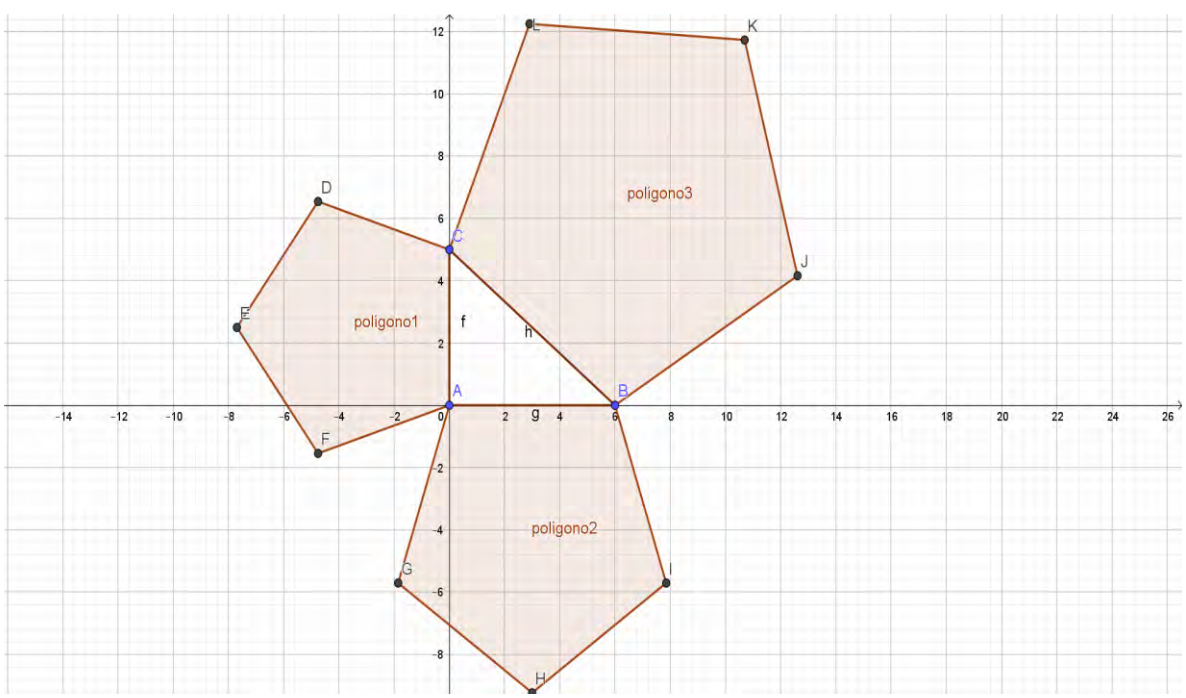


Ejemplo 17). –

Supongamos que queremos verificar el Teorema de Pitágoras, construye en cada uno de los catetos del triángulo ABC un pentágono de lado 5 y 6 respectivamente. ¿La suma de áreas de los pentágonos de lados 5 y 6 es igual al área del pentágono que se construye en la hipotenusa del triángulo ABC?   Apolígono1=43.01; Apolígono2=61.94



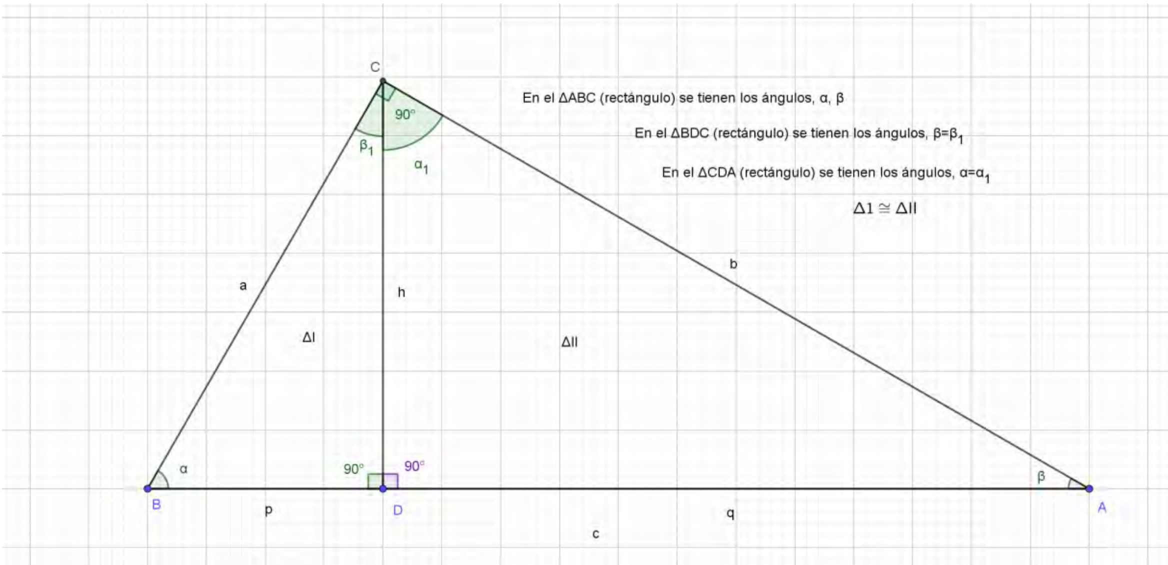
Área =polígono3 = 104.95=Apolígono1+Apolígono2 =43.01+61.94



Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 18). –

Sea $\overline{CD}$ *la altura sobre la hipotenusa* $\overline{AB}$ *en la siguiente figura*



i.- Si p=2 y q=6, hallar a y h.

$\Delta I \cong \Delta II$	*ángulos*	*lados homologos*	*relación de proporcionalidad*
	$\alpha = \alpha_1$	$h : q$	
	$\beta_1 = \beta$	$p : h$	$\dfrac{h}{q} = \dfrac{p}{h} = \dfrac{a}{b}$
	$90° = 90°$	$a : b$	

entonces, $\dfrac{h}{6} = \dfrac{2}{h} = \dfrac{a}{b} \quad \Rightarrow \dfrac{h}{6} = \dfrac{2}{h} \therefore h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12}$

Usando el Teorema de Pitágoras en el ΔI

$a^2 = p^2 + h^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow a = 4$

ii.- Si p=4 y a=6, hallar c y h.

$\Delta I \cong \Delta II$	ángulos	lados homólogos	relación de proporcionalidad
	$\alpha = \alpha_1$	$h : q$	
	$\beta_1 = \beta$	$p : h$	$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} = \frac{a}{b}$
	$90° = 90°$	$a : b$	

entonces, $\frac{h}{q} = \frac{4}{h} = \frac{6}{b}$

Usando el Teorema de Pitágoras en el ΔI

$$a^2 = p^2 + h^2 \therefore h^2 = a^2 - p^2 = 36 - 16 = 20 \therefore h = \sqrt{20}$$

$$\frac{h}{q} = \frac{4}{h} \Rightarrow q = \frac{h^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$c = p + q = 4 + 5 = 9$$

iii.- Si p=16 y h=8, hallar q y b.

$\Delta I \cong \Delta II$	ángulos	lados homólogos	relación de proporcionalidad
	$\alpha = \alpha_1$	$h : q$	
	$\beta_1 = \beta$	$p : h$	$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} = \frac{a}{b}$
	$90° = 90°$	$a : b$	

entonces, $\frac{8}{q} = \frac{16}{8} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \frac{8}{q} = \frac{16}{8} \Rightarrow q = \frac{64}{16} = 4$

Usando el Teorema de Pitágoras en el ΔII

$$b^2 = q^2 + h^2 \therefore b^2 = 16 + 64 = 80 \therefore b = \sqrt{80}$$

iv.- Si b=12 y q=6, hallar p y h.

$\Delta I \cong \Delta II$	ángulos	lados homólogos	relación de proporcionalidad
	$\alpha = \alpha_1$	$h : q$	
	$\beta_1 = \beta$	$p : h$	$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} = \frac{a}{b}$
	$90° = 90°$	$a : b$	

entonces, $\frac{h}{6} = \frac{p}{h} = \frac{a}{12}$

Usando el Teorema de Pitágoras en el ΔII

$$b^2 = q^2 + h^2 \therefore h^2 = 144 - 36 = \therefore h = \sqrt{108}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{p}{h} = \frac{a}{12}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{p}{h} \Rightarrow p = \frac{h^2}{6} = \frac{108}{6} = 18$$

Al finalizar la unidad el estudiante logro los siguientes aprendizajes, de entre otros varios más:

Utiliza correctamente la notación propia de la congruencia.
Comprende el concepto de congruencia.

Construye segmentos y ángulos congruentes.

Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.

Argumenta empíricamente la validez de los criterios de congruencia.

Argumenta deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.

Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos.

Resuelve problemas, por medio de los criterios de congruencia.

Utiliza correctamente la notación propia de la semejanza.

Comprende el concepto de semejanza.

Reconoce cuándo dos figuras son semejantes.

Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.

Establece como válidos los criterios de semejanza.

Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.

Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.

Divide un segmento en n partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales.

Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.

El alumno resuelve problemas de triángulos congruentes, semejantes, del teorema de Pitágoras, de geometría plana en general.

Bibliografía Para el alumno Básica:

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: PEARSON. Addison Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: CENGAGE

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría. México: Publicaciones Cultural.

Complementaria:

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México, PEARSON.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGRAW HILL, INTERAMERICANA

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: PEARSON.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICANA.

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: ESFINGE.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). Álgebra. México: PEARSON.

Para el profesor

Allen, R. (2008). Álgebra intermedia. México: PEARSON.

Álvarez, E. (2012). Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Medellín.

Burril, G., Cummins, J., Kanold, T., Boyd, C., Malloy, C. y Yunker, L. (2004). Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones. México: McGRAW HILL, INTERAMERICANA

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T. (2005). Geometría. México: PEARSON.

Filloy, E. y Zubieta, G. (2001) Geometría. México: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICANA

García, M. (2005). Matemáticas I para preuniversitarios. México: ESFINGE.

Larson, R. y Hostetler, R. (2006). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.

Lozano, C. y Vázquez, A. (2009). Geometría y trigonometría. México: PRENTICE HALL.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: PEARSON. Addison Wesley.

Ortiz Campos, F. J. (1991). Matemáticas – 2, Geometría y Trigonometría. México: Publicaciones Cultural.

Polya, G. (1981). Cómo plantear y resolver problemas (1 ̇ed., 9 ̇reimp. ed.). México: Trillas.