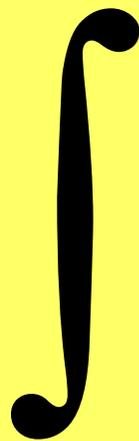




CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

FUNCIONES, ÁREAS Y APLICACIONES

CCH ORIENTE



AUTORES

GÓMEZ	GONZÁLEZ
HERNÁNDEZ	MARTÍNEZ
RENDÓN	RODRÍGUEZ CH
RODRÍGUEZ P	SÁNCHEZ
ORTIZ	TOVAR

PRODUCTO 20²⁰/₂₁



COORDINARON
PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

FUNCIONES, ÁREAS Y APLICACIONES

CCH ORIENTE

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
HÉCTOR GONZÁLEZ PÉREZ
JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
KAREN JANETT MARTÍNEZ ZAPOTITLA
JOSÉ ADOLFO RENDÓN ORTÍZ
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ CHÁVEZ
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ
RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS
SERGIO ORTIZ ANTONIO
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ

PRODUCTO
20²⁰
21

COORDINARON
PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS

Contenido

Introducción i

1 Derivada de funciones trascendentes 1

- 1.1 DERIVADA DE LAS FUNCIONES
TRIGONOMÉTRICAS 2
- 1.2 DERIVADA DE LAS FUNCIONES
LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES 23

2 La integral definida 45

- 2.1. EL ÁREA BAJO UNA CURVA,
LA INTEGRAL DEFINIDA 46
- 2.2. LA FUNCIÓN ÁREA Y EL TEOREMA
FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO 75
- 2.3. APLICACIONES DE LA
INTEGRAL DEFINIDA 101

3 La integral indefinida 113

- 3.1. MÉTODOS DE
INTEGRACIÓN 114

3.2. PROBLEMAS
CONTEXTUALIZADOS

141

4 Modelos y predicción **151**

4.1. ANTECEDENTES Y	
TÉRMINOS	152
4.2. UN MODELO DE CRECIMIENTO	
Y PREDICCIÓN	165

A Apéndices **185**

A.A. NOTACIÓN SIGMA	186
A.B. LÍMITES Y CONTINUIDAD	194
A.C. DERIVABILIDAD	212
A.D. SOLUCIONES	219



INTRODUCCIÓN

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se les revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

Isaac Newton y Gottfried Leibniz son los inventores del cálculo, pero sólo representan un eslabón de una larga cadena que inició hace más de veinte siglos. Desde Eudoxo de Cnido y Arquímedes de Siracusa, quienes hicieron algunas de las más relevantes contribuciones griegas con la creación del método de exhaustión (agotamiento) y del método infinitesimal, al calcular el valor aproximado del área de un círculo. Asimismo, la Geometría Analítica desarrollada independientemente por René Descartes y Pierre de Fermat fue otra de las aportaciones fundamentales, así como las de muchos hombres más, sin las cuales el cálculo seguramente no existiría.

Este libro representa un material didáctico para profesores y alumnos, que a partir de la actualización de los programas de estudio de la asignatura de Cálculo II, tienen la necesidad de una propuesta que les apoye en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Es decir, es una colaboración y propuesta académica hecha por profesores y para profesores y alumnos, cuyo objetivo es presentar una explicación conceptual de los aprendizajes, propósitos y contenidos temáticos y paralelamente a este desarrollo, sugerimos diversas formas de su tratamiento didáctico.

El grupo de profesores que trabajó de manera exhaustiva y minuciosa cada una de las unidades, siguiendo los principios del modelo educativo del Colegio y el enfoque didáctico, privilegiando el logro de los aprendizajes y la “disposición de plantear y resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas, esto es, desarrollar matemáticas...”¹.

El contenido del texto se elaboró bajo el siguiente esquema de trabajo.

¹CCH-UNAM (mayo 2016) Programas de Cálculo I-II, pág.8. Recuperado el 12 de abril de 2021 de www.cch.unam.mx/programasestudio

1. Para el desarrollo de cada Unidad iniciamos con los propósitos y resaltamos la importancia de los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes, mismos que se establecen en los contenidos temáticos del Programa de Estudios Actualizado.
2. Todas las secciones plantean ejercicios que involucran situaciones de la vida cotidiana, de tal manera que sirven como ejemplos para que el profesor y alumno lo utilicen en el proceso de enseñanza aprendizaje.
3. Se enmarcan las proposiciones y definiciones que serán de utilidad en la solución de los problemas que hemos incluido, con el propósito de motivar al lector en aprender a aprender, aprender a hacer matemáticas.
4. Incluimos una gran cantidad de figuras y dibujos que sitúan al lector en el contexto en que se desarrollan los problemas.
5. Al final de cada Unidad se incluye una sección de ejercicios y la solución correspondiente se encuentra al final del libro, con objeto de que el estudiante coteje sus respuestas y pueda comparar su trabajo realizado. Al mismo tiempo, el profesor puede aprovechar esta sugerencia con una retroalimentación en beneficio del aprovechamiento del alumno.
6. Con el propósito de involucrar al alumno en el razonamiento de los contenidos del Cálculo se incluyen líneas con la leyenda “Para reflexionar” asociadas con situaciones que esperamos motiven su interés y desafíen su intelecto. En este punto es importante la asesoría y seguimiento del profesor.
7. También se desarrollaron tres Apéndices que se refieren a temas que no atiende el Programa de Estudios Actualizado, pero que son sustento de la formalidad del cálculo integral.

Finalmente, como todo producto de un trabajo colegiado, está sujeta a la discusión y réplica de los docentes del Área de Matemáticas, pues consideramos que no existe otra forma de medir su contribución. Los autores asumimos como benéfica la retroalimentación, crítica y comentarios con fundamentos académicos que puedan desprenderse de la obra.

Los autores

1

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

PROPÓSITOS

Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.

CONTENIDO

1. Derivada de las funciones trigonométricas
2. Derivada de las Funciones logarítmicas y exponenciales

1.1

DERIVADA DE LAS FUNCIONES
TRIGONOMÉTRICAS**APRENDIZAJES**

El alumno:

- | | |
|--|---|
| 1. Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. | las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. |
| 2. Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica. | 4. Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas. |
| 3. Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener | 5. Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos. |

TEMÁTICA

- i. Funciones trigonométricas y el estudio de su variación.
- ii. Derivada de las funciones seno y coseno.
- iii. Derivada de las funciones tangentes, cotangente, secante y cosecante.
- iv. Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas.
- v. Resolución de problemas en diversos contextos.

El estudio de una gran diversidad de situaciones con variación periódica se vincula con las funciones trigonométricas (específicamente con las funciones seno y coseno), revisemos algunos casos específicos.

EJEMPLO 1.1 (FUNCIONES DEL ÁNGULO DE ROTACIÓN)

a. Sea un círculo de radio de longitud uno con centro anclado en el origen de coordenadas del plano cartesiano, entonces las características geométricas (longitudes de sus lados) del triángulo rectángulo OX_0Y_0 (longitudes de los lados, área y perímetro) varían en función de la amplitud del ángulo

$$\angle X_0OY_0 = \angle t,$$

vea la figura 1.1.

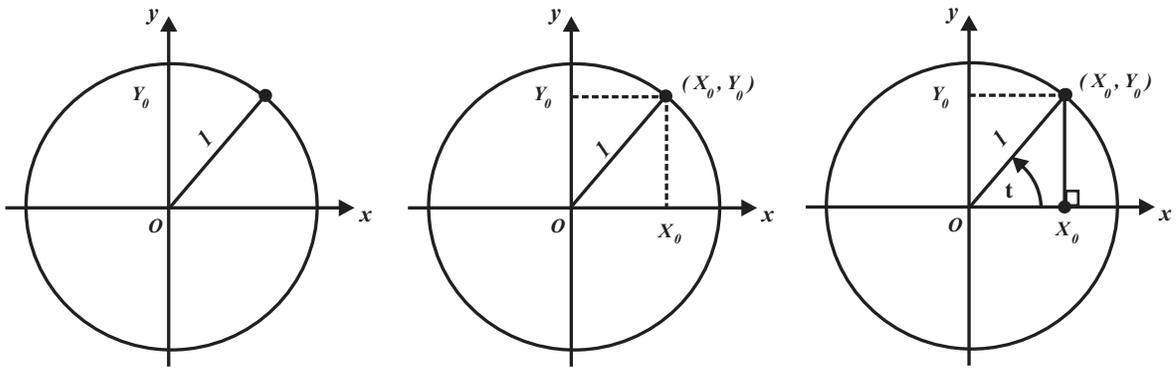


FIGURA 1.1

- i. Altura $h(t) = \text{sen } t$, siempre que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- ii. Base $b(t) = \text{cos } t$, siempre que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- iii. Perímetro $p(t) = 1 + \text{sen } t + \text{cos } t$, siempre que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- iv. Área $A(t) = \frac{1}{2}(\text{sen } t)(\text{cos } t)$, siempre que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b. La figura 1.2 muestra el mecanismo conocido como yugo. Si el eslabón 2 gira con velocidad angular constante, entonces efectúa un movimiento periódico; completa un giro alrededor de la articulación O en un mismo período de tiempo. Simultáneamente, los eslabones 3 y 4 de este mecanismo realizan movimientos periódicos que se modelan por las funciones:

- i. Eslabón 3, $b(t) = \text{cos } t$, siempre que $t_1 \leq t \leq t_2$.
- ii. Eslabón 4, $h(t) = \text{sen } t$, siempre que $t_1 \leq t \leq t_2$.

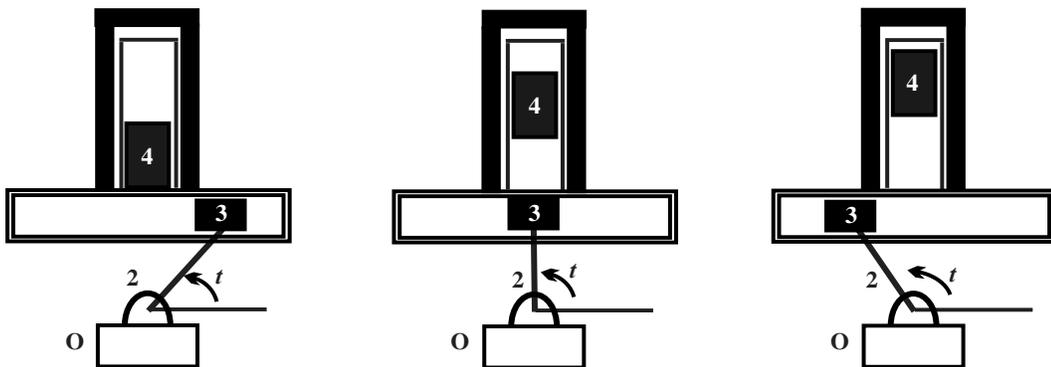


FIGURA 1.2

EJEMPLO 1.2 (TRASLADO DE UNA ESCALERA)

La *figura 1.3* muestra un esquema de un pasillo de 2 metros de ancho que da vuelta en ángulo recto. Determinemos la función que describe al largo de la varilla que pasa a través del pasillo en función del ángulo de su parte delantera y la pared horizontal del pasillo.

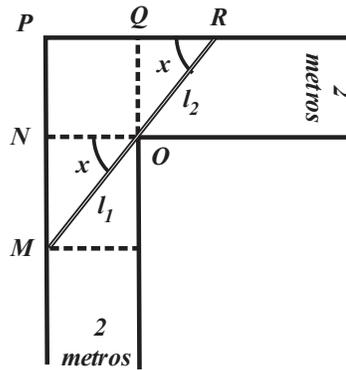


FIGURA 1.3

Sea L el largo de la varilla, de acuerdo con la *figura 1.3* se tiene $L = l_1 + l_2$, en donde l_1 y l_2 representan las longitudes de las secciones de la escalera en el pasillo. Por otra parte, las longitudes de los segmentos de recta \overline{OQ} y \overline{NO} son 2 metros: si aplicando las razones trigonométricas obtenemos

$$l_1 = \frac{2}{\cos x} \text{ y } l_2 = \frac{2}{\sen x}.$$

Observe que el ángulo x determina la posición de la varilla en el pasillo. De

$$L = l_1 + l_2, \quad l_1 = \frac{2}{\cos x} \text{ y } l_2 = \frac{2}{\sen x}$$

obtenemos

$$L(x) = \frac{2}{\cos x} + \frac{2}{\sen x}, \text{ siempre que } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 1.3 (FLUJO A TRAVÉS DE UNA COMPUERTA UNIONES DEL ÁNGULO DE ROTACIÓN)

La *figura 1.4* muestra el proceso de construcción de un canal a partir de una lámina rectangular de ancho 2 metros. La capacidad de tránsito de fluido a través del canal depende del área de la sección transversal del canal, que a su vez depende del ángulo de inclinación de las paredes laterales.

Para el cálculo del área de la sección transversal, notemos que ésta tiene forma de trapecio, por tanto, su área es

$$A = \frac{1}{2} [\textit{base menor} + \textit{base mayor}] [\textit{altura}] \text{ o } A = \frac{1}{2} [10 + 10 \cos x] [10 \textit{sen } x],$$

esto implica

$$A(x) = 50(\textit{sen } x)(1 + \textit{cos } x), \text{ siempre que } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

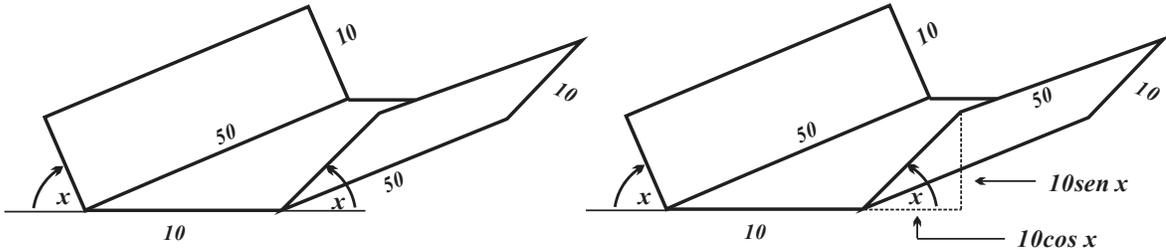


FIGURA 1.4

Dada la utilidad de las funciones trigonométricas en los procesos del cálculo, un paso adelante en su estudio, consiste en determinar el comportamiento de su variación instantánea, sin embargo, antes es necesario formalizar ciertos conceptos y propiedades que se encuentran vinculadas a ellas.

Recordemos que:

- i. Una circunferencia es el contorno (perímetro) de un círculo,
- ii. Que un arco de circunferencia es una sección de ella, vea la figura 1.5.
- iii. Las unidades de medida de la amplitud de un ángulo son los radianes.
- iv. Un radián se define como la amplitud (medida) del ángulo central cuyos lados cortan un arco de circunferencia de longitud igual a la de su radio, (se dice que el arco subtiende al ángulo).

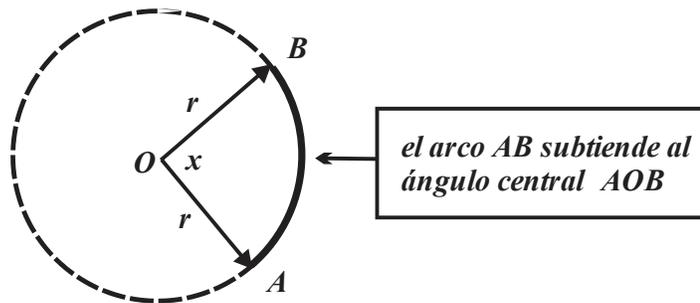


FIGURA 1.5

Para reflexionar

- a. Una circunferencia tiene radio de longitud r y un ángulo central de medida 2π , ¿cuál es la longitud del arco que subtiende?

b. **¿Reconoce la “fórmula” anterior? Explique.**

c. Establezca una relación para transformar unidades en grados a unidades en radianes.

Bajo las condiciones antes descritas, pero suponiendo que el círculo tiene radio de longitud uno, al arco de circunferencia se le asocia la medida del ángulo central que subtiende, vea la *figura 1.6*.

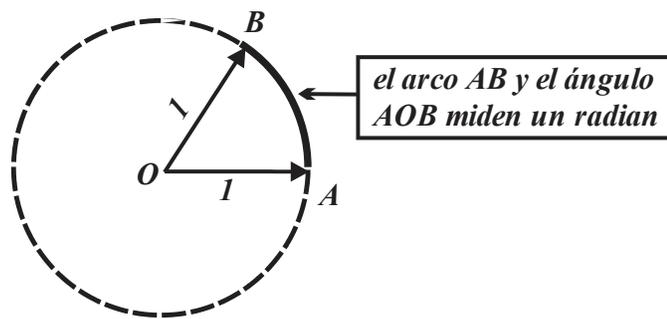


FIGURA 1.6

Una circunferencia de radio de longitud r tiene longitud $2\pi \cdot r$ y se dice que subtiende un ángulo de amplitud 2π radianes, entonces un arco de longitud l_{ARC} subtiende un ángulo de amplitud x_{RAD} (x *radianes*), vea la *tabla 1.1*.

	ARCO	CIRCUNFERENCIA
LONGITUD	l_{ARC}	$2\pi \cdot r$
ÁNGULO QUE SUBTIENDE	x_{RAD}	2π

TABLA 1.1

Por tanto,

$$\frac{l_{ARC}}{x_{RAD}} = \frac{2\pi \cdot r}{2\pi}, \text{ es decir } l_{ARC} = r \cdot x_{RAD}.$$

PROPOSICIÓN 1.1 (LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA)

Sea una circunferencia de radio de longitud r , entonces la longitud del arco (l_{ARC}) que subtiende al ángulo central de amplitud x_{RAD} es $l_{ARC} = r \cdot x_{RAD}$.

Por otra parte, un sector circular es la sección de círculo limitada por uno de sus ángulos centrales, vea la *figura 1.7*.

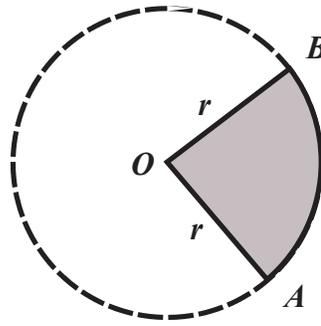


FIGURA 1.7

Dada la relación de proporcionalidad directa entre el área del sector circular (A_{SC}) y la amplitud del ángulo correspondiente (x_{RAD}), la *tabla 1.2* justifica la proporción

$$\frac{A_{SC}}{x_{RAD}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2\pi}, \text{ de donde, } A_{SC} = \frac{1}{2}r^2x_{RAD}.$$

	SECTOR CIRCULAR	CÍRCULO
ÁREA	A_{SC}	$\pi \cdot r^2$
ÁNGULO	x_{RAD}	2π

TABLA 1.2

PROPOSICIÓN 1.2 (ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR)

Sea una circunferencia de radio de longitud r , entonces el área del sector circular (A_{SC}) asociada al ángulo central de amplitud x_{RAD} es

$$A_{SC} = \frac{1}{2}r^2x_{RAD}.$$

De gran utilidad, en la determinación de las funciones derivadas asociadas a las funciones trigonométricas son los límites

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \text{ y } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}(\Delta x)}{\Delta x},$$

para evaluarlos nos basaremos en *figura 1.8*, observe:

- i. $0 < \Delta x < \frac{\pi}{2}$.
- ii. El área del triángulo OCB (que denotaremos por A_{TOCB}) es menor que área del sector circular AB .

iii. El área del sector circular $OABO$ (que denotamos como A_{SCOABO}) es menor que área del triángulo A_{TOADO} (que denotamos por A_{T2OADO}).

Por tanto,

$$A_{TOCB} \leq A_{SCOABO} \leq A_{TOADO}.$$

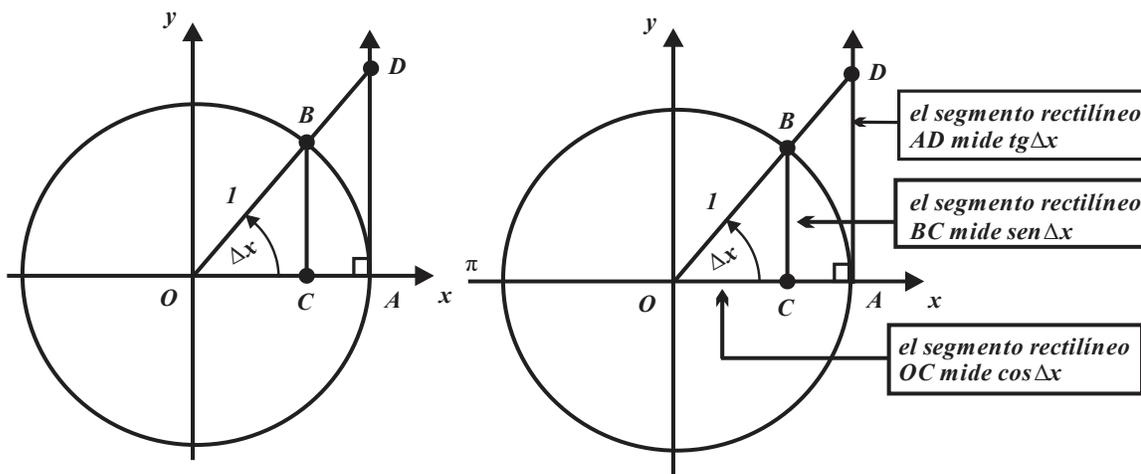


FIGURA 1.8

Entonces

$$0 \leq \frac{1}{2} (\cos \Delta x) (\sin \Delta x) \leq \frac{1}{2} (1)^2 \Delta x \leq \frac{1}{2} (1) (\tan \Delta x)$$

$$0 \leq (\cos \Delta x) (\sin \Delta x) \leq \Delta x \leq \tan \Delta x.$$

Si $\tan \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\cos \Delta x}$, entonces $0 \leq (\cos \Delta x) (\sin \Delta x) \leq \Delta x \leq \tan \Delta x$ es equivalente a

$$0 \leq (\cos \Delta x) (\sin \Delta x) \leq \Delta x \leq \frac{\sin \Delta x}{\cos \Delta x},$$

de donde, al dividir por $\sin \Delta x$ obtenemos

$$0 \leq \cos \Delta x \leq \frac{\Delta x}{\sin \Delta x} \leq \frac{1}{\cos \Delta x}.$$

Al tomar recíprocos obtenemos

$$\cos \Delta x \geq \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \geq \frac{1}{\cos \Delta x} \geq 0 \quad 0 \leq \frac{1}{\cos \Delta x} \leq \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \leq \cos \Delta x.$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x.$$

Por el teorema del encaje obtenemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

El valor del límite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(\Delta x)][1 + \cos(\Delta x)]}{[1 + \cos(\Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(\Delta x)}{\Delta x[1 + \cos(\Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(\Delta x)}{\Delta x[1 + \cos(\Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x[1 + \cos(\Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{[1 + \cos(\Delta x)]} = (1)(0) = 0. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.3 (LÍMITES TRIGONÓMICOS ESPECIALES)

a. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} = 1.$

b. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$

Para investigar

¿Para qué ángulos Δx es válido el resultado anterior? Investigue.

La figura 1.9 justifica las identidades $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) = \cos(\Delta x)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) = \text{sen}(\Delta x)$.

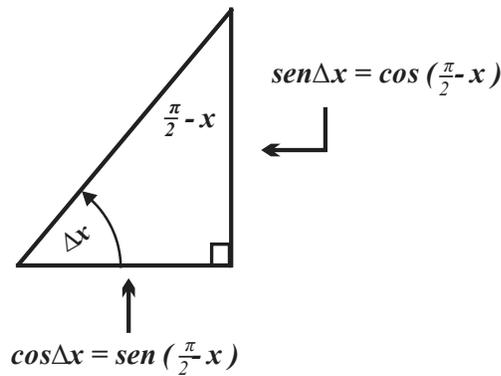


FIGURA 1.9

El seno de la suma de ángulos: $\text{sen}(A+B) = \text{sen}(A)\cos(B) + \text{sen}(B)\cos(A)$

EJEMPLO 1.4 (FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A: $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \text{cos } x$)

Obtengamos la función derivada asociada $f(x) = \text{sen } x$ aplicando el cociente de Newton.

i. $f(x + \Delta x) = \text{sen}(x + \Delta x)$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x}$$

ii. Apliquemos la identidad a

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}(A)\cos(B) + \text{sen}(B)\cos(A)$$

al numerador de la expresión obtenida en el inciso i.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(\Delta x) + \text{sen}(\Delta x)\cos(x) - \text{sen}(x)}{\Delta x}$$

iii. Factoricemos $\text{sen}(\Delta x)$ a la expresión obtenida en el inciso ii.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) [\cos(\Delta x) - 1] + \text{sen}(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x}$$

iv. Separemos los **sumandos y aplique la propiedad de "suma de límites"** a la expresión obtenida en el inciso iii.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x}$$

v. Observemos que quien varía es Δx , y que, por tanto, son constantes $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$, por tanto, la expresión del inciso iv. se convierte en

$$f'(x) = \text{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

vi. Apliquemos los resultados obtenidos en la proposición 1.3, entonces

$$f'(x) = \text{sen}(x) [0] + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [1]$$

finalmente:

$$f'(x) = \cos(x).$$

Para determinar la función derivada de $f(x) = \text{cos}(x)$ utilizaremos un método alternativo al uso del cociente de Newton. El triángulo de la *figura 1.10* tiene hipotenusa de longitud 1, las longitudes de los catetos en términos de $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, establezca identidades con las expresiones anteriores.

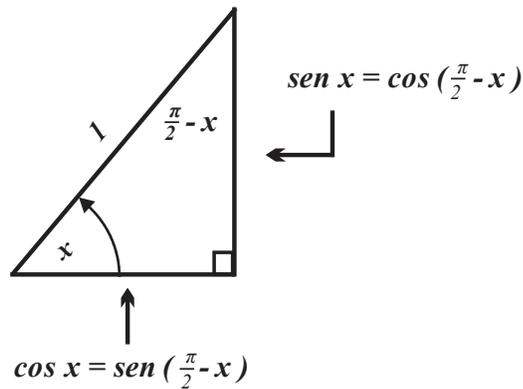


FIGURA 1.10

ii. Seleccionemos la identidad que incluye $\cos(x)$ e iguálela con $f(x)$.

$$f(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

iii. Apliquemos la regla de la cadena a la función obtenida en el inciso ii.

$$f'(x) = [\cos(x)]' = (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

iv. Utilicemos la otra identidad que obtuvo en el inciso i. y aplíquela en la expresión obtenida en el inciso iii.

$$f'(x) = [\cos(x)]' = (-1)\text{sen}(x) = -\text{sen}(x).$$

PROPOSICIÓN 1.3 (DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$)

a. Si $f(x) = \text{sen}(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.

b. Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\text{sen}(x)$.

NOTA

En lo sucesivo en lugar de $f(x) = \text{sen}(x)$ escribiremos $f(x) = \text{sen } x$, similarmente, en lugar de $f(x) = \cos(x)$ escribiremos $f(x) = \cos x$.

EJEMPLO 1.5 (FUNCIÓN DERIVADA DE $f(x) = \text{tg } x$, $f(x) = \text{ctg } x$, $f(x) = \text{sec } x$ y $f(x) = \text{csc } x$)

1. Función derivada asociada a $f(x) = \text{tg } x$.

i. Rescribamos $f(x) = \text{tg } x$ en términos de las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$, entonces

$$f(x) = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$

ii. Apliquemos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones,

$$f'(x) = (tg x)' = \left(\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\text{cos } x)(\text{sen } x)' - (\text{sen } x)(\text{cos } x)'}{(\text{cos } x)^2} = \frac{(\text{cos } x)(\text{cos } x) - (\text{sen } x)(-\text{sen } x)}{(\text{cos } x)^2}$$

simplifiquemos

$$f'(x) = \frac{(\text{cos } x)^2 + (\text{sen } x)^2}{(\text{cos } x)^2}.$$

iii. Apliquemos la “identidad pitagórica” $(\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1$ y el hecho de

$$f(x) = \frac{1}{\text{cos } x} = \text{sec } x$$

para simplificar el resultado obtenido en el inciso i.

$$f'(x) = \frac{(\text{cos } x)^2 + (\text{sen } x)^2}{(\text{cos } x)^2} = \frac{1}{(\text{cos } x)^2} = (\text{sec } x)^2.$$

2. Función derivada asociada a $f(x) = \text{ctg } x$.

i. Rescribamos la función $f(x) = \text{ctg } x$ en términos de las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \text{cos } x$.

$$f(x) = \text{ctg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}.$$

ii. Apliquemos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones, simplifique.

$$f'(x) = (\text{ctg } x)' = \left(\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\text{sen } x)(\text{cos } x)' - (\text{cos } x)(\text{sen } x)'}{(\text{sen } x)^2} = \frac{(-\text{sen } x)(\text{sen } x) - (\text{cos } x)(\text{cos } x)}{(\text{sen } x)^2}$$

$$= \frac{-(\text{sen } x)^2 - (\text{cos } x)^2}{(\text{sen } x)^2} = -\frac{(\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2}{(\text{sen } x)^2} = -\frac{1}{(\text{sen } x)^2}.$$

iii. Apliquemos la identidad

$$f(x) = \frac{1}{\text{sen } x} = \text{csc } x$$

para simplificar el resultado obtenido en el inciso i.

$$f'(x) = -\frac{1}{(\text{sen } x)^2} = -(\text{csc } x)^2$$

3. Función derivada asociada a

$$f(x) = \text{sec } x.$$

i. Rescribamos $f(x) = \text{sec } x$ en términos de la función $f(x) = \text{sen } x$, entonces

$$f(x) = \text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}.$$

ii. Apliquemos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones y simplifique.

$$f'(x) = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(1)' - (1)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{0 - (-\sen x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sen x}{(\cos x)^2}.$$

iii. Separemos el resultado obtenido en el inciso i. en dos factores fraccionarios, posteriormente apliquemos el hecho de que

$$f(x) = \frac{\sen x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \text{ y } f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

entonces

$$f'(x) = \frac{\sen x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sen x}{\cos x} = (\sec x)(\operatorname{tg} x).$$

4. Función derivada asociada a $f(x) = \csc x$.

i. Rescribamos $f(x) = \csc x$ en términos de la función $f(x) = \sen x$.

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sen x}.$$

ii. Aplicamos la “regla” para obtener la derivada de una división de funciones y simplifique.

$$f'(x) = (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sen x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(\sen x)(1)' - (1)(\cos x)'}{(\sen x)^2} = \frac{0 - (\cos x)'}{(\sen x)^2} = \frac{-\cos x}{(\sen x)^2}$$

iii. Separemos el resultado obtenido en el inciso i. en dos factores fraccionarios, posteriormente apliquemos el hecho de

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sen x} = \operatorname{ctg} x \text{ y } f(x) = \frac{1}{\sen x} = \csc x$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{(\sen x)^2} = -\frac{1}{\sen x} \frac{\cos x}{\sen x} = -(\csc x)(\operatorname{ctg} x).$$

Para reflexionar

¿Cuáles son los dominios de las derivadas de las funciones; cotangente, secante y cosecante?

Para reflexionar

¿Por qué la derivada de una función periódica es otra función periódica? Justifique su respuesta.

EJEMPLO 1.6 (DERIVADAS DE FUNCIONES CON SENOS Y COSENOS)

a. $\frac{d}{dx}(8x - x^2 \sen x) = 8 - \left[x^2 \frac{d}{dx}(\sen x) + \sen x \frac{d}{dx}(x^2) \right]$

$$= 8 - \left[x^2 \cos x + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} (x^2) \right] = 8 - x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{d}{dx} (x^3 \operatorname{sen} x) &= x^3 \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} (x^3) \\ &= x^3 \cos x + (\operatorname{sen} x)(3x^2) = x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{c. } \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{dx}{dx} - x \frac{d \cos x}{dx}}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2}$$

$$\text{d. } \frac{d}{dx} \left(\frac{\sec x}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x} \frac{d \sec x}{dx} - \sec x \frac{d \sqrt{x}}{dx}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec x}{x^2}$$

Recuerde

¿Cómo se deriva una composición de funciones? ¿Qué es la regla de la cadena?

La “regla de la cadena” presenta gran utilidad en la obtención de la función derivada, de funciones trigonométricas cuyo argumento involucra a la función $u(x)$. Las relaciones obtenidas en el *ejemplo 1.3* en términos de la variable $u(x)$ toman la forma:

$$\text{a. } \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} u) = (\cos u) u'(x).$$

$$\text{d. } \frac{d}{dx} (\operatorname{ctg} x) = -(\csc u)^2 u'(x).$$

$$\text{b. } \frac{d}{dx} (\cos u) = -(\operatorname{sen} u) u'(x).$$

$$\text{e. } \frac{d}{dx} (\sec u) = (\sec u)(\operatorname{tg} u) u'(x).$$

$$\text{c. } \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} u) = (\sec x)^2 u'(x).$$

$$\text{f. } \frac{d}{dx} (\csc u) = -(\csc u)(\operatorname{ctg} u) u'(x).$$

En el cálculo de derivadas que involucran a funciones trigonométricas tendremos en cuenta la siguiente notación:

$\operatorname{sen}^n x$ significa $(\operatorname{sen} x)^n$, $\operatorname{sen}^n x$ significa $\operatorname{sen}(x^n)$ y $\operatorname{sen} ax$ significa $\operatorname{sen}(ax)$, las convenciones anteriores se aplican a todas las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1.7 (DERIVADA DE COMPOSICIONES DE FUNCIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS)

$$\text{a. Si } f(x) = \operatorname{sen} 8x^3 = \operatorname{sen}(8x^3),$$

entonces

$$f'(x) = \operatorname{sen} 8x^3 = \cos(8x^3)(24x^2) = 24x^2 \cos(8x^3).$$

b. Si

$$g(x) = (\operatorname{sen} 8x)^3,$$

entonces

$$g'(x) = 3(\operatorname{sen} 8x)^2 (\cos 8x) (8) = 24(\operatorname{sen} 8x)^2 (\cos 8x).$$

c. Si $h(x) = \operatorname{sen}(8)x^3$,

entonces

$$h'(x) = \operatorname{sen}(8) (3x^2) = 3x^2 \operatorname{sen}(8).$$

d. Si $i(x) = \sqrt[4]{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{4}}$,

entonces

$$i'(x) = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} x)^{-\frac{3}{4}} (\cos x) = \frac{\cos x}{4(\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\cos x}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}.$$

EJEMPLO 1.8 (DERIVADA DE COMPOSICIONES DE FUNCIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BIS)

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d}{dx} (\operatorname{sen}(1 + \cos x)) &= (\cos(1 + \cos x)) \frac{d}{dx} (1 + \cos x) \\ &= (\cos(1 + \cos x)) (-\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x) (\cos(1 + \cos x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{d}{dx} (\cos(x^2 - 3x)) &= -(\operatorname{sen}(x^2 - 3x)) \frac{d}{dx} (x^2 - 3x) \\ &= -(\operatorname{sen}(x^2 - 3x)) (2x - 3) = -(2x - 3) (\operatorname{sen}(x^2 - 3x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{d}{dx} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x+2} \right) &= \left(\operatorname{sec} \frac{1}{x+2} \right)^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x+2} \right) \\ &= \left(\operatorname{sec} \frac{1}{x+2} \right)^2 \left(\frac{-1}{(x+2)^2} \right) = -\frac{1}{(x+2)^2} \left(\operatorname{sec} \frac{1}{x+2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{d}{dx} (\operatorname{ctg} \sqrt{x-1}) &= -(\operatorname{csc} \sqrt{x-1})^2 \frac{d}{dx} (\sqrt{x-1}) \\ &= -(\operatorname{csc} \sqrt{x-1})^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} (\operatorname{csc} \sqrt{x-1})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \frac{d}{dx} \left(\operatorname{sec} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= \left(\operatorname{sec} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\operatorname{sec} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}^2} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}^2} \left(\operatorname{sec} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } \frac{d}{dx} (\operatorname{csc}(\operatorname{sen} x)) &= -(\operatorname{csc}(\operatorname{sen} x)) (\operatorname{ctg}(\operatorname{sen} x)) \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} \\ &= -(\operatorname{csc}(\operatorname{sen} x)) (\operatorname{ctg}(\operatorname{sen} x)) (\cos x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.9 (APLICACIONES DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS)

La función $f(t) = 3\text{sen}2t$ describe la posición de un tapón de plástico que flota en el agua, por tanto, su función derivada describe su rapidez en el instante $t = t_0$.

- i. La rapidez del tapón a los $t = 0$ segundos es $f'(0) = 6\cos2(0) = 6$ centímetros/segundo.
 - ii. La rapidez del tapón a los $t = \frac{\pi}{2}$ segundos es $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6$ centímetros/segundo.
 - iii. La rapidez del tapón a los $t = \pi$ segundos es $f'(\pi) = 6\cos2(\pi) = 6$ centímetros/segundo.
-

EJEMPLO 1.10 (APLICACIONES DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BIS)

Una “rueda de la fortuna” tiene 10 metros de radio y rota en sentido contrario a las manecillas del reloj, con velocidad angular de 2 radianes por segundo.

- i. Para calcular qué tan rápido se eleva (verticalmente) una canastilla en el borde de la rueda cuando está por encima de la línea recta horizontal que pasa por el centro de la “rueda de la fortuna”:

$$y(\theta) = 10\text{sen}(\theta)$$

El ángulo de rotación depende del tiempo, es decir, $\theta = \theta(t)$, por tanto,

$$y(t) = 10\text{sen}(\theta(t)) \text{ y } \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}.$$

De acuerdo a la regla de la cadena, la función que describe la rapidez de la canastilla es

$$\frac{d}{dt}y(t) = 10\cos(\theta(t))\frac{d\theta}{dt} \text{ o también } \frac{d}{dt}y(t) = 20\cos(\theta(t)).$$

Finalmente

$$\frac{d}{dt}y(0) = 20\cos(0) = 20 \text{ metros/segundo.}$$

- ii. Para calcular qué tan rápido se desplaza (horizontalmente) una canastilla en el borde de la rueda cuando está por encima de la línea recta horizontal que pasa por el centro de la “rueda de la fortuna”:

$y(\theta) = 10\cos(\theta)$, el ángulo de rotación depende del tiempo, es decir, $\theta = \theta(t)$, por tanto,

$$y(t) = 10\cos(\theta(t)) \text{ y } \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}.$$

La rapidez de desplazamiento horizontal de la canastilla está dada por $\frac{dx}{dt}$.

De acuerdo a la regla de la cadena, la función que describe la rapidez de la canastilla es

$$\frac{d}{dt}x(t) = -10\text{sen}(\theta(t))\frac{d\theta}{dt} \text{ o } \frac{d}{dt}x(t) = -40\text{sen}(\theta(t)),$$

por último, $\frac{d}{dt}y(0) = -40\text{sen}(0) = 0$ metros/segundo.

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 1.1 ▼

1. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = 4\text{sen } x - x$.

b. $f(x) = x^4 + 2\cos x$.

c. $f(x) = \text{tg } x - \sec x$.

d. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{7}\text{sen } x$.

e. $f(x) = 4\sec x \text{tg } x$.

2. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = 2\csc x - 6\text{ctg } x$.

b. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$.

c. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x}$.

e. $f(x) = \frac{\text{tg } x}{x^2 - x}$.

3. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = 8\cos x - 5\text{tg } x$.

b. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^3}$.

c. $f(t) = t^{-3}\text{ctg } t$.

d. $f(w) = 2\sec w \csc w$.

4. Sin utilizar la regla de la cadena derive.

a. $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$.

b. $f(x) = \text{sen}(x + 5)$.

c. $f(x) = \cos(x + 5)$.

d. $f(x) = \text{sen}(2x)$.

e. $f(x) = \text{sen}(x - \pi)$.

f. $f(x) = \csc x$.

g. $f(x) = \sec x \text{tg } x$.

5. Obtenga la función derivada.

a. $f(u) = \text{sen}(u^3 + 4u)$.

b. $f(z) = \cos(z^2 + 4)$.

c. $f(z) = (\text{sen } z + 4)^3$.

d. $f(x) = \text{sen } x^5$.

e. $f(t) = \text{tg } t^4$.

f. $f(x) = (\text{tg } x)^4$.

6. Obtenga la función derivada.

a. $f(r) = \text{sen}^3\left(\frac{1-6r}{2-r}\right)$.

b. $f(x) = \cos\sqrt{3x^2 + 1}$.

c. $f(x) = \sqrt{\cos x - x}$.

d. $f(x) = \frac{\text{tg}(x^2 - 2x)}{x^2 + x + 1}$.

e. $f(x) = (1-x)\sec(x^3 + 4)$.

f. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$.

7. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = \frac{\cos x^5}{\text{sen } x^4 - 11}$.

b. $f(x) = \frac{\csc x + 2}{x^2 + 2\cos x - 1}$.

c. $f(t) = (\text{sen } t + \cos t)^4$.

d. $f(x) = \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \text{sen } x}\right)^3$.

8. Determine la ecuación de la recta que es tangente a la curva asociada a f .

a. $f(x) = x + \cos x$ en $P(0, 1)$.

b. $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ en $P(0, 1)$.

c. $f(x) = 2\sin x$ si $x = \frac{\pi}{6}$.

d. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x = \frac{\pi}{6}$.

9. Establezca relaciones para calcular la derivada indicada, suponga que n es un número natural.

a. $y^{(3n)}$ si $y = a \cos x$.

b. $y^{(4n)}$ si $y = a \cos x$.

10. Establezca relaciones para calcular la derivada indicada, suponga que n representa a un número natural.

a. $y^{(3n)}$ si $y = \sin x$.

b. $y^{(4n)}$ si $y = \sin x$.

c. $y^{(3n)}$ si $y = \sin ax$.

d. $y^{(4n)}$ si $y = \sin ax$.

11. Establezca relaciones para calcular la derivada indicada, suponga que es un número natural.

a. $y^{(3n)}$ si $y = \cos x$.

b. $y^{(4n)}$ si $y = \cos x$.

c. $y^{(3n)}$ si $y = \cos ax$.

d. $y^{(4n)}$ si $y = \cos ax$.

12. Establezca "fórmulas" para calcular

$f'(x)$ si:

a. $f(x) = \sin u(x)$.

e. $f(t) = \frac{\sin t^2}{\sin^2 t}$.

13. Utilice la relación

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

el hecho de que

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

y la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

14. Utilice la relación

$$f(x) = \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

suponga que $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ y la regla de la cadena

para demostrar que $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

15. Compruebe que $y = \cos x$ satisface la ecuación $y'' + y = 0$.

16. Compruebe que $y = \sin ax$ satisface la ecuación

$$y'' + a^2 y = 0.$$

17. ¿Por qué?

a. Si $f(t) = \cos^2 t + \sin^2 t$, entonces

$$f'(t) = 0.$$

b. Si $f(t) = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, entonces

$$f'(t) = -\sin t.$$

18. Determine los máximos y mínimos relativos.

a. $f(x) = 4\sin 2x$ en $[0, 2\pi]$.

b. $f(x) = \cos x + \sin x$ en $[0, 2\pi]$.

c. $f(x) = \sin x - \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

b. $f(x) = \cos u(x)$.

c. $f(x) = \operatorname{tg} u(x)$.

19. Determine los máximos y mínimos relativos.

a. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

b. $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

c. $f(x) = 4 \operatorname{sen}^2 x - 8 \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

20. Trace la curva asociada a

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^2 \text{ definida en } (0, 2\pi).$$

- Obtenga la primera derivada.
- Obtenga la segunda derivada.
- Intersección en el eje x .
- Intersección en el eje y .
- Números críticos.
- Valores extremos.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos donde crece.
- Concavidades.

21. Trace la curva asociada a

$$f(x) = (\cos x)^2 \text{ en } (0, 2\pi)$$

siguiendo el proceso del *problema 20*.

22. Bosqueje la curva asociada a:

a. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$.

b. $f(x) = x + \cos x$.

d. $f(x) = \cos 2x + \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

e. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

23. ¿Qué función se debe derivar para obtener?

a. $f(t) = \cos 4t$.

b. $f(t) = \operatorname{sen} 5t$.

24. ¿Qué función se debe derivar para obtener?

a. $f(t) = \cos at$.

b. $f(t) = \operatorname{sen} bt$.

25. En cierta ciudad la temperatura, en grados centígrados, se comporta de acuerdo con la relación

$$T(t) = 22 + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$$

calcule el cambio instantáneo de la temperatura en cualquier tiempo t .

26. Un objeto se encuentra sujeto al extremo de un resorte, mismo que cuelga de una viga, su posición vertical está dada por $f(t) = \cos t$ determine la velocidad del objeto en el tiempo t .

27. El desplazamiento de su posición de equilibrio para un movimiento armónico de un objeto situado al extremo de un muelle es

$$f(t) = \frac{1}{4} \cos 12t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 12t$$

con t en segundos y $f(t)$ en metros, determine la posición y la velocidad del objeto sí $t = \frac{\pi}{8}$.

ACTIVIDADES 1.1

1. Demostración formal.

Pruebe $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ suponiendo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

a. Si $f(x) = \cos x$ calcule el cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

b. Utilice la identidad trigonométrica

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$$

en el cociente obtenido en a. y luego factorice $\cos x$.

c. Separe en dos fracciones, ambas con denominador h , la expresión obtenida en b.

d. En la expresión en c. obtenida en haga tender la variable h a 0 .

e. Identifique los términos que no dependen de h y póngalos antes de la expresión $\lim_{h \rightarrow 0}$

¿Por qué puede hacer esto?

f. Utilice el hecho de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0,$$

sustituya y simplifique, ¿qué obtuvo?

2. Derivada de una función periódica

Suponga que f es una función derivable de

periodo t . La función derivada f' ¿es

periódica? Justifique su respuesta.

3. Se construirá un canal con una plancha rectangular de metal de 12 cms de ancho doblando en cada extremo franjas de 8 cms de manera que formen el mismo ángulo x

a. Trace un esquema que represente tal situación.

b. ¿Cuánto miden los lados opuestos al ángulo x ?

c. ¿Cuánto mide la altura del canal?

d. Determine el área de los triángulos que se formaron al doblar los extremos de la placa.

e. Construya una función que dependa de x y que describa el área A del canal formado por la placa.

f. Verifique $A(x) = 16\cos x + 16\operatorname{sen} x \cos x$

sí $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

g. Verifique que

$$A'(x) = 16(1 - \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x).$$

h. De $A'(x) = 0$ muestre que

$$(1 + \operatorname{sen} x)(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0.$$

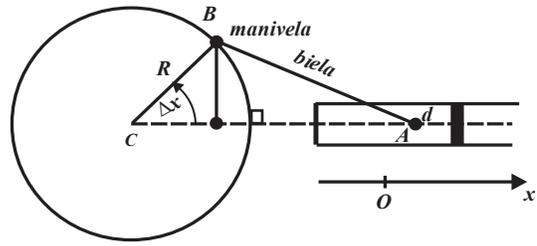
i. ¿Por qué $1 + \operatorname{sen} x = 0$ no proporciona información? y el único número crítico es $x = \frac{\pi}{6}$

j. ¿Para qué área la capacidad del canal es máxima?, verifique su respuesta.

4. Movimiento de un pistón

Un pistón consta de una biela AB cuyo extremo A se llama pie de biela y se desplaza a lo largo del eje x , vea la figura anexa.

con la vertical y con la plancha.



Mientras que el otro extremo B , llamado cabeza de biela, articulado en B con una manivela OB describe una circunferencia de radio OB

- Determine la función $x_e(\theta)$ que describe posición del pistón respecto al centro de la rueda (recuerde la ley de los cosenos).
- Si se considera como origen cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, calcule $x_0(\frac{\pi}{2})$.
- En consecuencia la posición del pistón es $x(\theta) = x_e(\theta) - x_0(\frac{\pi}{2}) = ?$
- Si la manivela se mueva con velocidad angular constante $\omega t = \theta$ la expresión anterior se transforma en:
- Describa gráficamente el desplazamiento del pistón.
- Describa gráficamente la rapidez del desplazamiento del pistón.

5. Derivada de la función inversa del seno
 Sea $f(x) = \text{sen } x$, suponga que existe una función $g(x)$ tal que

$$f(g(x)) = x,$$

es decir, $\text{sen}(g(x)) = x$, sobre un intervalo de números reales específico.

- Utilice la regla de la cadena y derive ambas partes de la igualdad anterior.
- Despeje $g'(x)$.
- De la identidad trigonométrica pitagórica

6. Derivada de la función inversa del coseno.
 Sea

$$f(x) = \text{cos } x,$$

suponga que existe una función $g(x)$ tal que

$$f(g(x)) = x,$$

es decir,

$$\text{cos}(g(x)) = x$$

sobre un intervalo de números reales específico.

- Utilice la regla de la cadena y derive ambas partes de la igualdad anterior.
- Despeje

$$g'(x).$$

c. De la identidad trigonométrica pitagórica

$$\text{sen}^2(g(x)) + \text{cos}^2(g(x)) = 1,$$

despeje

$$\text{sen}(g(x)).$$

- Sustituya el resultado obtenido en el inciso c. en la expresión obtenida en el inciso b.
- Sustituya el hecho de que

$$\text{cos}(g(x)) = x$$

en la expresión obtenida en el inciso anterior.
 f. ¿Qué concluye?

7. Derivada de la función inversa del tangente.

Sea $f(x) = \text{tg } x$, suponga que existe una función $g(x)$ tal que $f(g(x)) = x$, es decir $\text{tg}(g(x)) = x$, sobre un intervalo de números reales específico.

$\text{sen}^2(g(x)) + \text{cos}^2(g(x)) = 1$, despeje $\text{cos}(g(x))$.

- c. Sustituya el hecho de que $\text{sen}(g(x)) = x$ en la expresión obtenida en el inciso anterior.
- d. ¿Qué concluye?

d. Sustituya el resultado obtenido en el inciso c. en la expresión obtenida en el inciso b.

e. Sustituya el hecho de que $\text{tg}(g(x)) = x$ en la expresión obtenida en el inciso anterior.

f. ¿Qué concluye?

a. Utilice la regla de la cadena y derive ambas partes de la igualdad anterior.

b. Despeje $g'(x)$.

c. De la identidad trigonométrica pitagórica

$$\text{tg}^2(g(x)) + 1 = \text{sec}^2(g(x)),$$

despeje $\text{tg}(g(x))$.

1.2

DERIVADA DE LAS FUNCIONES
LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

APRENDIZAJES

El alumno:

- | | |
|--|--|
| 6. Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. | 8. Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas |
| 7. Infiere la derivada de las funciones logarítmicas. | 9. Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos. |

TEMÁTICA

6. Derivada de las funciones $f(x) = e^x$, $f(u) = e^u$, $f(x) = 10^x$ y $f(x) = 10^u$.
7. Derivada de las funciones $f(x) = \ln x$, $f(u) = \ln u$, $f(x) = \log x$ y $f(u) = \log u$.
8. Resolución de problemas en diversos contextos.

Las funciones exponenciales y logarítmicas presentan gran utilidad en la descripción de diversos fenómenos, por ejemplo, en el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones (que pueden ser de bacterias, roedores, etc.), en la desintegración radiactiva de sustancias, en situaciones de relacionadas con las finanzas como son el cálculo de cantidades futuras, montos, etc., en el estudio de los cambios en la temperatura de los objetos, en la medición de la intensidad de un sismo, etc. Por otra parte, el estudio de las funciones exponenciales y de las funciones logarítmicas se realiza a la par, puesto que ambas guardan una íntima relación al ser inversas entre sí.

La función con regla de correspondencia $f(x) = a^x$, se denomina exponencial con base a , siempre que a represente un número positivo distinto de uno, x recibe el nombre de exponente y desempeña el papel de variable independiente. Si en la función $f(x) = a^x$ efectuamos la asignación $x = x_0$ obtenemos el número $f(x_0) = a^{x_0} = y_0$, número que interpreta:

“ y_0 es el número que se obtiene al elevar la base a al número x_0 ”, sin embargo, la expresión

$$y_0 = a^{x_0}$$

equivale a $\log_a x_0 = y_0$ (logaritmo con base a de x_0 es igual a y_0) e interpretarse

“ x_0 es el exponente al que ha de elevarse la base a para obtener el número y_0 ”.

EJEMPLO 1.11 (TRÁNSITO ENTRE LAS FORMAS $y_0 = a^{x_0}$ y $\log_a x_0 = y_0$)

a. $\log_5 25 = 2$ si y sólo si $5^2 = 25$.

b. $\log_4 64 = 3$ si y sólo si $4^3 = 64$.

c. $\log_2 64 = 6$ si y sólo si $2^6 = 64$.

d. $\log_8 64 = 2$ si y sólo si $8^2 = 64$.

A continuación, definiremos la función logaritmo natural y posteriormente construiremos la función derivada que tiene asociada.

i. La *figura 1.11.a.* muestra la curva asociada a la función $f(t) = \frac{1}{t}$ cuando $t > 0$ (es decir, definida sobre el intervalo $(0, +\infty)$).

ii. La *figura 1.11.b.* muestra el área de la región del plano cartesiano limitada por:

- La curva asociada a la función $f(t) = \frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[x, 1]$.
- El eje de las abscisas.
- Las líneas rectas verticales de ecuaciones $t = x$ y $t = 1$, note que $x < 1$.

Misma que representaremos por $A\left(\frac{1}{t}, (x, 1)\right)$.

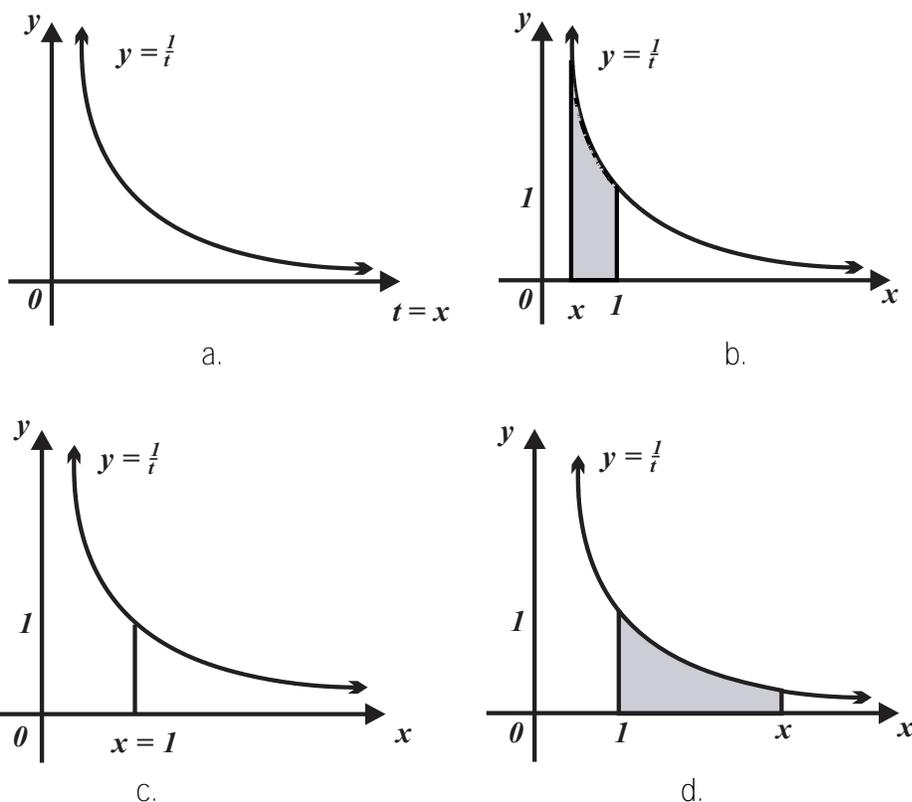


FIGURA 1.11

iii. La *figura 1.11.c.* muestra el área de la región del plano cartesiano limitada por:

- La curva asociada a la función $f(t) = \frac{1}{t}$ sobre el "intervalo" $[1, 1]$.
- El eje de las abscisas.
- La línea recta vertical de ecuación $t = x = 1$.

iv. La figura 1.11.d. muestra el área de la región del plano cartesiano limitada por:

La curva asociada a la función $f(t) = \frac{1}{t}$ sobre el intervalo $[1, x]$.

El eje de las abscisas.

Las líneas rectas verticales de ecuaciones $t = x$ y $t = 1$, note que $x > 1$.

Misma que representaremos por $A\left(\frac{1}{t}, (1, +\infty)\right)$.

DEFINICIÓN 1.1 (FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL)

Si x es un número real positivo, definimos la función "logaritmo natural" como:

$$f(x) = \ln(x) = \begin{cases} -A\left(\frac{1}{t}, (0, x)\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ A\left(\frac{1}{t}, [1, x]\right), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Para reflexionar

¿Por qué $f(1) = \ln(1) = A\left(\frac{1}{t}, [1, 1]\right) = 0$?

PROPIEDAD 1.1 (LOGARITMO NATURAL DEL UNO)

$$f(1) = \ln(1) = 0.$$

En la figura 1.12:

- $1 \leq x \leq x + \Delta x$,
- en el inciso a. el rectángulo encierra un área de $\Delta x \cdot \frac{1}{x + \Delta x}$,
- en el inciso b. la región tiene área $\ln(x + \Delta x) - \ln(x)$ y
- en el inciso c. el rectángulo tiene área $\Delta x \cdot \frac{1}{x}$.

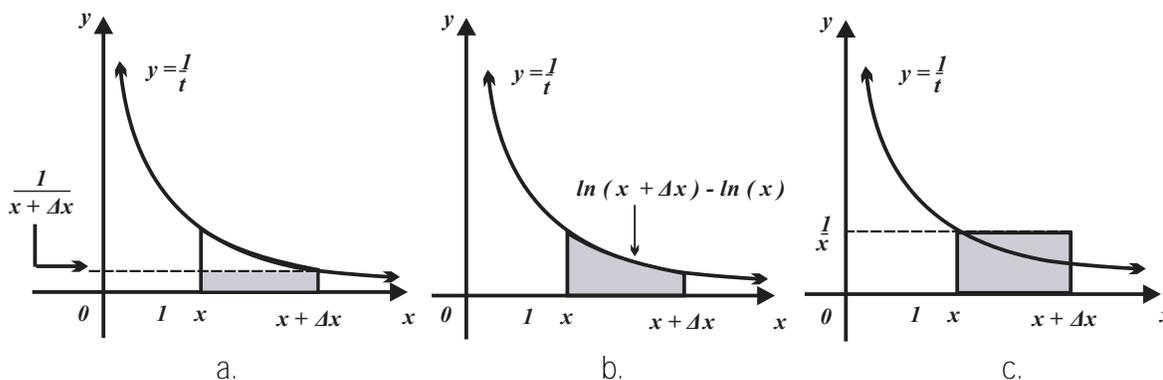


FIGURA 1.12

Al comparar las áreas de las regiones anteriores obtenemos

$$\Delta x \cdot \frac{1}{x + \Delta x} \leq \ln(x + \Delta x) - \ln(x) \leq \Delta x \cdot \frac{1}{x},$$

es decir,

$$\frac{1}{x + \Delta x} \leq \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} \leq \frac{1}{x}.$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

o bien

$$\frac{1}{x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} \leq \frac{1}{x},$$

de donde

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}.$$

Para reflexionar

¿Puede desarrollar un proceso similar si $\Delta x < 0$?

PROPIEDAD 1.2 (DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL)

$$f(x) = \ln(x), \text{ entonces } [\ln(x)]' = \frac{1}{x}, \text{ siempre que } x > 0.$$

Las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = \ln(a \cdot x)$, tienen la misma función derivada,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ y } g'(x) = \frac{a}{a \cdot x} = \frac{1}{x},$$

por lo que difieren en una constante, llamémosle k , luego

$$\ln(x) = \ln(a \cdot x) + k.$$

Para determinar el valor de la constante k , sustituimos

$$x=1 \text{ en } \ln(x) = \ln(a \cdot x) + k$$

y obtenemos

$$\ln(1) = \ln(a) + k.$$

Lo anterior implica

$$0 = \ln(a) + k, \text{ es decir } k = -\ln(a).$$

Ahora sustituimos

$$k = -\ln(a) \text{ en } \ln(x) = \ln(a \cdot x) + k$$

y obtenemos

$$\ln(x) = \ln(a \cdot x) - \ln(a),$$

o bien

$$\ln(a \cdot x) = \ln(x) + \ln(a).$$

En particular, cuando $x=b$ obtenemos

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b).$$

PROPIEDAD 1.3 (LOGARITMO DE UN PRODUCTO)

Si a y b son números positivos, entonces $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Puesto que $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$, entonces

$$\ln(a^2) = \ln(a \cdot a) = \ln(a) + \ln(a) = 2 \cdot \ln(a)$$

$$\ln(a^3) = \ln(a \cdot a \cdot a) = \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) = 3 \cdot \ln(a)$$

$$\ln(a^4) = \ln(a \cdot a \cdot a \cdot a) = \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) + \ln(a) = 4 \cdot \ln(a),$$

en general, $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$.

PROPIEDAD 1.4 (LOGARITMO DE UNA POTENCIA ENTERA)

Si a es un número positivo y n es un número natural, entonces $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$.

Por otra parte, si a representa a un número positivo, entonces $a \cdot a^{-1} = 1$ (propiedad del inverso multiplicativo), también

$$0 = \ln(1) = \ln(a \cdot a^{-1}) = \ln(a) + \ln(a^{-1}) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right),$$

por tanto,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a).$$

Formalizando.

PROPIEDAD 1.5 (LOGARITMO DEL INVERSO MULTIPLICATIVO)

Si a es un número positivo, entonces $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

$$\text{Además } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a \cdot b^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a) - \ln(b).$$

PROPIEDAD 1.6 (LOGARITMO DE UNA DIVISIÓN)

Si a y b son números positivos, entonces $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

TRAZO DE LA CURVA ASOCIADA A LA FUNCIÓN $f(x) = \ln(x)$

i. Puesto que $f(1) = \ln(1) = 0$, entonces la curva asociada a

$$f(x) = \ln(x)$$

interseca al eje de las abscisas en el punto

$$I_x(1, 0).$$

ii. Dado que $f(x) = \ln(x)$ es derivable (su derivada es la función $f'(x) = \frac{1}{x}$), entonces también es continua.

iii. Si $f(x) = \ln(x)$ y $x > 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ y } f'(x) = \frac{1}{x} > 0,$$

(la derivada de $f(x) = \ln(x)$ es positiva), por tanto, la curva asociada a $f(x) = \ln(x)$ es creciente.

iv. Si $f(x) = \ln(x)$ y $x > 0$, entonces

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ y } f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

En consecuencia $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ (la segunda derivada de $f(x) = \ln(x)$ es negativa), por tanto, la curva asociada a

$$f(x) = \ln(x)$$

es cóncava hacia abajo.

Las propiedades anteriores garantizan que la curva asociada a

$$f(x) = \ln(x)$$

presenta la forma mostrada en la *figura 1.13*.

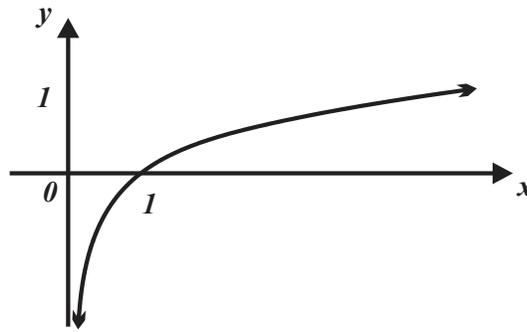


FIGURA 1.13

FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Representaremos por $f(x) = \exp(x)$ a la inversa de la función logaritmo natural, la figura 1.14, muestra la vinculación entre estas funciones.

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\ln x} \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\exp(x)} \mathbb{R}$$

FIGURA 1.14

Las funciones

$$f(x) = \exp(x) \text{ y } f(x) = \ln(x)$$

son invertibles, es decir, una de ellas es la inversa de la otra. Por tanto, la curva asociada a una de ellas, digamos a $f(x) = \exp(x)$ se obtiene dibujando la imagen física (reflexión) de la curva asociada a $f(x) = \ln(x)$ respecto a la línea recta de ecuación $y = x$, vea la figura 1.15.

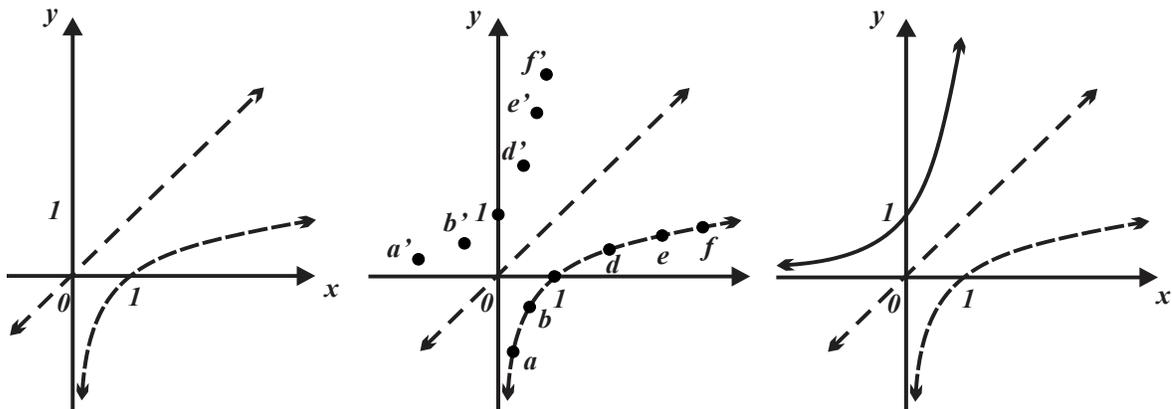


FIGURA 1.15

Para reflexionar

¿Cuáles son las propiedades de la curva asociada a la función exponencial natural?

Antes de justificar formalmente la forma de la curva asociada a la función $f(x) = \exp(x)$ explotaremos el hecho de que es inversa de la función $f(x) = \ln(x)$ para establecer sus propiedades algebraicas. Considerando que

$$\ln(\exp(x)) = x = \exp(\ln(x)),$$

el hecho $\ln(1) = 0$ (propiedad 1.1 “logaritmo natural del uno es cero”), y aplicando $\exp(x)$ a esta última expresión obtenemos

$$\exp(\ln(1)) = \exp(0) = 1.$$

PROPIEDAD 1.7 (EXPONENCIAL DE CERO ES UNO)

$$f(0) = \exp(0) = 1$$

Sean a y b números reales, entonces

$$\ln[\exp(a+b)] = a+b = \ln[\exp(a)] + \ln[\exp(b)] = \ln[\exp(a) \cdot \exp(b)],$$

lo que implica

$$\ln[\exp(a+b)] = \ln[\exp(a) \cdot \exp(b)], \text{ de donde } \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b).$$

PROPIEDAD 1.8 (EXPONENCIAL DE UNA SUMA)

Si a y b son números reales, entonces $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Por otra parte,

$$1 = \exp(0) = \exp(a-a) = \exp(a) \cdot \exp(-a),$$

es decir,

$$1 = \exp(a) \cdot \exp(-a),$$

lo que implica

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \text{ o } \exp(a) = \frac{1}{\exp(-a)}.$$

PROPIEDAD 1.9 (EXPONENCIAL DE UN NÚMERO NEGATIVO)

Si a y b son números reales, entonces $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

$$\text{También } \exp(a-b) = \exp(a) \cdot \exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

PROPIEDAD 1.10 (EXPONENCIAL DE UNA DIFERENCIA)

Si a y b son números reales, entonces $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Con la *definición 1.2* facilitamos la representación de la función exponencial natural.

DEFINICIÓN 1.2 (NÚMERO DE EULER Y REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL)

i. Definimos el número e como $e = \exp(1)$:

ii. Redefinimos la función exponencial natural como $f(x) = \exp(x) = e^x$.

Puesto que

$$f(e^x) = \ln(e^x) = x,$$

en particular $\ln(e^x) = x$, la aplicación de la regla de la cadena da

$$\frac{1}{e^x} (e^x)' = 1,$$

esto implica

$$(e^x)' = e^x.$$

PROPIEDAD 1.11 (DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL)

Si x es un número real y $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

JUSTIFICACIÓN DE LA FORMA DE LA CURVA ASOCIADA A $f(x) = e^x$.

Si $f(x) = e^x$, entonces

i. Es derivable, por tanto, su curva asociada es continua.

ii. $f(0) = e^0 = 1$, entonces la curva asociada $f(x) = e^x$ contiene al punto $I_y(0, 1)$.

iii. $f'(x) = e^x$, es positiva para todo número real, por tanto, la curva asociada $f(x) = e^x$ es creciente.

iv. $f''(x) = e^x$, es positiva para todo número real, por tanto, la curva asociada $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba.

Las cuatro observaciones anteriores garantizan que la función $f(x) = e^x$ tiene como curva asociada la mostrada en la *figura 1.16*.

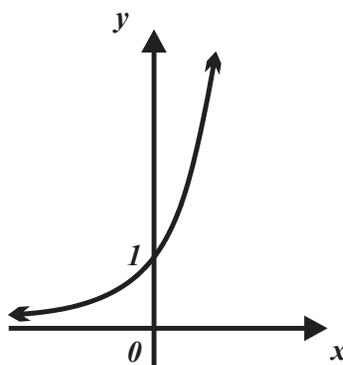


FIGURA 1.16

OTRAS BASES

Generalizaremos los resultados anteriores para funciones exponenciales y logarítmicas con base distinta al número de Euler (base e). Las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $f(x) = e^x$ son invertibles e inversas relativas entre sí (esto es $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$), en particular, si a es un número real positivo se cumple $e^{\ln(a)} = a$, si en lugar del número a utilizamos a^x tendremos

$$\left[e^{\ln(a^x)} \right] = \left[e^{x \ln a} \right] = \left[e^{\ln a} \right]^x = a^x.$$

DEFINICIÓN 1.3 (CAMBIO A BASE NATURAL)

Si $a > 0$, entonces $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$.

Ejercitemos el cambio de base de funciones exponenciales con la *definición 1.3*.

EJEMPLO 1.12 (CAMBIO A BASE NATURAL)

a. La función $f(x) = 4^x$ escrita en base natural es $f(x) = 4^x = e^{x \ln(4)}$.

b. La función $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ en términos de la base natural es $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{1}{5}\right)}$.

Para obtener la función derivada asociada a la función $f(x) = a^x$ se utiliza el hecho

$$f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$$

y la regla de la cadena, entonces al derivar

$$f(x) = a^x = e^{x \ln(a)} \text{ se obtiene } f'(x) = \left(e^{x \ln(a)} \right) \ln(a),$$

es decir,

$$f'(x) = a^x \ln(a).$$

PROPIEDAD 1.12 (DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE CUALQUIER BASE)

Sea $f(x) = a^x$, si $a > 0$ y x es cualquier número real, entonces $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Ya es podemos obtener la derivada de una función exponencial de cualquier base (positiva)

EJEMPLO 1.13 (DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON BASE DISTINTA A LA NATURAL)

a. Si $f(x) = 3^x$, entonces $f'(x) = 3^x (\ln 3)$.

b. Si $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, entonces $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Si $f(x) = (\pi)^x$, entonces $f'(x) = (\pi)^x \ln(\pi)$.

Complementaremos los elementos teóricos de la sección obteniendo la derivada de una función logarítmica con base a , **para conseguir esto es necesario efectuar un “cambio de base logarítmico”**

CAMBIO DE BASE LOGARÍTMICO

Sea la función $z = \log_a(x)$, si despejamos x obtenemos $x = a^z$ o $a^z = x$. Ahora aplicamos la función logaritmo natural a $x = a^z$ y obtenemos

$$\ln x = z \cdot \ln a \quad \text{o} \quad z = \frac{\ln x}{\ln a},$$

pero

$$z = \log_a(x),$$

por tanto,

$$z = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

DEFINICIÓN 1.4 (CAMBIO A BASE NATURAL DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA)

Si $a > 0$, entonces $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Rescribamos con base natural algunas funciones logarítmicas.

EJEMPLO 1.14 (CAMBIO DE BASE LOGARÍTMICO)

a. La función $f(x) = \log_7 x$, rescrita en base natural es $f(x) = \log_7 x = \frac{\ln x}{\ln 7}$.

b. La función $f(x) = \log_{12} x$, en base natural es $f(x) = \log_{12} x = \frac{\ln x}{\ln 12}$.

c. La función $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)} x$, se reescribe en base natural como $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)} x = \frac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$.

Ahora resultará sencillo obtener la función derivada de la función

$$f(x) = \log_a(x).$$

Si $f(x) = \log_a(x)$, entonces $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, derivando $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

PROPIEDAD 1.13 (DERIVADA DE UNA FUNCIÓN LOGARITMO DE CUALQUIER BASE)

Sea $f(x) = \log_a(x)$, si $a > 0$ y x es cualquier número real positivo, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

El cálculo de derivadas de funciones que contienen términos exponenciales y/o logarítmicos se efectúa de acuerdo con las reglas (teoremas) de derivación antes tratados, en particular, la regla de la cadena.

Si $u = u(x)$, para obtener las derivadas de las funciones $f = a^u$ y $f = \log_a u$ utilizaremos la “regla de la cadena”, entonces:

i. Si $f = a^u$, entonces $f' = u' a^u (\ln a)$.

ii. Si $f = \log_a u$, entonces $f' = \frac{u'}{(\ln a)u}$.

EJEMPLO 1.15 (DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES COMPUESTAS)

a. En $f(x) = e^{x^2+5x+2}$, sea $u(x) = x^2 + 5x + 2$,

entonces

$$u'(x) = 2x + 5 \text{ y } f'(x) = (2x + 5)e^{x^2+5x+2}.$$

b. En $f(x) = 8e^{3x-\text{sen}x}$, sea $u(x) = 3x - \text{sen}x$,

entonces

$$u'(x) = 3 - \text{cos}x \text{ y } f'(x) = 8(3 - \text{cos}x)e^{3x-\text{sen}x}.$$

c. En $f(x) = 2^{x^2 + \cos x}$, sea $u(x) = x^2 + \cos x$, entonces

$$u'(x) = 2x - \operatorname{sen} x \text{ y } f'(x) = (\ln 2) 2^{x^2 + \cos x} (2x - \operatorname{sen} x) = (\ln 2) (2x - \operatorname{sen} x) 2^{x^2 + \cos x}.$$

d. La función derivada de $f(x) = 10^{\cos x}$ es

$$f'(x) = (\ln(10)) 10^{\cos x} \frac{d}{dx}(\cos x) = -(\ln(10)) (\operatorname{sen} x) 10^{\cos x}.$$

e. En $f(x) = 4^{-\frac{x-5}{x^3+1}}$, sea $u(x) = -\frac{x-5}{x^3+1}$, entonces

$$u'(x) = -\frac{(x^3+1)(1) - (x-5)(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3 - 15x^2 - 1}{(x^3+1)^2},$$

por tanto,

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 15x^2 - 1}{(x^3+1)^2} \cdot 4^{-\frac{x-5}{x^3+1}} (\ln 4).$$

EJEMPLO 1.16 (DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS COMPUESTAS)

a. En $f(x) = \ln(x^3 - 5x + 10)$, sea $u(x) = x^3 - 5x + 10$, entonces

$$u'(x) = 3x^2 - 5 \text{ y } f'(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x + 10}.$$

b. En $f(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)^4$, sea $u(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, luego

$$u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ y } f'(x) = 4 \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

c. En $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}}$, sea $u(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, entonces

$$u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ y } f'(x) = 4 \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

d. En $F(x) = \log_5 \sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}}$, sean $f(x) = \log_5 u(x)$ y $u(x) = \sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, luego

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{(\ln 5)u(x)} \text{ y } u'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}}}.$$

Finalmente

$$F'(x) = \frac{\frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}}}}{(\ln 5)\sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{2(\ln 5)\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right)}.$$

EJEMPLO 1.17 (TRAZO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL)

Los valores extremos de $f(x) = xe^x$ se obtienen a partir de su función derivada,

$$f'(x) = xe^x + e^x(1) = e^x(x+1).$$

De $e^x(x+1) = 0$, obtenemos

$$x+1=0, \text{ de donde } x=-1.$$

El valor extremo asociado al número crítico

$$x=-1 \text{ es } f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

Intervalo	Número de prueba	$f'(x_p)$	Signo de $f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	$x_{p1} = -2$	$-\frac{1}{e^2}$	-	decrece
$(-1, +\infty)$	$x_{p2} = 0$	1	+	crece

De acuerdo con el “*criterio de la primera derivada*” el punto $m\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ es un mínimo relativo.

Concavidades:

de $f'(x) = e^x(x+1),$

obtenemos

$$f''(x) = e^x(1) + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$$

Si

$$f''(x) = (x+2)e^x = 0,$$

entonces

$$x=-2 \text{ y } f(-2) = -\frac{2}{e^2}, \text{ luego } I\left(-2, -\frac{1}{e}\right)$$

un punto de inflexión (verifique que $f'''(-2) \neq 0$).

Intervalo	Número de prueba	$f''(x_p)$	Signo de $f''(x)$	Concavidad de $f(x)$
$(-\infty, -2)$	$x_{p1} = -3$	$-\frac{1}{e^3}$	-	Hacia abajo.
$(-2, +\infty)$	$x_{p2} = 0$	2	+	Hacia arriba.

Los resultados previos justifican la *figura 1.17*.

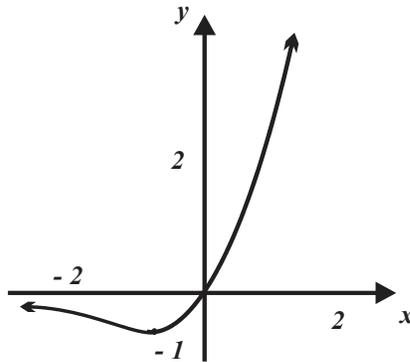


FIGURA 1.17

EJEMPLO 1.18 (TRAZO DE LA CURVA GAUSSIANA)

La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

se conoce como densidad de probabilidad normal estándar y se utiliza en los cursos de probabilidad.

Si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

entonces

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ y } f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) (x^2 - 1) \text{ (verifíquelo).}$$

De $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, obtenemos el número crítico $x = 0$, con valor extremo

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si

Intervalo	Número de prueba	$f'(x_p)$	Signo de $f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	$x_{p1} = -2$	$\frac{2}{e^2 \sqrt{2\pi}}$	+	crece
$(0, +\infty)$	$x_{p2} = 2$	$-\frac{2}{e^2 \sqrt{2\pi}}$	-	decrece

de acuerdo con el “*criterio de la primera derivada*” $M\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ es un máximo relativo.

De $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) (x^2 - 1) = 0$, obtenemos los números críticos $x = -1$ y $x = 1$,

con valores extremos

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \text{ y } f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}, \text{ respectivamente.}$$

De

Intervalo	Número de prueba	$f''(x_p)$	Signo de $f''(x)$	Concavidad de $f(x)$
$(-\infty, -1)$	$x_{p1} = -2$	$\frac{3}{e^2 \sqrt{2\pi}}$	-	hacia arriba
$(-1, 1)$	$x_{p2} = 0$	2	+	hacia abajo
$(1, +\infty)$	$x_{p2} = 2$	$\frac{3}{e^2 \sqrt{2\pi}}$	-	hacia arriba

obtenemos que los puntos

$$I_1 \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ y } I_2 \left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

son de inflexión.

Los resultados anteriores justifican la *figura 1.18*.

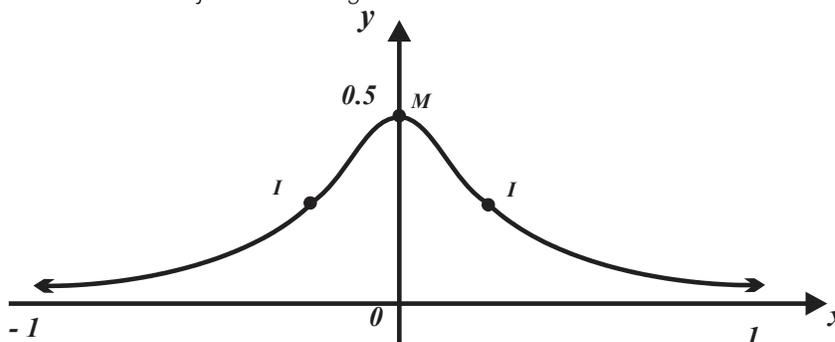


FIGURA 1.18

EJEMPLO 1.19 (DESINTEGRACIÓN DE ELEMENTOS)

a. En la naturaleza existen elementos en los que su masa disminuye hasta desintegrarse conforme transcurre el tiempo. Algunos de estos elementos se denominan radiactivos. Si M representa la masa de uno de estos elementos y t el tiempo transcurrido puede demostrarse que un modelo que describe el comportamiento es

$$M(t) = M_0 e^{-\lambda t}, \text{ donde } M_0 \text{ y } \lambda \text{ (letra griega lambda) son constantes.}$$

En tal caso se dice que M sigue la ley de decaimiento exponencial.

b. Si $t = 0$, $M(0) = M_0 e^{-\lambda(0)} = M_0$, M_0 es la cantidad inicial de masa. La constante λ , depende del elemento particular que se esté tratando, se conoce como constante de decaimiento.

c. La función

$$M'(t) = \frac{d}{dt} M(t) = -\lambda M_0 e^{-\lambda t}$$

indica la rapidez de desintegración de la masa del elemento radiactivo.

d. Si $M_0 = 10$ gramos, $\lambda = 0.2$ horas, entonces

$$M(t) = 10e^{-0.2t} \text{ y la función } M'(t) = 10e^{-0.2t}$$

indica la rapidez de desintegración instantánea en el tiempo t . Por ejemplo, si $t = 5$ horas, entonces la masa del elemento se está desintegrando a una rapidez de

$$M'(5) = 10e^{-0.2(5)} = \frac{10}{e} \text{ gramos / hora.}$$

EJEMPLO 1.22 (ENFRIAMIENTO DE UN OBJETO)

La función

$$T(t) = 74e^{\frac{1}{4} \ln\left(\frac{15}{37}\right)t} + 20 \quad (t \text{ en minutos})$$

describe la temperatura de una papa que inicialmente se encontraba a 94°C y se colocó en un recipiente con agua a temperatura constante de 20°C con el objeto de enfriarla.

La función

$$T'(t) = \frac{37}{2} \ln\left(\frac{15}{37}\right) e^{\frac{1}{4} \ln\left(\frac{15}{37}\right)t}$$

describe la rapidez de cambio de la temperatura de la papa en el instante t .

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 1.2 ▼

1. Simplifique.

a. $f(x) = e^{5 \ln x}$.

b. $f(x) = e^{3 \ln x}$.

c. $f(x) = e^{\frac{1}{4} \ln x}$.

d. $f(x) = e^{-\frac{5}{4} \ln x}$.

e. $f(x) = e^{-3 \ln x}$.

f. $f(x) = e^{x \ln \frac{1}{2}}$.

2. Simplifique.

a. $f(x) = 4^{2 \log_4 x}$.

b. $f(x) = 8^{3 \log_8 x}$.

c. $f(x) = 8^{\frac{1}{3} \log_8 x}$.

d. $f(x) = 6^{\frac{1}{4} \log_6 x}$.

e. $f(x) = 9^{\frac{2}{3} \log_9 x}$.

f. $f(x) = 7^{-2 \log_7 x}$.

3. Simplifique.

a. $f(t) = e^{t \ln \frac{1}{4}}$.

b. $f(t) = e^{-t \ln \frac{2}{3}}$.

c. $f(t) = e^{\frac{1}{5} t \ln 8}$.

d. $f(x) = e^{-6x \ln \frac{2}{3}}$.

4. Rescriba en base natural y luego obtenga la función derivada.

a. $f(x) = 4^x$.

b. $f(x) = x^x$.

c. $f(x) = x^{\sin x}$.

d. $f(x) = (\cos x)^x$.

e. $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$.

f. $f(x) = x^2 3^x$.

5. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = 4e^x$.

b. $f(x) = e^{x^2 + 2x + 3}$.

c. $f(x) = e^{-3x + x^3}$.

d. $f(x) = e^{1 - \cos x}$.

e. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

f. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

6. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = x^4 e^{2x}$.

b. $f(x) = e^{-x} \sin 2x$.

c. $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$.

d. $f(x) = \frac{3 - e^x}{4 + e^x}$.

e. $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = x^4 e^{2x}$.

b. $f(x) = e^{2x} \cos 3x$.

c. $f(x) = (3x - \sqrt{x}) e^{2x}$.

d. $f(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}}$.

e. $f(x) = \frac{1 + x + e^x}{x - e^{4x}}$.

8. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 3}}$.

b. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - x}{x - e^{-x}}}$.

c. $f(x) = \text{sen}(e^x + 3x)$.

d. $f(x) = \text{tg}\left(\frac{e^x}{x}\right)$.

e. $f(x) = \cos\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$.

9. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = \ln(x^3 + 2x^2 + x - 2)$.

b. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$.

c. $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}$.

d. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

e. $f(x) = \ln\left(\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right)$.

f. $f(x) = \ln(1 + 3\text{sen } 2x)$.

10. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = \ln(x^4 + 6e^x)$.

b. $f(x) = \ln(3 + \ln x)$.

c. $f(x) = \ln(1 - \text{tg } 3x)$.

d. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$.

e. $f(x) = \ln(e^x + x - (e^x - 1))$.

11. Obtenga la función derivada.

a.

$$f(x) = (4x^2 + 5x) \ln(x^3 + 2x^2 + x - 2).$$

b. $f(x) = (\text{sen}^3 x) \ln(x - 1)$.

c. $f(x) = e^{5x} \ln(x + \cos x)$.

d. $f(x) = x^6 \ln(x^6 - e^{-x})$.

e. $f(x) = \frac{1}{(x+3) \ln(x+3)}$.

12. Obtenga la función derivada.

a. $f(x) = \frac{1}{x^3 \ln(\cos x)}$.

b. $f(x) = (x^3 + \ln x)^3$.

c. $f(x) = \ln[(x + \text{sen } x)(2x^2 - \cos x)]$.

d. $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\ln(x + 1)}$.

e. $f(x) = \frac{e^{2x} + \ln(5x + 1)}{e^{2x} - \ln(3x)}$.

13. Determine la ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada a:

a. $f(x) = 3e^x$ si $x = 1$.

b. $f(x) = xe^{2x}$ si $x = 2$.

c. $f(x) = e^x(x - 1)$ si $x = 1$.

d. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$ si $x = 1$.

14. Determine la ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada a:

a. $f(x) = x \ln(x - 2)$ si $x = 1$.

b. $f(x) = x^2 - \ln x$ si $x = 1$.

c. $f(x) = \ln(x + 3) - 2x$ si $x = -2$.

d. $f(x) = \frac{x}{x + \ln 2x}$ si $x = \frac{1}{2}$.

15. Determine la ecuación de la recta tangente.

a. $f(x) = \log_3 x$ en $A(27, 3)$.

b. $f(x) = x - \log_2 x$ en $B(4, 2)$.

16. Determine los números extremos y decida si son máximos, mínimos o inflexiones.

a. $f(x) = xe^{-2x}$.

b. $f(x) = x^2e^{-2x}$.

c. $f(x) = x^2e^x$.

d. $f(x) = xe^x$.

17. Determine donde es creciente, decreciente, dónde es cóncava hacia arriba, hacia abajo. Halle los extremos relativos y los puntos de inflexión.

a. $f(x) = (\ln x)^2$.

b. $f(x) = x \ln x$.

c. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$.

18. Una taza con chocolate se enfrió de 92°C a 50°C en 12 minutos en una habitación que se encontraba a 22°C . Suponga que la ley de enfriamiento de Newton es aplicable y el modelo que describe el comportamiento de la temperatura del chocolate en términos del tiempo es $T(t) = 70e^{\frac{1}{12}\ln\frac{2}{5}t} + 22$. Obtenga la rapidez de cambio de la temperatura del chocolate a los 18 minutos.

19. Un pollo se sacó del horno a 80°C y se enfrió a 40°C en 15 minutos en una habitación que se encontraba a 20°C . La ley de enfriamiento de Newton es aplicable y que el modelo que describe el comportamiento de la temperatura del pollo en términos del tiempo

$$T(t) = 60e^{\frac{1}{15}\ln\frac{1}{3}t} + 20.$$

Obtenga la rapidez de cambio de la temperatura del pollo a los 20 minutos.

20. El motor de un camión se calentó a 70°C por lo que inmediatamente se introdujo a un cuarto que se encontraba a una temperatura de 10°C . La temperatura del motor del camión bajo a 30°C en un lapso de 30 minutos. Suponga que la ley de enfriamiento de Newton es aplicable y que el modelo que describe el comportamiento de la temperatura del motor del camión en función del tiempo es $T(t) = 60e^{\frac{1}{30}\ln\frac{1}{3}t} + 10$. Obtenga la rapidez con que está cambiando la temperatura del camión a los 5 minutos de introducido en el cuarto.

21. Se invierten 100,000 pesos al 8% de interés anual capitalizable en forma continua. Si el comportamiento del principal está dado por la función $C(t) = 100,000e^{0.08t}$, determine la función que describe el comportamiento del cambio instantáneo del principal $P = 100,000$ en forma continua.

22. Se invierten 1000,000 pesos al 4% de interés anual capitalizable en forma continua. La función que describe el comportamiento del principal 1000,000 pesos en forma continua es $C(t) = 1000,000e^{0.04t}$. Determine la función que describe el comportamiento del cambio instantáneo del principal $P = 1000,000$ en forma continua.

ACTIVIDADES 1.2

1. Interés compuesto continuo

Suponga que un capital de P pesos se invierte en una cuenta que produce una tasa de interés r anual. Sea A_n el monto total en la cuenta a los n años.

a. Complete la siguiente tabla y establezca que al término de n años el monto en la cuenta es

$$A_n = P(1+r)^n$$

pesos.

Tiempo en años	Monto en la cuenta
1	
2	
3	
⋮	
n	

b. Suponga que la tasa de interés anual r se divide en k periodos, ¿cuál es la tasa de interés por periodo? ¿Cuántos periodos de estos existen en $t = n$ años?

c. ¿Cómo cambia la fórmula obtenida en a.?

d. Suponga que k (el número de periodos por años se incrementa indefinidamente, es decir el interés se capitaliza en forma continua) y evalúe $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$, (tenga en cuenta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7182818284 59\dots).$$

e. Determine $A(t)$.

2. Identificación de una función exponencial a partir de una tabla.

a. Complete la tabla:

x	$f(x)$	$\frac{f(x+1)}{f(x)}$
-3	$\frac{5}{8}$	
-2	$\frac{5}{4}$	
-1	$\frac{5}{2}$	
0	5	
1	10	
2	20	
3	40	

b. ¿En qué factor a aumentan las imágenes $f(x)$ y $f(x+1)$?

c. ¿Cuál es la razón $b = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ de las imágenes $f(x)$ y $f(x+1)$?

d. Luego, ¿la regla de correspondencia es?

e. Generalice las observaciones anteriores.

3. Patrón para derivar.

Si $f(x) = e^{ax}$, pruebe que $\frac{d^{(n)}f}{dx} = a^n e^{ax}$.

4. Patrón para derivar

Si $f(x) = \ln x$, pruebe que

$$\frac{d^{(n)}f}{dx} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

donde

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

5. Derivada de $f(x) = x^n$ donde n es un número real.

En los cursos de cálculo diferencial se prueba que: si $f(x) = x^n$ donde n es un

número racional, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

a. Escriba $f(x) = x^n$ en términos de la base natural e .

b. Utilice la regla de la cadena y pruebe que $f'(x) = nx^{n-1}$, donde n es un número real.

6. Derivada de las funciones hiperbólicas

Se definen las funciones hiperbólicas

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$g(x) = \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$h(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$i(x) = \operatorname{ctgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$j(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$k(x) = \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

verifique:

$$f'(x) = \operatorname{cosh} x,$$

$$g'(x) = \operatorname{senh} x, \quad h'(x) = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$i'(x) = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$j'(x) = -\operatorname{sech} x \cdot \operatorname{tgh} x$$

$$\text{y } k'(x) = -\operatorname{csch} x \cdot \operatorname{ctgh} x.$$

7. Derivación logarítmica

Sean $u_1(x)$, $u_2(x)$, \dots y $u_n(x)$

funciones derivables y positivas

$$F(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \cdot u_n(x).$$

a. Aplique la función $f(x) = \ln x$.

b. Aplique las propiedades de la función $f(x) = \ln x$ y exprese el producto de la derecha como una suma de funciones.

c. Derive ambos miembros de la función.

d. Pruebe que

$$F'(x) = F(x) \left[\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} + \dots + \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} \right]$$

e. Siga las ideas de los incisos anteriores y pruebe que si $F(x) = \frac{u_1(x)}{u_2(x)}$ es

derivable, entonces

$$F'(x) = F(x) \left[\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} - \frac{u_2'(x)}{u_2(x)} \right].$$

8. Funciones logísticas

En algunos textos de matemáticas se define la función logística como sigue:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \quad \text{o} \quad f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}},$$

donde a , b , c y k son constantes positivas y $b < 1$.

a. Evalúe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Determine $f'(x)$.

c. ¿Cuál es el máximo?, ¿el mínimo?

d. ¿En qué condiciones de b o k la función $f(x)$ es creciente?

e. ¿En qué condiciones de b o k , la función $f(x)$ es decreciente?

2

LA INTEGRAL DEFINIDA

PROPÓSITOS

Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.

CONTENIDO

1. El área bajo una curva, la integral definida
2. La función área y el Teorema Fundamental del Cálculo
3. Aplicaciones de la integral definida

2.1

ÁREA BAJO UNA CURVA E INTEGRAL DEFINIDA

APRENDIZAJES

El alumno:

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos. 2. Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$ y calcula con ella el área en el intervalo $[a, b]$. 3. Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de | <ol style="list-style-type: none"> áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos, y reconoce esta aproximación como un método general. 4. Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = kx^n$ como un límite de sumas infinitas para $n = 1, 2$ o 3. 5. Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito. |
|--|--|

TEMÁTICA

El área bajo una curva:

- i. El área bajo la gráfica de una función constante o lineal.
- ii. Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos.

El área de una región del plano cartesiano se interpreta de acuerdo con las unidades de las variables que definen los ejes coordenados. El *ejemplo 2.1* incluye algunas interpretaciones del área asociada a una región rectangular (sin embargo, la región puede tener otra forma) en diversos campos del conocimiento.

Para reflexionar

¿Significan lo mismo área y superficie?

¿Todos los sistemas cartesianos son de la forma $x - y$?

Frecuentemente se asocian el mismo significado a las palabras superficie y área, sin embargo, en matemáticas, a pesar de que ambos conceptos están estrechamente ligados difieren en significado. La palabra superficie se asocia a la forma y extensión de una región, mientras que a la palabra área se relaciona con la medida de la superficie. Para medir una superficie se toma como referencia una superficie cuadrada en la que tanto a la base como a la altura tienen como longitud la unidad.

EJEMPLO 2.1 (INTERPRETACIONES DEL ÁREA DE UNA REGIÓN)

Si suponemos que las variables en consideración tienen el signo apropiado:

- a. En un diagrama $x-y$ al producto $x \cdot y$, se le asocian unidades de área (considerando que ambas variables representan longitudes).
- b. En un diagrama tiempo t en (segundos) contra velocidad v (en $m \cdot s^{-1}$), el producto $v \cdot t$ tiene unidades de longitud.
- c. En un diagrama de tiempo t (en segundos) contra aceleración a en ($m \cdot s^{-2}$), el producto $a \cdot t$ tiene unidades $m \cdot s^{-1}$, es decir, de velocidad.
- d. En un diagrama de distancia d en (metros) contra trabajo W (en $joules \cdot m^{-1}$) el producto $F \cdot d$ como unidades los Newton que son unidades de fuerza.
- e. En un diagrama cartesiano de longitud l en (metros) contra densidad lineal ρ (en $Kg \cdot m^{-1}$) el producto $\rho \cdot l$ tiene unidades de kilogramos, es decir, de masa.
- f. En un diagrama cartesiano en el que q representa el número de unidades que un fabricante venderá y p el precio por unidad, el producto $p \cdot q$ representa el monto de las ventas del fabricante.
- g. En un diagrama cartesiano de flujo f (en metros cúbicos por hora) contra tiempo t (en horas) el producto $f \cdot t$ tiene unidades de volumen, es decir, de metros cúbicos.
- h. En un diagrama cartesiano en el que A representa el número de unidades de área y l unidades de longitud el producto $A \cdot l$ representa el volumen.

La figura 2.1 ilustra parte de las ideas antes descritas.

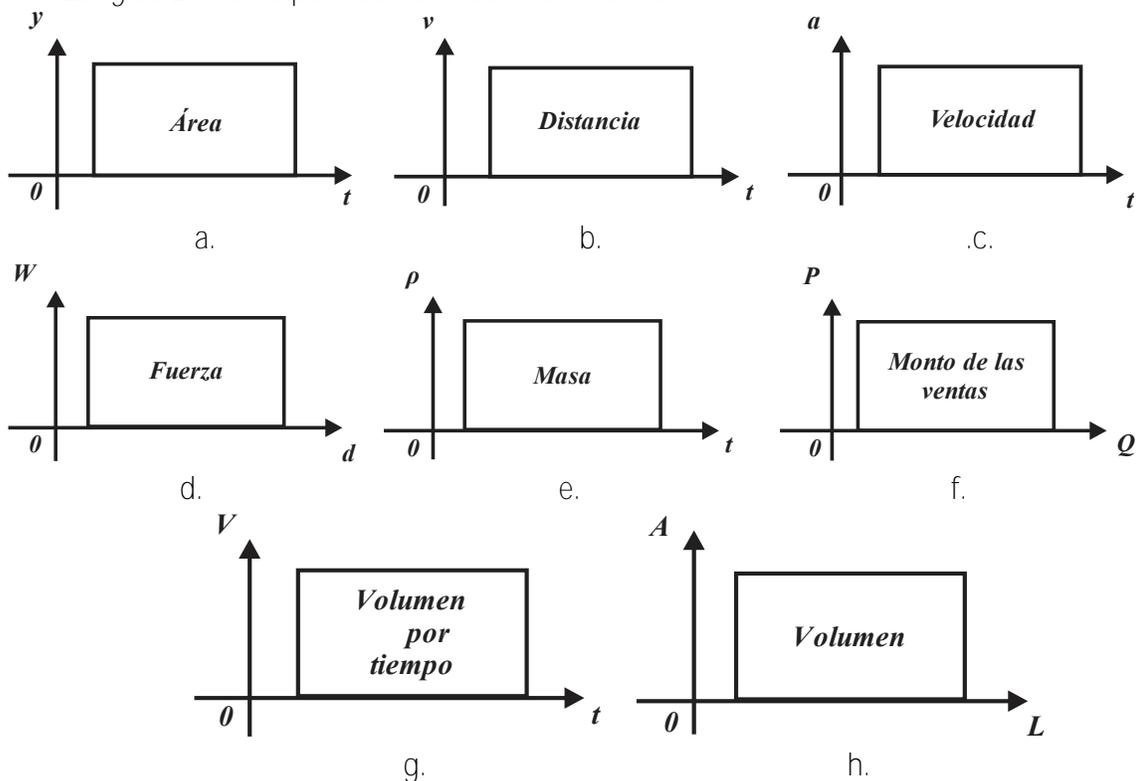


FIGURA 2.1

Para reflexionar

¿Puede proporcionar e interpretar otros sistemas cartesianos en los que el “área asociado a una región tenga otro significado?

DEFINICIÓN 2.1 (UNIDAD DE ÁREA)

- a. La unidad de área, es el área contenida en una superficie rectangular (cuadrado) de base y altura iguales a una unidad de longitud.
- b. El área de una superficie es el número de unidades de área que contiene.
- c. El área de una superficie rectangular de base a y altura h es $A = bh$ unidades cuadradas.

Utilizando la *definición 2.1 c.* se pueden establecer relaciones para determinar el área A de otras regiones planas.

EJEMPLO 2.2 (ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES)

- a. Descomposición de un rectángulo de área $A = bh$ en dos triángulos congruentes de área

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

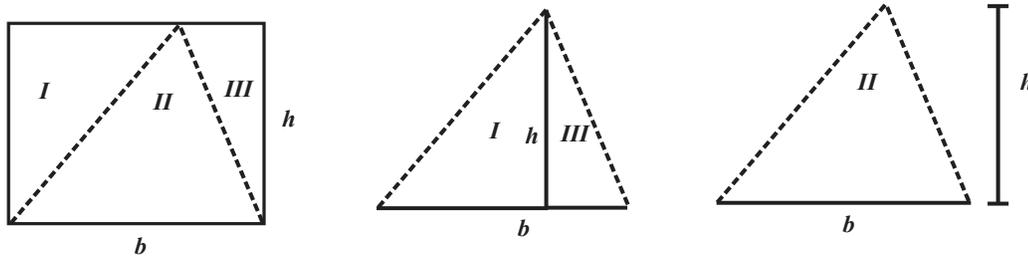


FIGURA 2.2

- b. Un rectángulo de área $A = (b + B)h$ puede descomponerse en dos trapecios congruentes, ambos de área

$$A = \frac{1}{2}(b + B)h$$

cada uno.

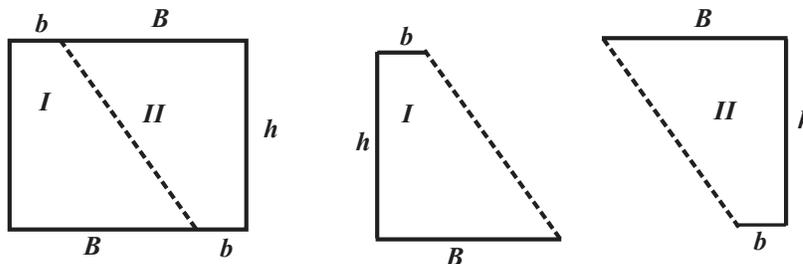


FIGURA 2.3

c. Un hexágono regular puede descomponerse en seis triángulos congruentes y por ende, es fácil calcular su área, la misma idea es aplicable en el cálculo de áreas de polígonos regulares.

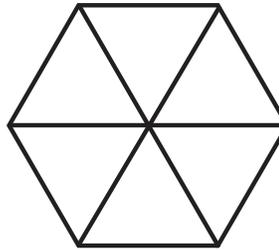


FIGURA 2.4

Áreas de superficies “de mayor complejidad” pueden calcularse utilizando procesos infinitos.

EJEMPLO 2.3 (ÁREA DE UN CÍRCULO)

Para justificar la “fórmula” para el cálculo del área A de un círculo de radio de longitud r , se considera el proceso infinito.

Se divide el círculo en sectores circulares congruentes (tantos como sea posible), posteriormente se acomodan de manera que “aproximen un rectángulo”, vea la figura 2.5. Puesto que el perímetro del círculo es $2\pi r$, la base del “rectángulo aproximado” mide

$$\frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r,$$

su altura mide r unidades, entonces el área del círculo es

$$A = (\pi r)(r) = \pi r^2.$$

Si el círculo se descompone en sectores circulares cada vez más pequeños, la aproximación a un rectángulo es mejor y su área se aproxima más al número

$$\pi r^2.$$

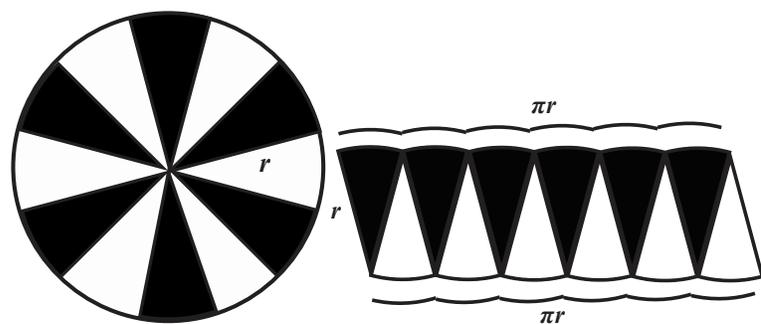


FIGURA 2.5

Para reflexionar

¿Puede describir un proceso infinito para obtener la longitud de una circunferencia utilizando polígonos regulares?

Determinar el área de regiones limitada por curvas de mayor complejidad (como pueden ser arcos de parábolas, sectores de elipses, sectores de hipérbolas u otras curvas) puede resultar imposible o muy complejo utilizando los métodos antes señalados, sin embargo, es el propósito de la presente sección el construir los elementos y los métodos a este respecto, y así avanzar en el cálculo de áreas de regiones del plano cartesiano.

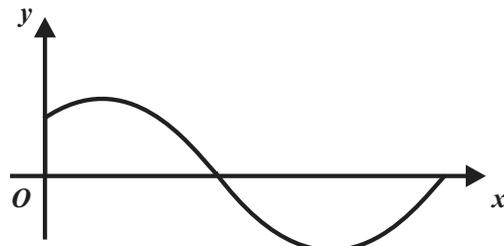


FIGURA 2.6

Es posible construir funciones que describen el comportamiento del área de una región en el plano cartesiano.

EJEMPLO 2.4 (ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES)

a. El rectángulo de la *figura 2.7* tiene base de longitud $x = t$ y la longitud de la altura es h , por tanto, la función

$$A(t) = ht, \text{ siempre que } h \geq 0 \text{ y } t \geq 0,$$

proporciona el área de la región.

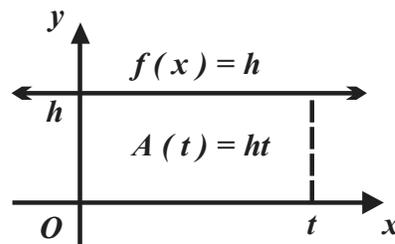


FIGURA 2.7

b. El triángulo de la *figura 2.8* tiene base de longitud $x = t$ su altura mide $f(t) = mt$, entonces la función

$$A(t) = \frac{1}{2}mt^2 \text{ siempre que } m \geq 0 \text{ y } t \geq 0$$

proporciona el área de la región rectangular.

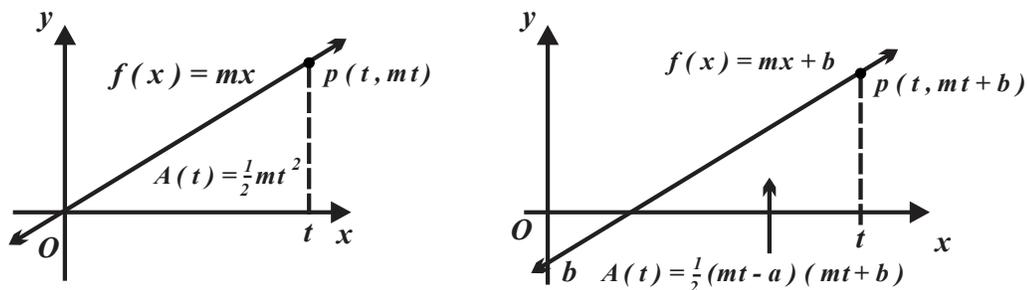


FIGURA 2.8

c. El trapecio de la *figura 2.9* tiene base menor de longitud b , base mayor $f(t) = mt + b$ y altura de longitud $x = t$, entonces la función $A(t) = \frac{1}{2}(b + mt + b)t = \frac{1}{2}mt^2 + bt$ con $t \geq 0$, proporciona el área de la región.

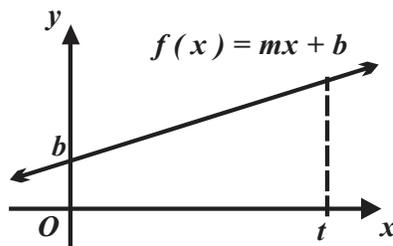


FIGURA 2.9

EJEMPLO 2.5 (ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES BIS)

a. La función que proporciona el área de la región rectangular de la *figura 2.10* cuya base está definida por el intervalo $[a, t]$ es $A(t) = h(t - a)$ unidades cuadradas (siempre que $h > 0$).

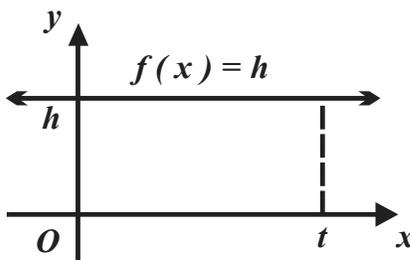


FIGURA 2.10

b. La función que determina el área de la región triangular de base sobre el intervalo $[a, t]$, vea la *figura 2.11*, se construye como sigue: observe que la línea recta asociada a la función $f(x) = mx + b$

interseca al eje x cuando $x = a$, es decir, si $f(a) = 0$, entonces $b = -ma$; puesto que $A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$, entonces $A(t) = \frac{1}{2}(t-a)(mt+b)$ unidades de área ($t > a$).

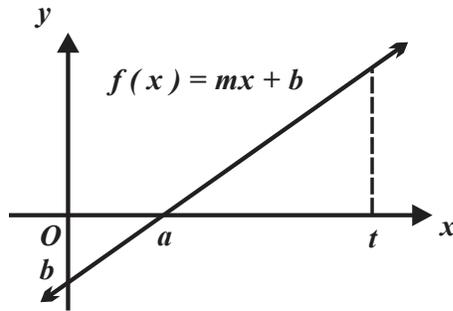


FIGURA 2.11

c. La función que proporciona el área de la región trapezoidal cuya altura está definida por el intervalo $[a, t]$, misma que se muestra en la figura 2.12, se construye considerando que:

(observe que la línea recta de ecuación $f(x) = mx + b$ interseca al eje x en el número $x = -\frac{b}{m}$):

- i. su base menor mide $f(a) = ma + b$,
- ii. su base mayor $f(t) = mt + b$ y
- iii. su altura mide $t - a$ unidades de longitud.

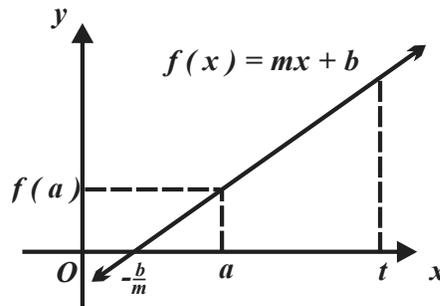


FIGURA 2.12

Puesto que el área de un trapecio se obtiene mediante el producto de la semisuma de las longitudes de las bases y la altura:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \frac{1}{2}[(ma + b) + (mt + b)](t - a) = \frac{1}{2}[(ma + mt) + (b + b)](t - a) \\
 &= \frac{1}{2}[m(t + a) + 2b](t - a) = \frac{1}{2}[m(t + a)(t - a) + 2b(t - a)] \\
 &= \frac{1}{2}m(t^2 - a^2) + b(t - a) \text{ unidades cuadradas } (t > a).
 \end{aligned}$$

La tabla 2.1 resume las “funciones área” obtenidas en los ejemplos 2.4 y 2.5.

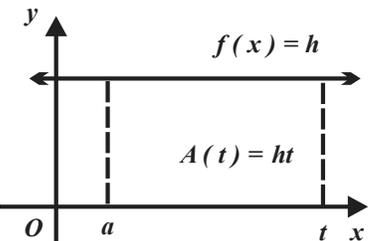
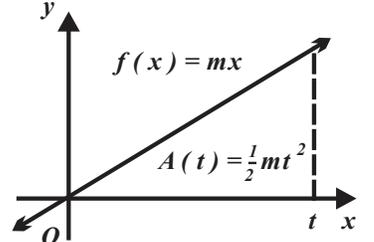
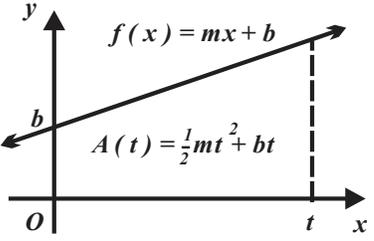
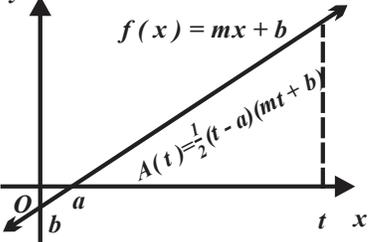
FIGURA	FUNCIÓN	FUNCIÓN ÁREA	DERIVADA DE LA FUNCIÓN ÁREA
	$f(x) = h$	$A(t) = ht$	$A'(t) = h$
	$f(x) = mx$	$A(t) = \frac{1}{2}mt^2$	$A'(t) = mt$
	$f(x) = mx + b$	$A(t) = \frac{1}{2}mt^2 + bt$	$A'(t) = mt + b$
	$f(x) = mx + b$	$A(t) = \frac{1}{2}(t-a)(mt+b)$	$A'(t) = mt + b$

TABLA 2.1

Para reflexionar

¿Puede identificar una relación entre la función que limita a la región y la derivada de la función área?

El siguiente paso consiste en calcular áreas de regiones en la que uno de los “lados” es una sección la curva asociada a una función. La figura 2.13 muestra una aproximación al área $A(R)$ (región con las condiciones antes señaladas, utilizando rectángulos.

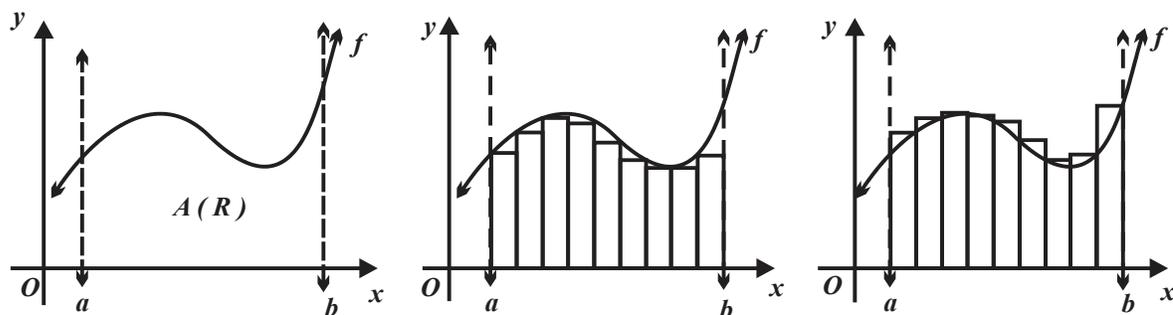


FIGURA 2.13

Para Reflexionar

Respecto a la *figura 2.13*, del centro ¿qué ocurre con el “**área faltante**” al incrementarse el número de rectángulos inscritos? En la figura de la derecha, ¿qué ocurre con el “**área sobrante**”, si se incrementa el número de rectángulos inscritos?

EJEMPLO 2.6

En la *figura 2.14* se utilizan dos rectángulos para aproximar el área $A(R)$ de la región R del plano cartesiano definida por: la curva asociada a $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2$, los ejes coordenados y la línea recta de ecuación $x=6$.

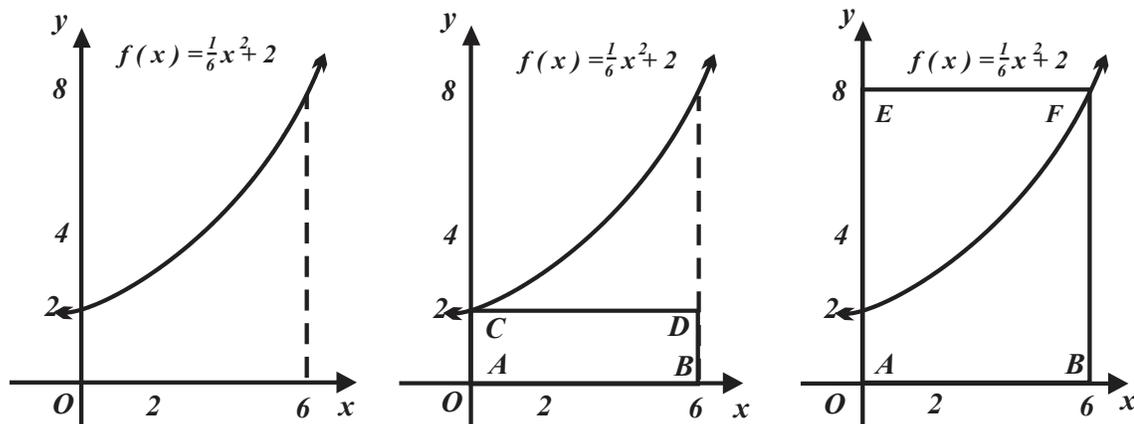


FIGURA 2.14

En una primera aproximación, el área de la región R se encuentra entre 12 y 48 unidades cuadradas (puesto que el área del rectángulo inscrito (que representaremos por s $ABCD$) tiene base 6 y altura 2); y área del rectángulo $ABEF$ que la circunscribe (que representaremos por S y tiene base 6 y altura 8) es 48, así $12 < A(R) < 48 \text{ u}^2$. Si utilizamos dos rectángulos como aproximación, ésta mejora, en la *figura 2.15* la suma de las áreas de los rectángulos inscritos:

$$s = 3f(0) + 3f(3) = (3)(2) + (3)(3.5) = 16.5 \text{ u}^2$$

y

$$S = 3f(3) + 3f(6) = 3(3.5) + 3(8) = 34.5 \text{ u}^2.$$

El área de la región R se encuentra entre los números $16.5 < A(R) < 34.5 \text{ u}^2$.

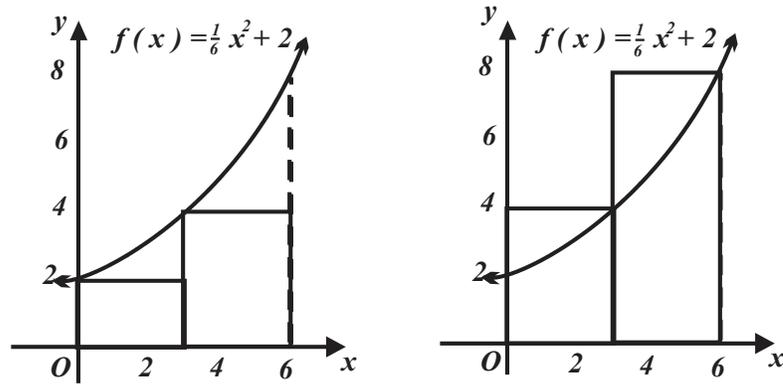


FIGURA 2.15

Vuelve a mejorar la aproximación al área si utilizamos tres rectángulos, en la figura 2.16,

$$s = 2f(0) + 2f(2) + 2f(4) = (2)(2) + (2)\left(\frac{8}{3}\right) + (2)\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{56}{3} \text{ u}^2$$

y

$$S = 2f(2) + 2f(4) + 2f(6) = 2\left(\frac{8}{3}\right) + 2\left(\frac{14}{3}\right) + 2(8) = \frac{92}{3} \text{ u}^2,$$

el área de la región se encuentra entre $18.\bar{6} < A(R) < 30.\bar{6} \text{ u}^2$.

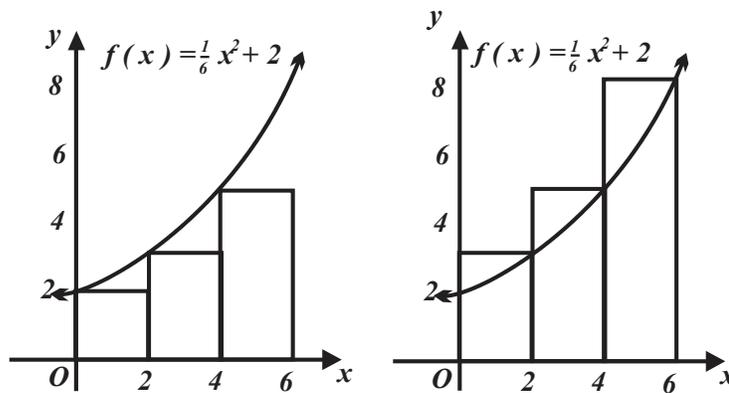


FIGURA 2.16

Obtenemos una mejor aproximación de $A(R)$ si utilizamos un número mayor de rectángulos. A continuación, generalizaremos el proceso utilizado antes. La figura 2.17 muestra que la región R está limitada por: en su parte superior por la curva asociada a una función (f que es continua y no negativa), en su parte inferior por el eje x y a los lados por las líneas rectas verticales de

ecuaciones $x = a$ y $x = b$ respectivamente, para aproximar su área utilizando n rectángulos de igual base, subdividimos el intervalo $[a , b]$ en los n subintervalos:

$$[x_0 , x_1], [x_1 , x_2], \dots [x_{n-1} , x_n], \text{ todos con longitud } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Puesto que los subintervalos tienen igual longitud, los puntos de sus extremos son:

$$x_0 = a + 0\Delta x, x_1 = a + 1\Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x,$$

vea las figuras 2.17 y 2.18.

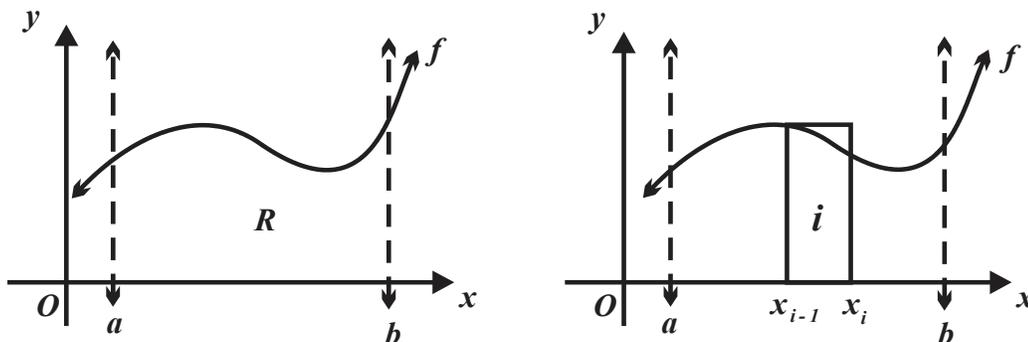


FIGURA 2.17

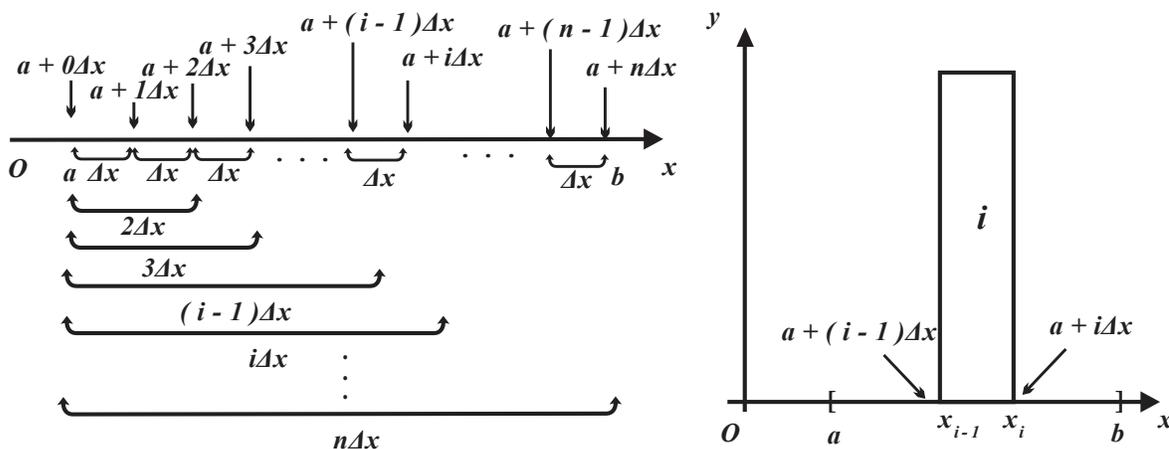


FIGURA 2.18

Por otra parte, de acuerdo con el teorema de Weierstrass (del máximo y el mínimo) la función f alcanza su valor mínimo y su valor máximo en cada uno de los subintervalos

$$[x_0 , x_1], [x_1 , x_2], \dots [x_{n-1} , x_n] \text{ de } [a , b],$$

tomemos el intervalo i -ésimo, es decir, el intervalo $[x_{i-1} , x_i]$ y representemos por $f(m_i)$ al valor mínimo y por $f(M_i)$ al valor máximo de la función f .

La figura 2.19 muestra dos rectángulos, el rectángulo inscrito (contenido en la región R que tiene área $f(m_i)\Delta x$) y el rectángulo circunscrito (una parte de él se encuentra fuera de la región R), tiene área $f(M_i)\Delta x$, por tanto,

$$f(m_i)\Delta x \leq f(M_i)\Delta x.$$

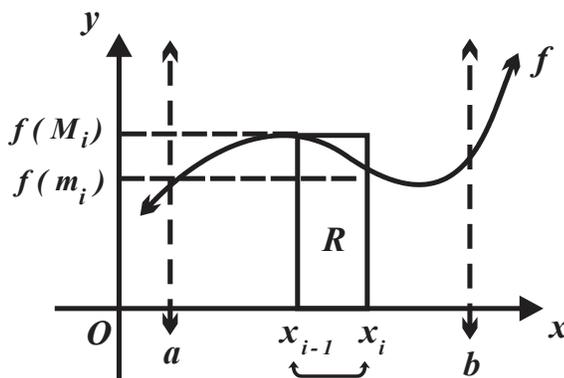


FIGURA 2.19

DEFINICIÓN 2.2 (SUMA INFERIOR Y SUMA SUPERIOR)

Sean:

- a. f una función acotada y continua definida sobre el intervalo $[a, b]$,
- b. Los subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ajenos entre, y que al unirlos se obtiene el intervalo $[a, b]$.
- c. $f(m_i)$ el valor mínimo y $f(M_i)$ el valor máximo de f sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces:

i. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos es

$$s(n) = f(m_1)\Delta x_1 + f(m_2)\Delta x_2 + \dots + f(m_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x_i$$

y recibe el nombre de suma inferior.

ii. La suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es

$$S(n) = f(M_1)\Delta x_1 + f(M_2)\Delta x_2 + \dots + f(M_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i$$

y recibe el nombre de suma superior.

Como consecuencia de la definición 2.2 tenemos

$$s(n) \leq A(R) \leq S(n),$$

es decir, "la suma de las áreas de los rectángulos inscritos es menor o igual que el área de la región, misma que es menor a la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos vea la figura 2.20.

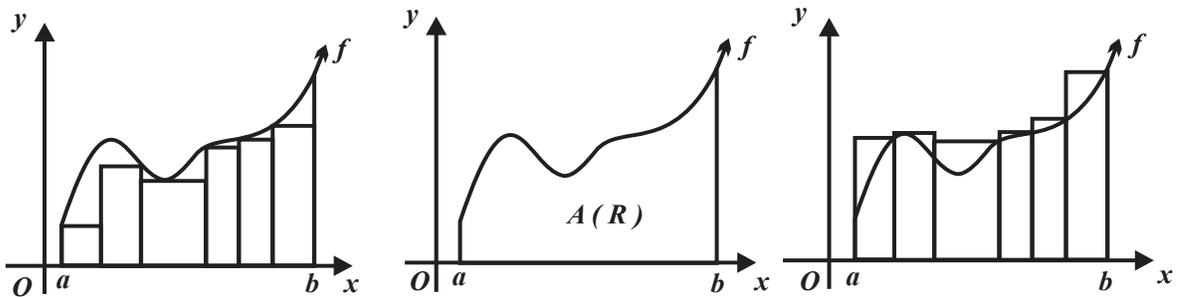


FIGURA 2.20

Para reflexionar

¿Es posible la relación $s(n) \geq A(R) \geq S(n)$?, explique.

EJEMPLO 2.7 (CÁLCULO DE SUMAS SUPERIORES E INFERIORES)

Determinemos las sumas $s(n)$ y $S(n)$ de la región del plano cartesiano limitada por el eje x , la curva asociada a $f(x) = x + 2$ y las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$.

Dividimos el intervalo $[0, 4]$ en n subintervalos congruentes, todos ellos de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n},$$

los intervalos son $\left[0, \frac{4}{n}\right], \left[\frac{4}{n}, \frac{8}{n}\right], \left[\frac{8}{n}, \frac{12}{n}\right] \dots \left[\frac{(n-1)4}{n}, 4\right]$.

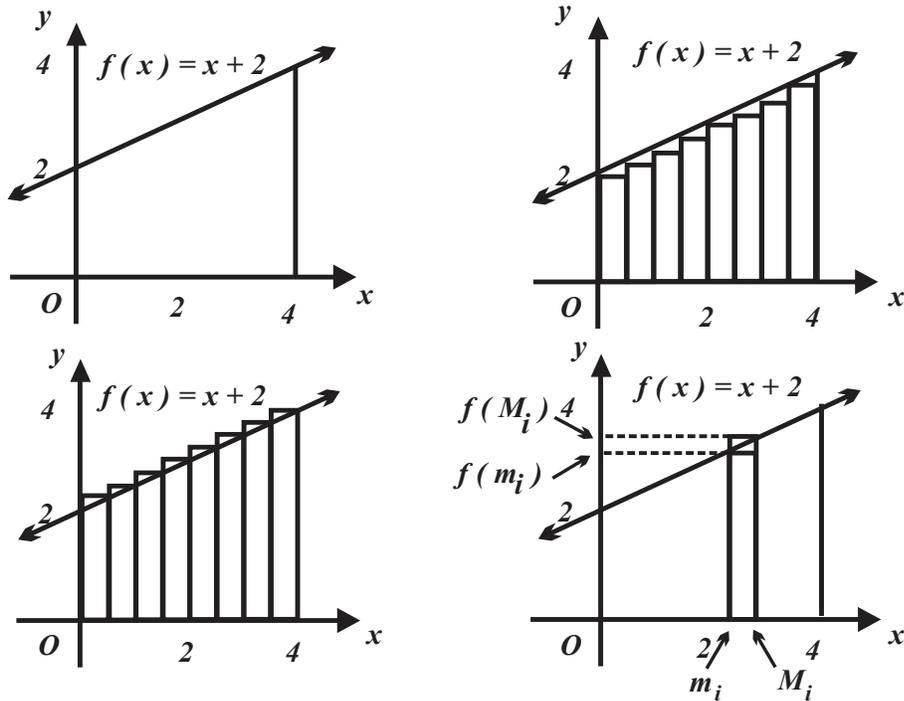


FIGURA 2.21

Los valores mínimos de la función $f(x) = x + 2$ (sobre los intervalos), se presentan en los números extremos izquierdos, y los valores máximos en los números que son extremos derechos de los intervalos.

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{4}{n}, m_3 = \frac{8}{n}, \text{ etc., en general } m_i = 0 + (i-1)\frac{4}{n} = \frac{4}{n}(i-1)$$

$$M_1 = \frac{4}{n}, M_2 = \frac{8}{n}, M_3 = \frac{12}{n}, \text{ etc., en general } M_i = \frac{4}{n}i.$$

Entonces, evaluamos la función $f(x) = x + 2$ en $m_i = \frac{4}{n}(i-1)$ y $M_i = \frac{4}{n}i$, obtenemos

$$f(m_i) = f\left(\frac{4}{n}(i-1)\right) = \left(\frac{4}{n}(i-1)\right) + 2 = \frac{4}{n}i - \frac{4}{n} + 2$$

y

$$f(M_i) = f\left(\frac{4}{n}i\right) = \frac{4}{n}i + 2.$$

La suma inferior es

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{4}{n}i - \frac{4}{n} + 2 \right] \left(\frac{4}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{16}{n^2}i - \frac{16}{n^2} + \frac{8}{n} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \frac{16}{n^2}i - \sum_{i=1}^n \frac{16}{n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{8}{n} \\ &= \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1. \end{aligned}$$

La suma superior es

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{4}{n}i + 2 \right] \left(\frac{4}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{16}{n^2}i + \frac{8}{n} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{16}{n^2}i + \sum_{i=1}^n \frac{8}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1.$$

Para reflexionar

¿Cómo justifica la afirmación: Los valores extremos de $f(x) = x + 2$ se presentan en los números que extremos izquierdos y en los números que son extremos derechos de los subintervalos de la forma

$$[x_{i-1}, x_i]?$$

EJEMPLO 2.8 (CÁLCULO DE SUMAS SUPERIORES E INFERIORES)

Para determinar $s(n)$ y $S(n)$ de la región del plano cartesiano, vea la *figura 2.22.*, limitada por los ejes coordenados y la curva asociada a $f(x) = 6 - x$.

i. Dividimos el intervalo $[0, 6]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{n} = \frac{6}{n}$, por tanto,

los intervalos son $\left[0, \frac{6}{n}\right], \left[\frac{6}{n}, \frac{12}{n}\right], \left[\frac{12}{n}, \frac{18}{n}\right] \dots \left[(n-1)\frac{6}{n}, 6\right]$.

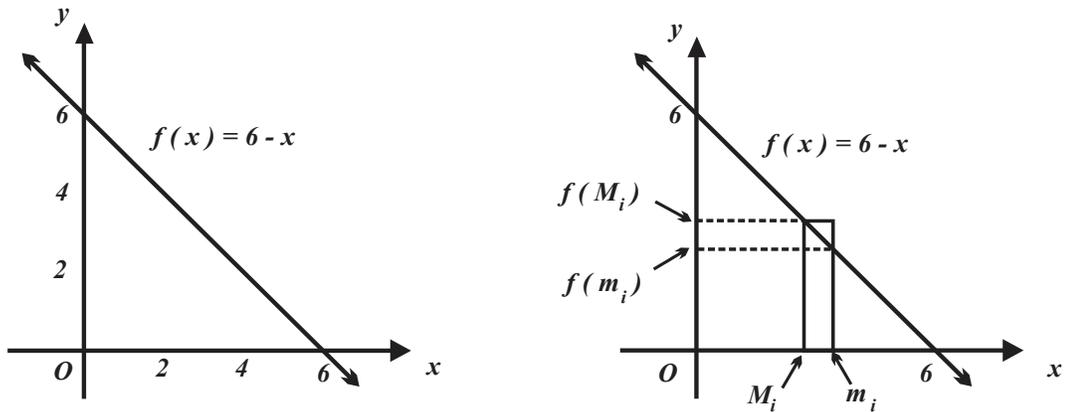


FIGURA 2.22

Los valores máximos de la función $f(x) = 6 - x$ (sobre los intervalos), se presentan en los extremos izquierdos y sus mínimos en extremos derechos de los intervalos

$$\left[0, \frac{6}{n}\right], \left[\frac{6}{n}, \frac{12}{n}\right], \left[\frac{12}{n}, \frac{18}{n}\right] \quad \dots \quad \left[(n-1)\frac{6}{n}, 6\right].$$

Entonces $M_i = 0 + (i-1)\frac{6}{n} = \frac{6}{n}(i-1)$ y $m_i = 0 + i\left(\frac{6}{n}\right) = \frac{6}{n}i$. Aplicando $f(x) = 6 - x$, obtenemos

$$f(m_i) = f\left(\frac{6}{n}i\right) = 6 - \frac{6}{n}i \text{ y también } f(M_i) = f\left(\frac{6}{n}(i-1)\right) = 6 - \frac{6}{n}(i-1).$$

$$s(n) = \sum_{i=1}^n \left[6 - \frac{6}{n}i\right] \left(\frac{6}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{36}{n}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{36}{n^2}i = \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

y

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \left[6 - \frac{6}{n}(i-1)\right] \left(\frac{6}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{36}{n} + \frac{36}{n^2}i - \frac{36}{n^2}\right) = \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n 1.$$

EJEMPLO 2.9 (CÁLCULO DE SUMAS SUPERIORES E INFERIORES)

Calculemos $s(n)$ y $S(n)$ de la región limitada por: el eje x , la curva asociada a la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \text{ y las líneas rectas de ecuaciones } x = 1 \text{ y } x = 3.$$

Dividimos el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos, todos de longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n},$$

y obtenemos los sub intervalos

$$\left[1, 1+(1)\frac{2}{n}\right], \left[1+(1)\frac{2}{n}, 1+(2)\frac{2}{n}\right], \left[1+(2)\frac{2}{n}, 1+(3)\frac{2}{n}\right] \quad \dots \quad \left[3-\frac{2}{n}, 3\right].$$

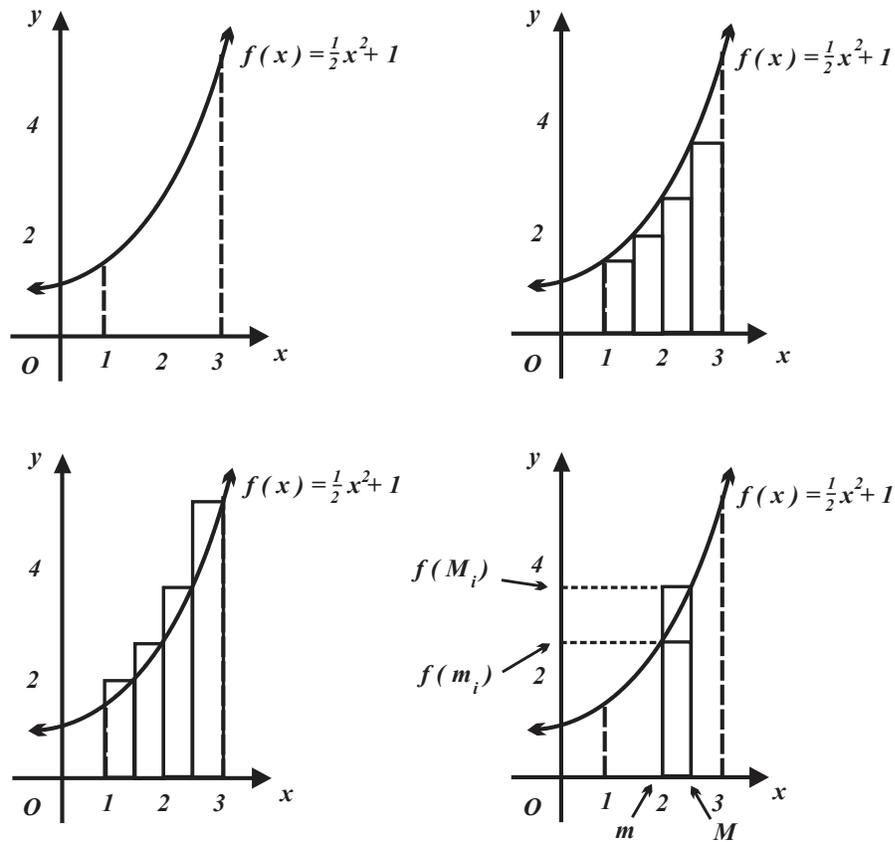


FIGURA 2.23

Los valores mínimos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, (sobre los intervalos anteriores), se presentan en los extremos izquierdos, y sus máximos en los extremos derechos y son respectivamente $m_i = 1 + (i-1)\frac{2}{n}$ y $M_i = 1 + i\frac{2}{n}$.

También

$$f(m_i) = f\left(1 + (i-1)\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + (i-1)\frac{2}{n}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right)i + \frac{2}{n^2}i^2$$

y

$$f(M_i) = f\left(1 + i\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{2}{n}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{n}i + \frac{2}{n^2}i^2.$$

Por tanto,

$$s(n) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right)i + \frac{2}{n^2}i^2 \right] \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right)i + \frac{4}{n^3}i^2 \right]$$

Simplificando $s(n) = \left(\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n 1 + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$

$$\begin{aligned} \text{Por otra parte } S(n) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{2} + \frac{2}{n}i + \frac{2}{n^2}i^2 \right] \left(\frac{2}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}i + \frac{4}{n^3}i^2 \right] \\ &= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \end{aligned}$$

Las sumas inferiores y superiores ($S(n)$ y $s(n)$) dependen del número (n) de rectángulos considerados y el índice (también variable) i , sin embargo, es posible reescribirlas únicamente en términos de la variable n , para tal efecto se utilizan las propiedades de las sumas (la notación sigma \sum) y los resultados referentes a las sumas de las potencias de los primeros n números naturales (el lector debe revisar el Apéndice A.A en donde se tratan detalladamente). Reproducimos ambas propiedades en las siguientes líneas.

PROPIEDAD A.C.1 (PROPIEDADES DE LAS SUMAS)

Si c es cualquier número

- $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$ (propiedad de homogeneidad).
- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ (propiedad de aditividad).
- $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica).

PROPIEDAD A.C.2 (PROPIEDADES DE LAS SUMAS DE POTENCIAS)

Si c es un número constante y n un número natural, entonces:

- $\sum_{i=1}^n c = nc$.
- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$.

EJEMPLO 2.10

En el *ejemplo 2.7* calculamos las sumas $s(n)$ y $S(n)$ para la región del plano cartesiano definida por el eje x , la curva de $f(x) = x + 2$, las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$, obtuvimos:

$$s(n) = \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1$$

y

$$S(n) = \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1,$$

respectivamente.

Al aplicar los incisos a. y b. de la propiedad A.A.2 obtenemos

$$s(n) = \frac{16}{n^2} \frac{n^2 + n}{2} - \frac{16}{n^2} \cdot n + \frac{8}{n} \cdot n = 8 + \frac{8}{n} - \frac{16}{n} + 8 = 16 - \frac{8}{n}$$

y

$$S(n) = \frac{16}{n^2} \frac{n^2 + n}{2} + \frac{8}{n} n = 8 + \frac{8}{n} + 8 = 16 + \frac{8}{n}.$$

Si el número de rectángulos que aproximan el área de la región crece indefinidamente, es decir, $n \rightarrow +\infty$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(16 - \frac{8}{n} \right) = 16 \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(16 + \frac{8}{n} \right) = 16.$$

CONCLUSIÓN

En la región del plano cartesiano limitada por el eje x , la curva de $f(x) = x + 2$, y las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$, se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 16$.

EJEMPLO 2.11

En el ejemplo 2.8 determinemos $s(n)$ y $S(n)$ para la región del plano cartesiano limitada los ejes coordenados y la curva asociada a la función $f(x) = 6 - x$. Obtuvimos las sumas

$$s(n) = \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i \text{ y } S(n) = \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n 1,$$

respectivamente.

Si los incisos a. y b. de la propiedad A.A.2,

$$s(n) = \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{36}{n} \cdot n - \frac{36}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = 36 - 18 - \frac{18}{n} = 18 - \frac{18}{n}$$

y

$$S(n) = \frac{36}{n} \cdot n - \frac{36}{n^2} \frac{n^2 + n}{2} - \frac{36}{n^2} \cdot n = 36 - 18 - \frac{18}{n} - \frac{36}{n} = 18 - \frac{54}{n}.$$

Ahora incrementamos indefinidamente el número de los rectángulos que aproximan el área de la región, es decir, sí $n \rightarrow +\infty$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(18 - \frac{18}{n} \right) = 18 \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(18 - \frac{54}{n} \right) = 18.$$

CONCLUSIÓN

En la región del plano cartesiano limitada por el eje x , la curva de la función $f(x) = x + 2$, las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = 18.$$

EJEMPLO 2.12

En el *ejemplo 2.9* calculamos $s(n)$ y $S(n)$ para la región del plano cartesiano limitada por el eje x , la curva asociada a la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, las líneas rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$, obtuvimos:

$$s(n) = \left(\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) \sum_{i=1}^n 1 + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3} \right) \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

en el proceso de suma inferior y

$$S(n) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

en el proceso de suma superior.

Si aplicamos los incisos a., b. y c. de la *propiedad A.C.2* obtenemos

$$\begin{aligned} s(n) &= \left(\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) n + \left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3} \right) \frac{n^2 + n}{2} + \frac{4}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= 3 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{n} - \frac{2}{3n^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{3}{n} \cdot n + \frac{4}{n^2} \frac{n^2 + n}{2} + \frac{4}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Por último, incrementamos indefinidamente el número de los rectángulos que aproximan el área de la región ($n \rightarrow +\infty$) obtenemos, para la suma inferior

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{n} - \frac{2}{3n^2} \right) = \frac{19}{3}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{19}{3}.$$

para la suma superior.

CONCLUSIÓN

En la región del plano cartesiano limitada por el eje x , la curva de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$,

y las líneas rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 2$, se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \frac{19}{3}$.

Otras de las características de las funciones de los ejemplos 2.8 a 2.10 son: continuas, no negativas y además se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n),$$

también puede verificarse (utilizando argumentos geométricos) que la región en consideración contiene

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) \text{ unidades cuadradas.}$$

Una generalización de los resultados anteriores es la conjetura:

Si f es una función continua y no negativa sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n), \text{ siempre que}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

sea la longitud de las bases de los rectángulos, $f(m_i)$ y $f(M_i)$ los valores mínimo y máximo (respectivamente) de la función f sobre los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

La conjetura anterior es verdadera y puede ser generalizada tomando en cuenta:

i. Para cualquier número $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple

$$s(n) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \leq S(n)$$

(no necesariamente deben ser los números m_i y M_i), vea la figura 2.24.

ii. Se conserva la validez de la afirmación “si el número de rectángulos se incrementa indefinidamente” los números

$$f(m_i) \text{ y } f(M_i)$$

coinciden y son iguales a

$$f(c_i).$$

iii. Se cumple

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(n).$$

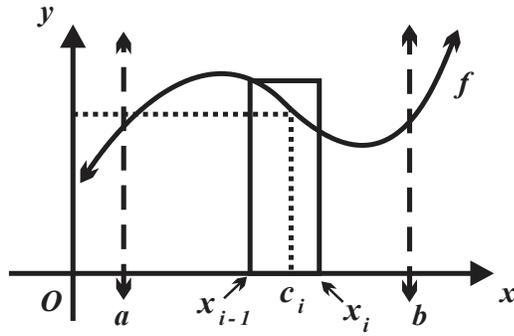


FIGURA 2.24

Las observaciones hacen viable la *definición 2.3*, misma que se refiere al área de una región del plano cartesiano.

DEFINICIÓN 2.3 (ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO CARTESIANO)

Si f es una función continua y no negativa en el intervalo $[a , b]$, entonces el área de la región del plano cartesiano limitado por:

- i. La curva asociada a f .
- ii. El eje x .
- iii. Las líneas rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, es

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x, \text{ unidades cuadradas, donde } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ y } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Por el momento utilizaremos la *definición 2.3* en el cálculo de áreas de regiones en el plano, sin embargo, debemos señalar que tal definición posteriormente será modificada.

EJEMPLO 2.13 (ÁREA DE UN RECTÁNGULO)

La línea recta asociada a la función $f(x) = h$ (h positiva) junto con los ejes coordenados y la línea recta de ecuación $x = b$ (b positiva) el rectángulo de la *figura 2.25*, calculemos su utilizando la *definición 2.3*.

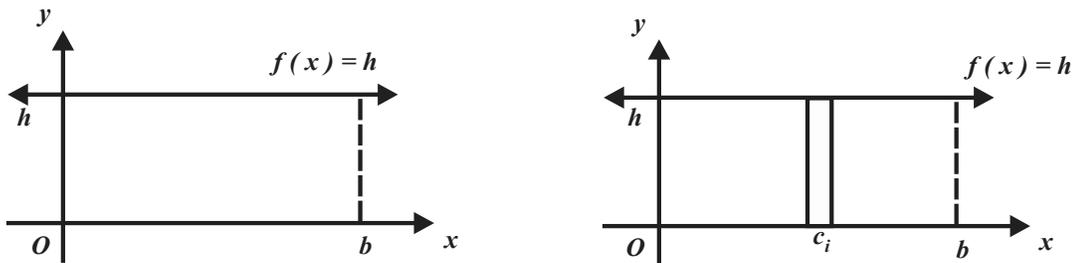


FIGURA 2.25

El ancho de las bases de los rectángulos es

$$\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n},$$

por tanto,

$$c_i = i\Delta x = \frac{b}{n}i \text{ y } f(c_i) = f\left(\frac{b}{n}i\right) = h.$$

Luego

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n h \left(\frac{b}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{bh}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{bh}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{bh}{n} n = bh.$$

EJEMPLO 2.14 (ÁREA DE UN TRIÁNGULO)

La función

$$f(x) = -\frac{h}{b}x + h$$

en donde los números h y b representan números positivos define la región triangular de la figura 2.26, calculemos su área utilizando la definición 2.3.

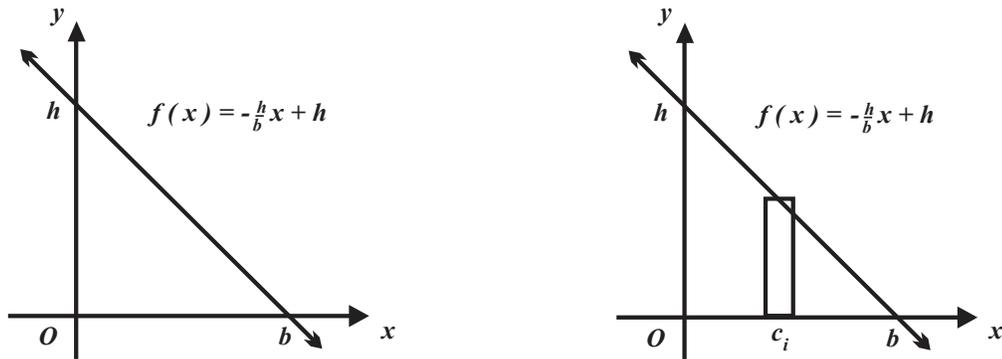


FIGURA 2.26

El ancho de los rectángulos es $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$: sea c_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$c_i = \frac{b}{n}i \text{ y } f(c_i) = f\left(\frac{b}{n}i\right) = -\frac{h}{b}\left(\frac{b}{n}i\right) + h = -\frac{h}{n}i + h, \text{ también}$$

$$\begin{aligned} A(R) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{h}{n}i + h \right) \left(\frac{b}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{hb}{n^2}i + \frac{hb}{n} \right) \\ &= hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right) - hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(R) &= hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (n) - hb \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n^2 + n}{2} \\
 &= hb \lim_{n \rightarrow +\infty} (1) - \frac{hb}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

finalmente

$$A(R) = hb - \frac{hb}{2} \circ A(R) = hb - \frac{hb}{2} = \frac{hb}{2}.$$

EJEMPLO 2.15 (ÁREA DE UN SECTOR PARABÓLICO)

La parábola de ecuación $f(x) = x^2$ definida sobre el intervalo $[0, b]$ define un “sector parabólico” en el plano cartesiano, vea la *figura 2.27*, calculemos el área de esta región utilizando la *definición 2.3*.

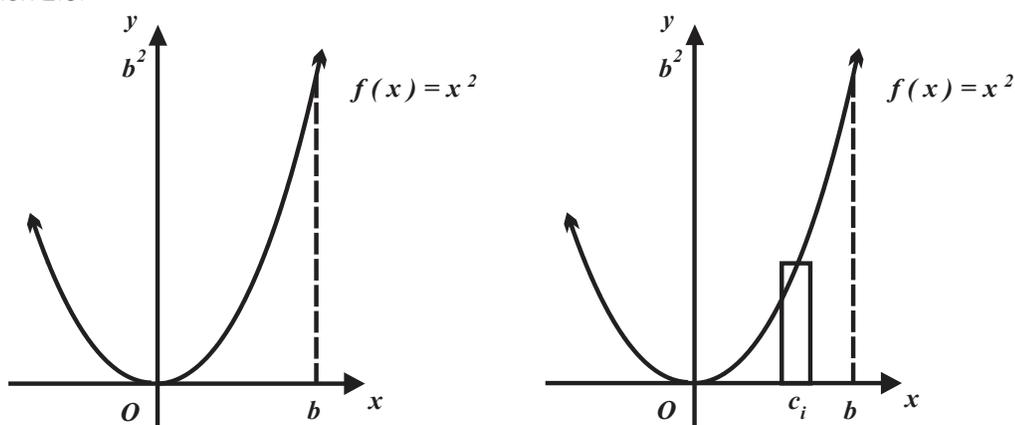


FIGURA 2.27

Aquí $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$, sea c_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$c_i = \frac{b}{n}i \text{ y } f(c_i) = f\left(\frac{b}{n}i\right) = \left(\frac{b}{n}i\right)^2 = \frac{b^2}{n^2}i^2$$

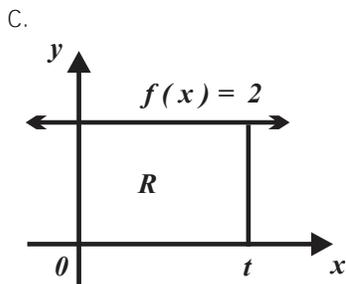
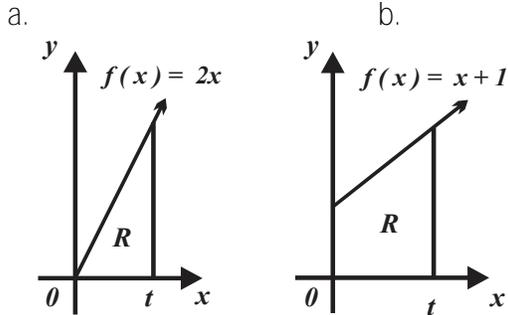
$$\begin{aligned}
 A(R) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b^2}{n^2} i^2 \right) \left(\frac{b}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b^3}{n^3} i^2 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}
 \end{aligned}$$

$$A(R) = \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{b^3}{6} (2) = \frac{b^3}{3}, \text{ unidades cuadradas.}$$

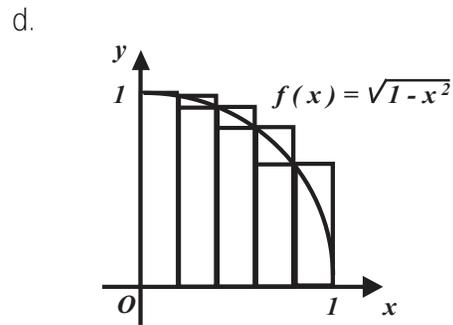
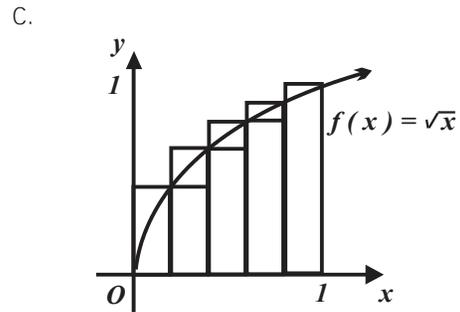
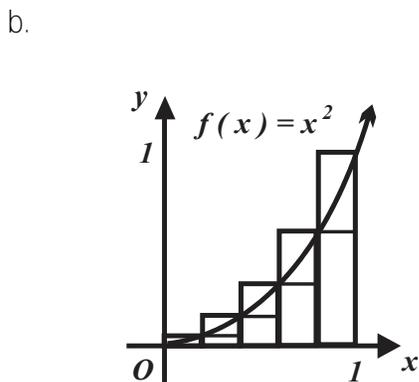
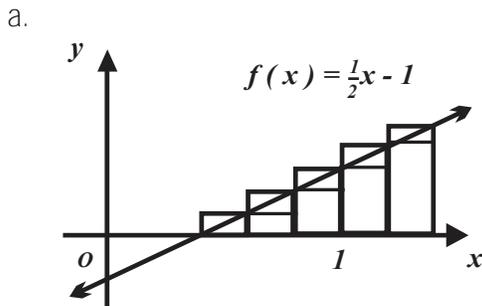
▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 2.1 ▼

- Determine el área de la región del plano cartesiano limitada por:
 - El eje x , la curva asociada a la función $f(x) = 4$ y las líneas rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 4$.
 - El eje x , la curva asociada a la función $f(x) = 2$ y las líneas rectas de ecuaciones $x = -3$ y $x = 3$.
 - El eje x , la curva asociada a la función $f(x) = -3$ y las líneas rectas de ecuaciones $x = 3$ y $x = 6$.
- Determine el área de la región del plano cartesiano limitada por:
 - Las funciones $f(x) = -4$, $g(x) = 3$ y las líneas rectas verticales con ecuaciones $x = 4$ y $x = 6$.
 - Las curvas asociadas a las funciones $f(x) = -1$, $g(x) = -3$ y líneas las rectas de ecuaciones $x = -4$ y $x = -1$.
- Determine el área de la región del plano cartesiano limitada por:
 - La curva asociada a la función $f(x) = 5 - x$ y los ejes coordenados.
 - La curva asociada a la función $f(x) = 2x + 6$ y los ejes coordenados.
- Determine el área de la región del plano cartesiano limitada por las curvas asociadas a:
 - $f(x) = 6 - x$, $g(x) = 2x + 6$ y el eje x .
 - La curva asociada a $f(x) = -2x + 2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ y el eje x .
- Establezca la función que determina el área de la región del plano cartesiano indicada.
 - Limitada por $f(x) = 2x - 5$ y cuya base define el intervalo $\left[\frac{5}{2}, t \right]$.
 - Limitada por $f(x) = 5x - 4$ y cuya base define el intervalo $\left[\frac{4}{5}, t \right]$.
 - Limitada por $f(x) = 3x - 1$ y base el intervalo $[3, t]$.
 - La región trapezoidal cuya altura está definida por el intervalo $[-1, t]$, y se encuentra limitada por la curva de $f(x) = 2x + 3$.
 - La región trapezoidal con altura está por el intervalo $[t, 1]$, y se encuentra limitada por la curva de $f(x) = -3x + 6$.
 - Construya la función que proporciona el área de la región trapezoidal limitada por la curva de $f(x) = 4x - 10$, la altura está definida por el intervalo $[3, t]$.

6. En cada caso determine la función que describe el área de la región.



7. Utilice sumas superiores e inferiores y aproxime el área de la región de la figura (utilice el número de rectángulos de ella).



8. Considere la región limitada por $f(x) = 4 - (x - 2)^2$ y el eje x .

- a. Trácela.
 b. Complete la siguiente tabla (n representa el número de subintervalos en que se divide la base).

n	2	4	8	16
$s(n)$				
$S(n)$				

9. Considere la región limitada por

$$f(x) = \sqrt{16 - (x - 6)^2} \text{ y el eje } x.$$

- a. Trácela.
 b. Complete la siguiente tabla (n representa el número de subintervalos en que se divide la base).

n	4	8	16
$s(n)$			
$S(n)$			

10. Determine $s(n)$ y $S(n)$ para la región del plano cartesiano definida por la curva asociada a la función f y:

- $f(x)=5$, los ejes coordenados y la línea recta de ecuación $x=3$.
- El eje x y las líneas rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=5$.
- El eje x y las líneas rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=4$.
- El eje x y las rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=6$.

11. Determine $s(n)$ y $S(n)$ para la región del plano cartesiano limitada por la curva asociada a la función f :

- $f(x)=-3x+6$ y el eje x .
- $f(x)=1-x^2$ y el eje x .
- $f(x)=9-(x-3)^2$ y el eje x .
- $f(x)=1+x^3$ sobre $[1, 4]$.

12. Determine el área de la región del plano cartesiano (Utilice la definición de área dada en esta sección).

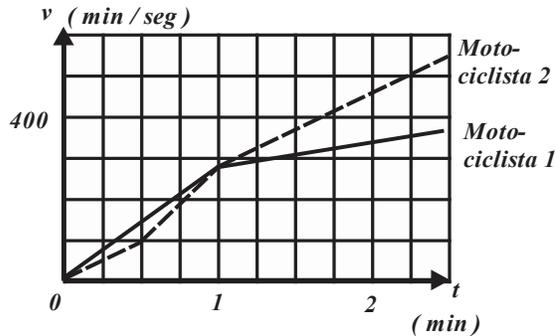
- Limitada por $f(x)=5$, los ejes coordenados y la línea recta $x=3$.
- Limitada por $f(x)=3$, el eje x y las líneas rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=5$.
- Limitada por $f(x)=3x-2$, el eje x y las líneas rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=4$.
- Limitada por $f(x)=x+4$, el eje x y las líneas rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=6$.

13. Determine el área de la región del plano cartesiano (Utilice la definición de área dada en esta sección).

- Limitada por $f(x)=-3x+6$ y el eje x .
- Limitada por $f(x)=1-x^2$ y el eje x .
- La región limitada por $f(x)=9-(x-3)^2$ y el eje x .
- Limitada por $f(x)=1+x^3$ sobre el intervalo $[1, 4]$.

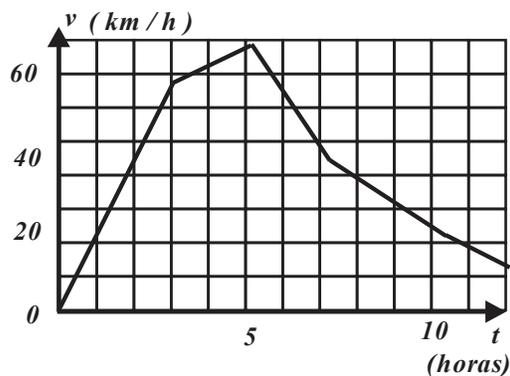
ACTIVIDADES 2.1

1. Dos motociclistas parten del reposo, desde un mismo semáforo, y aceleran durante varios minutos. La figura anexa muestra sus velocidades en función del tiempo.



- ¿Cuál motociclista se encuentra adelante después de 2 minutos?
- ¿Cuál motociclista se encuentra adelante después de 4 minutos?
- ¿Cuál es la distancia recorrida por cada motociclista?

2. Un auto parte a las cero horas y viaja a la velocidad que muestra la figura. Un Camión parte una hora después, a velocidad constante de 90 kilómetros por hora y sigue la ruta del auto.



- ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil cuando parte el camión?

- ¿En el periodo del tiempo en que el auto está adelante del camión?, ¿cuándo es máxima la distancia entre ellos?
- En qué periodo de tiempo el auto está adelante del camión?, ¿cuándo es mínima la distancia entre ellos?

3. Área de un rectángulo

- En la parte positiva del plano cartesiano trace el rectángulo limitado por los ejes coordenados, las rectas verticales de ecuaciones $x = a$, $x = b$ y la línea recta $f(x) = b$, $b > 0$.

b. Determine la “suma de Cauchy Riemann” correspondiente.

c. Evalúe $A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$,

¿qué concluye?

4. Área de un trapecio.

- En la parte positiva del plano cartesiano trace el rectángulo limitado por los ejes coordenados, la recta $f(x) = ax + b$, $b > 0$ y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

b. Determine la “suma de Cauchy Riemann” correspondiente.

c. Evalúe $A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$,

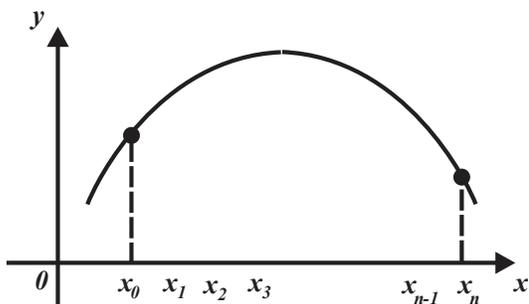
¿qué concluye?

5. Regla de los trapecios.

La figura muestra una curva continua y positiva.

El intervalo $[a, b]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud por las abscisas

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b.$$



a. Puesto que la longitud del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, ¿cuál es la longitud de cada subintervalo que generan las abscisas

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b?$$

Denomine esta longitud por h .

b. Rescriba abscisas.

$a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ en términos de h .

c. En la figura dada marque las imágenes correspondientes a

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

y luego dos imágenes consecutivas utilizando segmentos de recta.

d. Asocie un trapecio a cada subintervalo determinado por dos abscisas consecutivas y sus respectivas imágenes.

e. Calcule el área de los tres primeros trapecios y del último de ellos. Sume el área los trapecios.

f. Simplifique la expresión obtenida.

g. Concluya que

$$A(R) \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \dots + f(b)].$$

6. Valor promedio.

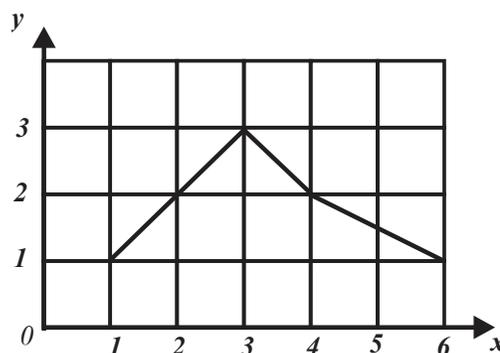
Suponga que el valor promedio de la función

c. ¿Por qué el área limitada por

f sobre el intervalo $[a, b]$ está definido en términos del área A de la región que limitan: las rectas verticales de ecuaciones $x = a$, $x = b$ el eje de las abscisas y la curva asociada a la función f por

$$\text{valor promedio} = \frac{1}{b-a} A.$$

Tome como base la siguiente figura y determine:



a. El valor promedio de la función correspondiente.

b. La función f que describe el área de la región limitada por las rectas verticales de ecuaciones $x = a$, $x = t$ el eje de las abscisas y la curva asociada a f .

c. El valor promedio de la función $f(x) = x + 1$ sobre el intervalo $[1, 3]$.

7. Semicircunferencias.

a. En el mismo plano, trace las curvas asociadas a las funciones $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, ¿qué región geométrica encierran? ¿Cuál es su área?

b. ¿Por qué el área limitada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y el eje x es $\frac{\pi}{2}$ unidades cuadradas? Explique.

$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x es $\frac{a^2\pi}{2}$

unidades cuadradas? Explique.

8. Movimiento de un objeto.

Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con una velocidad dada por

$v(t) = 4 + 2t \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sobre $[0, 4]$.

a. Trace la curva correspondiente.

b. ¿Cuál es la distancia que recorre el objeto?

c. Determine la función $s(t)$ que describe la posición del objeto.

d. Utilice la función $s(t)$ para hallar la distancia recorrida por el objeto en $[0, 4]$ y compare su respuesta con la del inciso b.

2.2

FUNCIÓN ÁREA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

APRENDIZAJES

El alumno:

6. Infiere a la integral definida como el límite de sumas infinitas.

7. Identifica la función área como una antiderivada o primitiva.

8. Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo.

9. Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo.

10. Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.

11. Utiliza las propiedades de la integral definida.

TEMÁTICA

i. La función área como una antiderivada.

ii. Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo.

En la sección anterior definimos área en el plano cartesiano, también verificamos las fórmulas de área que se obtienen a partir de ella concuerdan con las fórmulas de áreas de la geometría plana, sin embargo, tal definición de área que es bastante rígida en el sentido las hipótesis que contiene, así como poco práctica; por tanto, nos corresponde mejorarla. Iniciemos la reformulación de la *definición 2.3*.

1. Las bases de los rectángulos no tienen que ser de la misma longitud.

DEFINICIÓN 2.4 (PARTICIÓN)

a. Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos

$\Delta = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \}$, tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ y que lo dividen en los subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

b. La longitud o ancho del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (i -ésimo intervalo) es

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

c. La norma de la partición Δ se representa por $\|\Delta\|$ y se define como el ancho o longitud del mayor de los subintervalos que la componen, es decir,

$$\|\Delta\| = \Delta x = \max(x_i - x_{i-1}).$$

d. Una partición Δ se denomina regular si todos los subintervalos que genera tienen la misma longitud.

La figura 2.28 muestra la partición $\Delta = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \}$ del intervalo $[a, b]$, así como su norma, $\| \Delta \| = x_5 - x_4$.



FIGURA 2.28

Para reflexionar

¿Pueden intersectarse dos o más subintervalos de una partición?

EJEMPLO 2.16

a. La partición

$$\Delta = \{ -1, -0.8, 1, 1.5, 2.1, 3 \} \text{ del intervalo } [-1, 3]$$

genera los cinco subintervalos

$$[-1, -0.8], [-0.8, 1], [1, 1.5], [1.5, 2.1] \text{ y } [2.1, 3]$$

cuyas longitudes son

$$\Delta x_1 = -0.8 - (-1) = 0.2 \quad \Delta x_2 = 1 - (-0.8) = 1.8$$

$$\Delta x_3 = 1.5 - 1 = 0.5 \quad \Delta x_4 = 2.1 - 1.5 = 0.6$$

$$\Delta x_5 = 3 - 2.1 = 0.9, \text{ respectivamente, en consecuencia, tiene norma}$$

$$\| \Delta \| = \Delta x = 1.8.$$

b. La partición

$$\Delta = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \} \text{ del intervalo } [0, 5]$$

es regular y tiene norma

$$\| \Delta \| = \Delta x = 1.$$

c. La partición

$$\Delta = \left\{ 0, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}, \dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3} \right\} \text{ del intervalo } [0, 1]$$

(observe $a = 0 < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^{n-1}} < \dots < \frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 1 = b$) tiene norma

$$\| \Delta \| = \Delta x = \frac{1}{3}$$

y genera un número "muy grande" de subintervalos.

Note que en toda partición la norma

$$\| \Delta \| = \Delta x$$

es mayor o igual que la longitud del intervalo dividido por el número de subintervalos que la componen; en la partición

$\Delta = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \}$ del intervalo $[a, b]$ se cumple $\Delta x \geq \frac{b-a}{n}$.

Para reflexionar

¿Cuántas particiones tiene un intervalo cerrado?

¿Cuántas particiones regulares tiene un intervalo cerrado?

En una partición regular el número de intervalos que la componen se incrementa indefinidamente conforme la norma de la partición se aproxima a cero, la afirmación recíproca no siempre es cierta.

2. La función f no tiene que ser positiva.

Aclarados los *puntos 1. y 2.*, ya no son útiles los números $S(n)$ y $s(n)$ (sumas inferiores y sumas superiores), mismos que **sustituiremos por las “sumas de Riemann - Cauchy”**.

DEFINICIÓN 2.5 (SUMA DE RIEMANN - CAUCHY)

Sea n : f una función definida sobre el intervalo $[a, b]$,

$\Delta = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y Δx_i el ancho del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Si $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

se denomina suma de Riemann - Cauchy de f para la partición Δ .

Note que la *definición 2.5* no incluye las hipótesis:

a. Continuidad de la función f .

b. La función f **es positiva y en consecuencia cada sumando, de una “suma de Riemann-Cauchy”** no necesariamente representa el área de un rectángulo.

c. En toda partición del intervalo $[a, b]$ la suma de Riemann - Cauchy tiene un valor distinto.

EJEMPLO 2.17 (SUMAS DE RIEMANN - CAUCHY)

a. La suma de Riemann - Cauchy para la función $f(x) = x + 1$

y la partición

$$\Delta = \{ -1, -0.8, 1, 1.5, 2.1, 3 \} \text{ del intervalo } [-1, 3]$$

con

$c_1 = -0.9$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1.2$, $c_4 = 2$ y $c_5 = 2.5$ es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i &= f(-0.9)(0.2) + f(0)(1.8) + f(1.2)(0.5) + f(2)(0.6) + f(2.5)(0.9) \\ &= (0.1)(0.2) + (1)(1.8) + (2.2)(0.5) + (3)(0.6) + (3.5)(0.9) = 7.87.\end{aligned}$$

b. La suma de Riemann - Cauchy para la función $f(x) = x + 1$ y la partición

$$\Delta = \{ -1, 0, 1, 2, 3 \} \text{ del intervalo } [-1, 3]$$

con

$$c_1 = -0.5, c_2 = 0.5, c_3 = 1.5 \text{ y } c_4 = 2.5$$

es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i &= f(-0.5)(1) + f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1) \\ &= (0.5)(1) + (1.5)(1) + (2.5)(1) + (3.5)(1) = 8.\end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de definir formalmente la integral definida.

DEFINICIÓN 2.6 (INTEGRAL DEFINIDA)

Sean: f una función definida sobre el intervalo $[a, b]$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = I$ existe, se dice que f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$ y el número

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

se denomina integral definida.

En la expresión

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

a recibe el nombre de límite inferior de integración y el número b límite superior de integración.

Para reflexionar

¿Por qué son equivalentes las sumas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = I$ y $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$?

Respecto a la definición anterior, ¿puede proporcionar una función en la que no exista el número I ?

EJEMPLO 2.18 (INTEGRAL DEFINIDA)

a. Evaluemos $I = \int_{-2}^2 (x-2) dx$, utilizando la definición 2.6, vea la figura 2.29.

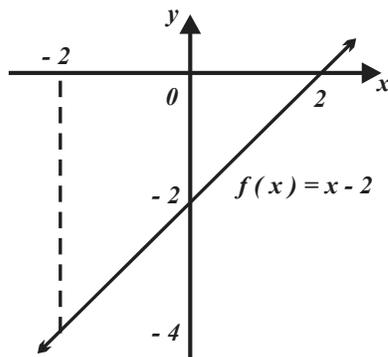


FIGURA 2.29

Sea en intervalo $[-2, 2]$ una partición regular de norma

$$\Delta x = \frac{2 - (-2)}{n} = \frac{4}{n},$$

los números c_i los extremos izquierdos de los subintervalos generados por la partición son

$$c_i = -2 + i \frac{4}{n}.$$

Puesto que $f(x) = x - 2$, entonces:

$$f\left(-2 + i \frac{4}{n}\right) = -2 + i \frac{4}{n} - 2 = -4 + i \frac{4}{n}, \text{ por tanto,}$$

la suma de Riemann - Cauchy es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(-4 + i \frac{4}{n}\right) \left(\frac{4}{n}\right) &= \sum_{i=1}^n \left(i \frac{16}{n^2} - \frac{16}{n}\right) \\ &= \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{16}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \left(\frac{16}{n^2}\right) \left(\frac{n^2 + n}{2}\right) - \frac{16n}{n} \\ &= 8 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 16 = \frac{1}{n} - 8 \end{aligned}$$

La integral definida es

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[8 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 16 \right] = 8 - 16 = -8 \quad \text{o} \quad I = \int_{-2}^2 (x - 2) dx = -8.$$

EJEMPLO 2.19 (INTEGRAL DEFINIDA)

Evaluemos la integral $I = \int_0^4 (x^2 - 2x) dx$ aplicando la *definición 2.6*, vea la *figura 2.30*.

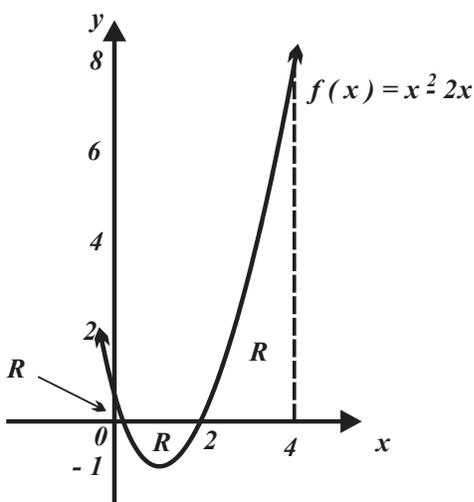


FIGURA 2.30

Sea $\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ la norma de partición del intervalo $[0, 4]$, entonces $c_i = \frac{4}{n}i$, puesto que

$$f\left(\frac{4}{n}i\right) = \frac{16}{n^2}i^2 - \frac{8}{n}i, \text{ entonces}$$

la suma de Riemann - Cauchy es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{16}{n^2}i^2 - \frac{8}{n}i \right) \left(\frac{4}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{64}{n^3}i^2 - \frac{32}{n^2}i \right) = \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{32}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{64}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) - \frac{32}{n^2} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{16}{n^2}i^2 - \frac{8}{n}i \right) \left(\frac{4}{n} \right) &= \left(\frac{64}{n^3} \right) \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) - \left(\frac{32}{n^2} \right) \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \\ &= \left(\frac{32}{3} \right) \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - 16 \left(1 + \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

lo que implica

$$I = \int_0^4 (x^2 - 2x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{32}{3} \right) \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - 16 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}.$$

Para reflexionar

¿Por qué el número $I = \int_{-2}^2 (x-2) dx = -8$ no representa el área de la región R ?

Ahora responderemos las preguntas relativas a la integral definida.

1. ¿Qué características tienen las funciones integrables?
2. ¿En qué condiciones representan el área de una región del plano cartesiano?
3. ¿Cuáles son sus propiedades?
4. ¿Cuál es su relación con las integrales indefinidas o antiderivadas? ¿Por qué se utiliza el mismo símbolo para ambas?
5. ¿Existe un método práctico para evaluar integrales definidas?

Respecto a la pregunta 1., las funciones que integramos en el *ejercicio 2.14* son continuas sobre un intervalo de la forma $[a , b]$, esta condición es suficiente (pero no necesaria) para que la función f sea integrable en el intervalo $[a , b]$.

PROPOSICIÓN 2.2 (CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD)

Si f es una función continua sobre el intervalo $[a , b]$, entonces es integrable sobre $[a , b]$.

La justificación de la *proposición 2.2*, está fuera de los propósitos de la presente obra y puede revisarse en libros de texto de nivel superior.

Funciones, como las polinomiales, las exponenciales, las logarítmicas y las senoidales (puesto que son continuas sobre los números reales) son integrables, sin embargo, la integrabilidad de otros tipos de funciones dependerá del intervalo del dominio considerado.

Para reflexionar

¿Una integral siempre representa un área?

Respecto a la pregunta: 2.

¿En qué condiciones, la integral definida es equivalente al área de una región?

El estudio de la integral definida se originó al resolver el problema de calcular el área de una región del plano cartesiano, ello nos condujo a la *definición 2.3*, que está exenta de conceptos geométricos y no depende de estos, sin embargo, su similitud con la definición de área de una región del plano (*definición 2.3*) hace posible escribir esta última en términos de la integral definida.

DEFINICIÓN 2.7 (ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO CARTESIANO)

Si f es una función continua y no negativa sobre el intervalo $[a , b]$, entonces el área de la región del plano cartesiano limitado por: la curva asociada a f , el eje x y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ es

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx$$

unidades cuadradas.

De la *definición 2.7* se infiere que una integral puede ser interpretada como área si la función f sea continua y no negativa sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2.20 (INTEGRALES COMO ÁREAS)

a. Si $h > 0$, entonces $\int_a^b h \, dx = h(b-a)$, representa el área del rectángulo mostrado en la *figura 2.31*.

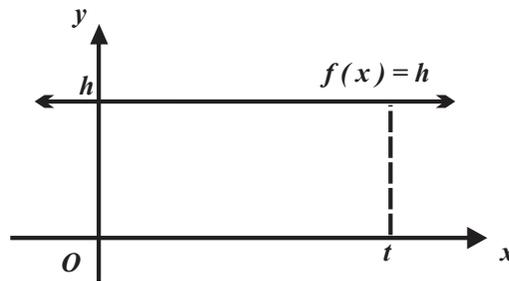


FIGURA 2.31

b. Si $a > 0$ entonces $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{2}$, representa el área del semicírculo mostrado en la *figura 2.32*.

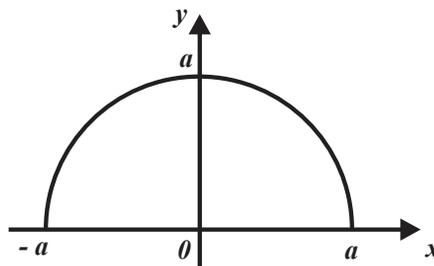


FIGURA 2.32

c. La integral $\int_{-4}^2 x \, dx = -6$, no representa el área de la región del plano mostrada en la *figura 2.33* puesto que la función $f(x) = x$ no es positiva sobre el intervalo $[-4, 2]$.

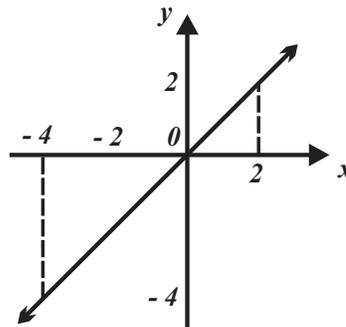


FIGURA 2.33

Si en la *definición 2.6* consideramos variable el límite superior (o el inferior) puede tratarse como una función, la “**función integral**”. En la *figura 2.34* la integral se considera un número, en la *figura 2.35* la integral se considera como una función.

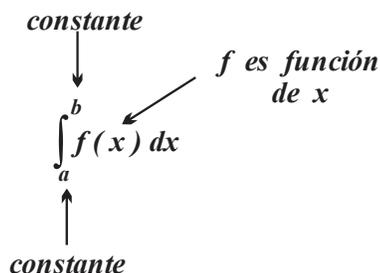


FIGURA 2.34

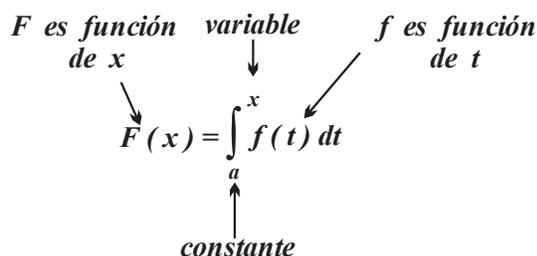


FIGURA 2.35

La función con regla de correspondencia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

tiene como dominio “el intervalo variable $[a , x]$ ” y a cada número x le asocia el número $\int_a^x f(t) dt$ (siempre que $f(t)$ sea integrable). Similarmente, si en la *definición 2.7* se supone que el límite superior es variable, se tiene la “**función área**”

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

que depende de la variable x y que proporciona el área de la región del plano cartesiano limitada por:

- i. Una curva, “positiva”, asociada a la función f .
- ii. El eje de las abscisas y las líneas rectas verticales con ecuaciones

$$x = a \text{ y } x = t.$$

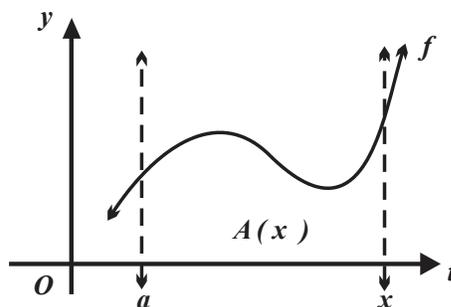


FIGURA 2.36

Respecto a la Pregunta 3. ¿Cuáles son sus propiedades?

Una integral no necesariamente representa el área de una región del plano cartesiano, sin embargo, esta interpretación facilita la comprensión y obtención de sus propiedades. La *definición 2.6* establece que f es una función definida sobre el intervalo $[a, b]$, pero ¿qué ocurre si $a = b$ o $a > b$, la *definición 2.8* da respuesta a estas preguntas.

DEFINICIÓN 2.8 (DOS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL)

a. Si $F(a)$ existe, entonces

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ (INTERVALO DE LONGITUD CERO)}$$

b. Si $a > b$ y $\int_a^b f(x) dx$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx. \text{ (INTERCAMBIO DE LÍMITES).}$$

Para reflexionar

¿Por qué la integral de la función $f(x)$ sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la integral de $f(x)$ sobre el intervalo abierto (a, b) ?

En términos de áreas, la *propiedad a.* establece que un segmento de recta vertical con extremos en el eje de las abscisas y un punto de la curva asociada a f tiene área cero, vea la *figura 2.37*

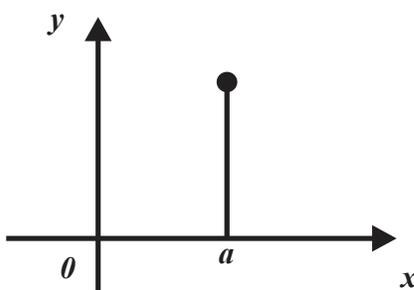


FIGURA 2.37

EJEMPLO 2.21 (INTERVALO DE LONGITUD CERO)

a. Si $f(x) = x + 1$, entonces $\int_3^3 (x + 1) dx = 0$, “la región del plano definida por el intervalo $[3, 3]$ y la función $f(x) = x + 1$ tiene área cero, vea la *figura 2.38*.”

b. Si $f(x) = 1 - x^2$, entonces $\int_{0.5}^{0.5} (1 - x^2) dx = 0$, “la región del plano definida por el intervalo $[0.5, 0.5]$ y la función $f(x) = 1 - x^2$ ”, tiene área cero, vea la *figura 2.39*.”

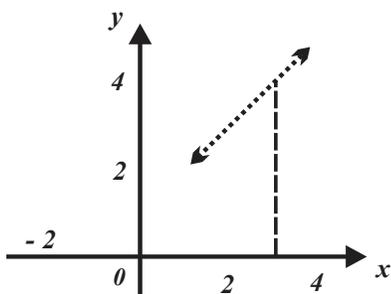


FIGURA 2.38

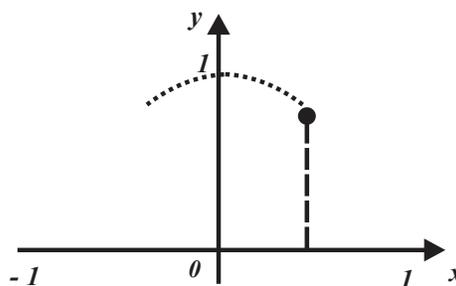


FIGURA 2.39

Para reflexionar

Geoméricamente, ¿qué representa $\int_a^b f(x) dx$?

La propiedad b. de la definición 2.8 asegura que, si en la integral $\int_a^b f(x) dx$ se intercambian los límites de integración, entonces cambia el signo de la integral.

EJEMPLO 2.22 (INTERCAMBIO DE LÍMITES)

a. En el ejemplo 2.19 determinamos que

$$\int_{-2}^2 (x - 2) dx = -8, \text{ entonces } \int_2^{-2} (x - 2) dx = -(-8) = 8.$$

b. En el ejemplo 2.20 determinamos que

$$\int_0^4 (x^2 - 2x) dx = \frac{16}{3}, \text{ entonces } \int_4^0 (x^2 - 2x) dx = -\frac{16}{3}.$$

En la figura 2.40 la región R definida por: el intervalo $[a, b]$ y la curva asociada a la función f , ha sido seccionada en las regiones R_1 y R_2 por el segmento de recta con extremos en los puntos $p_1(c, 0)$ y $p_2(c, f(c))$, dado que $\int_c^c f(x) dx = 0$ se intuye que el área de la región R es igual a la suma de las áreas de las regiones R_1 y R_2 .

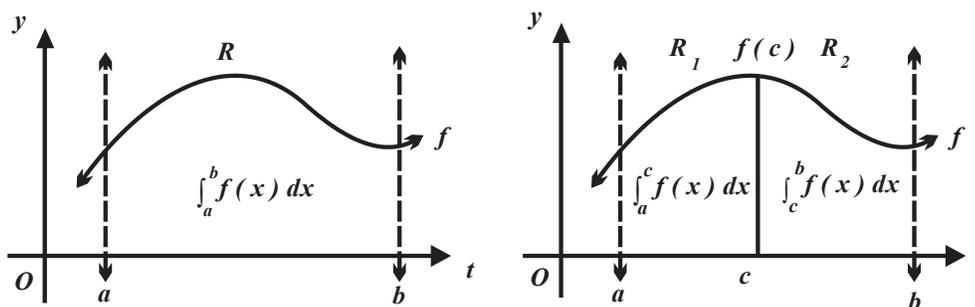


FIGURA 2.40

La observación anterior se expresa formalmente en términos de integrales por medio de la *proposición 2.3*.

PROPOSICIÓN 2.3 (ADITIVIDAD)

Sean: $a < c < b$ números reales y f una función integrable sobre los intervalos definidos por los números a , b y c , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Para reflexionar

Para un número finito de subintervalos del intervalo $[a, b]$, ¿puede generalizar la *proposición 2.3*?

EJEMPLO 2.23 (ADITIVIDAD)

a. En la *figura 2.41*, $\int_{-4}^0 x dx = -8$ y $\int_0^2 x dx = 2$, entonces $\int_{-4}^2 x dx = -6$.

b. En la *figura 2.42*, $\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ y $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, entonces $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

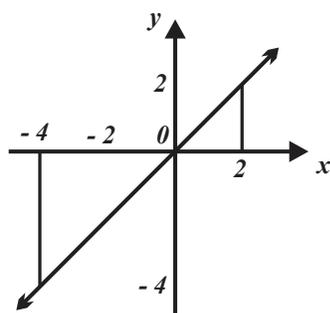


FIGURA 2.41

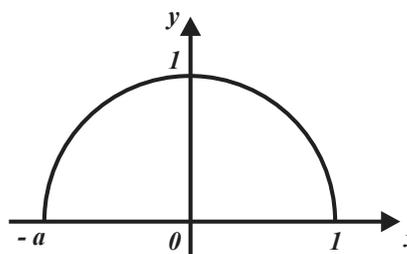


FIGURA 2.42

La integral se define en términos de una suma (con mayor precisión, “una suma infinita”) y en consecuencia satisface las propiedades de las sumas; a partir de ellas (revise el apéndice A.C) es posible justificar la *proposición 2.4*.

PROPOSICIÓN 2.4 (LINEALIDAD DE INTEGRALES)

Sean f , g funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$ y k un número real, entonces la función $k \cdot f + g$ es integrable sobre el intervalo $[a, b]$ y

$$\int_a^b [k f(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

La *figura 2.43* ilustra la propiedad de linealidad.

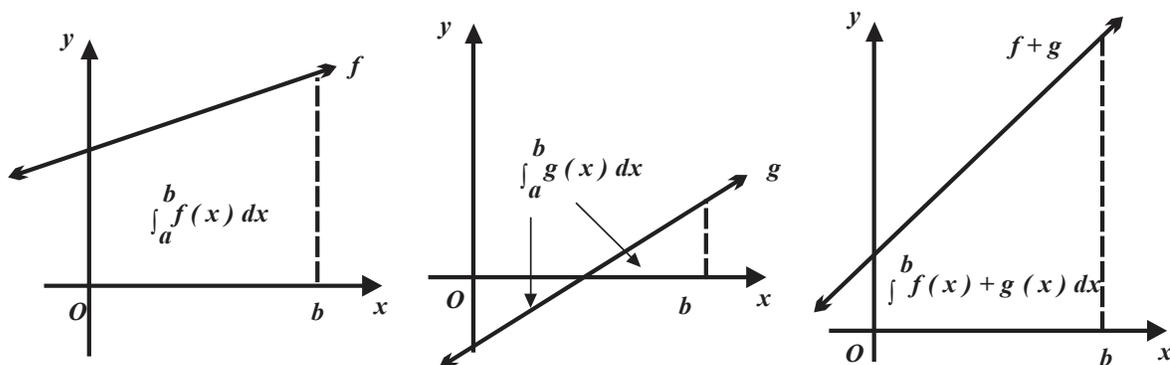


FIGURA 2.43

EJEMPLO 2.24 (APLICACIÓN DE LA PROPIEDAD DE LINEALIDAD)

- a. $\int_2^4 (3x^2 + 4x) dx = 3 \int_2^4 x^2 dx + 4 \int_2^4 x dx.$
- b. $\int_0^5 (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5) dx = 4 \int_0^5 x^3 dx + 3 \int_0^5 x^2 dx - 2 \int_0^5 x dx + 5 \int_0^5 dx.$
- c. $\int_{-1}^1 (5 - 2\sqrt{x} + 3x^5) dx = 5 \int_{-1}^1 dx - 2 \int_{-1}^1 \sqrt{x} dx + 3 \int_{-1}^1 x^5 dx.$

En la figura 2.44 $g \geq f \geq 0$ sobre el intervalo $[a , b]$, entonces el área de la región limitada por las líneas rectas de ecuaciones

$$x = a \text{ y } x = b ,$$

el eje x y la curva asociada a g es ser mayor (o igual) que el área de la región limitada por las líneas rectas de ecuaciones

$$x = a \text{ y } x = b ,$$

el eje x y la curva asociada a f ; este resultado también es válido para integrales, si

$$g \geq f \geq 0 \text{ sobre el intervalo } [a , b] ,$$

entonces

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx \geq 0 ,$$

esto se expresa formalmente en la proposición 2.5.

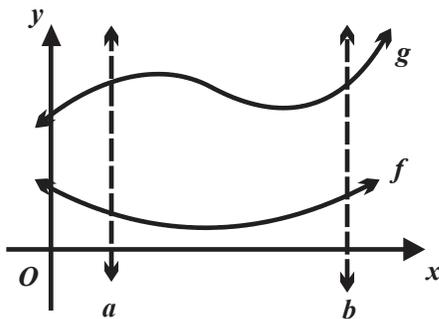


FIGURA 2.44

PROPOSICIÓN 2.5 (COMPARACIÓN DE INTEGRALES)

Sean f, g funciones integrables sobre el intervalo

$$[a, b] \text{ y } g(x) \geq f(x) \geq 0$$

para todo número x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

La idea básica de la justificación de la *proposición 2.5* se basa en el hecho de que $g - f$ es integrable sobre el intervalo $[a, b]$ (proposición de linealidad) y que sus sumas de Riemann – Cauchy son no negativas y tienden a un valor definido I cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$, entonces el número I es no negativo. Para concluir la respuesta de la *pregunta 3.*, trataremos las propiedades del “valor medio”. La *figura 2.45* muestra una región R definida por la curva asociada a f , el eje de las abscisas y las líneas rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, también muestra que el rectángulo con vértices $abQP$ se encuentra inscrito en la región R . Si se desplaza el segmento de recta PQ verticalmente hacia arriba se generan las regiones R_1, R_2 y R_3 con las siguientes características:

- i. R_1 se encuentra contenida en la región R .
- ii. R_2 está limitada por la esquina superior izquierda del rectángulo y la curva asociada a f .
- ii. R_3 la región limitada por la curva asociada a f , el segmento de línea recta de ecuación $x = b$ y por parte de la base superior del rectángulo $abQP$

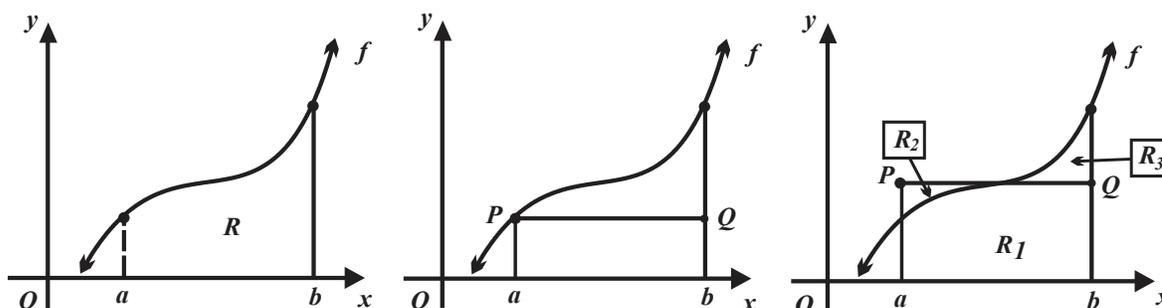


FIGURA 2.45

Por tanto, existe el número $y_0 = f(x_0)$, donde $x_0 \in [a, b]$, de manera que las áreas de las regiones R_2 y R_3 son iguales y como consecuencia

$$f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x) dx,$$

es decir, existe un rectángulo de base $[a, b]$ y altura definida por $f(x_0)$ cuya área es igual al área de la región R .

PROPOSICIÓN 2.6 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES)

Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces existe x_0 en $[a, b]$, tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ o bien } f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x) dx.$$

En la *proposición 2.6* el número $f(x_0)$ recibe el nombre de valor medio de la función f en el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2.25 (VALOR MEDIO)

a. El valor medio de $f(x) = 6$ sobre $[0, 4]$ es $\frac{1}{4-0} \int_0^4 6 dx = \frac{1}{4} [6x]_0^4 = \frac{1}{4}(24) = 6.$

b. El valor medio de $f(x) = 6$ sobre $[2, 4]$ es $\frac{1}{4-2} \int_2^4 6 dx = \frac{1}{2} [6x]_2^4 = \frac{1}{2}(12) = 6.$

c. El valor medio de $f(x) = x$ definida sobre el intervalo $[-2, 2]$ es

$$\frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^2 x dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4}(0) = 0.$$

d. El valor medio de $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ es $\frac{1}{2-0} \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(2) = 1.$

EJEMPLO 2.26 (VALOR MEDIO BIS)

a. Si $\int_{-1}^3 (2x - 3) dx = -4$, el número x_0 que predice *el teorema del valor medio* para la función

$$f(x) = 2x - 3 \text{ sobre } [-1, 3], \text{ es } \int_{-1}^3 (2x - 3) dx = -4 = (2x_0 - 3)(3 - (-1)),$$

entonces

$$x_0 = 1.$$

b. Si $\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}$, el número x_0 que predice *el teorema del valor medio* para la función

$$f(x) = x^2 \text{ sobre } [0, 4] \text{ es } \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3} = x_0^2(4 - 0), \text{ es decir } x_0^2 = \pm \frac{16}{3}, \text{ por tanto,}$$

$x_{01} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ y $x_{02} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, sin embargo, $x_{02} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ no pertenece a $[0, 4]$ y

$$x_0 = x_{01} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

La respuesta a la pregunta 4. ¿Cuál es su relación con las integrales indefinidas o antiderivadas? y ¿por qué se utiliza el mismo símbolo para representarlas?, se conoce como *primera parte del*

Teorema Fundamental del Cálculo, proposición que indica la forma de evaluar integrales utilizando la antiderivada. Para una mejor comprensión de su justificación, conviene dividir el *Teorema Fundamental del Cálculo* en dos partes.

EJEMPLO 2.27 (DERIVADA DE LA FUNCIÓN INTEGRAL)

Obtengamos la función derivada asociada a la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ utilizando el cociente de

$$\text{Newton} \left(\frac{dF}{dx} = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right).$$

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \text{ (proposición 2.3, aditividad de integrales)}.$$

Entonces

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\left[\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right] - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x},$$

es decir,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}.$$

Supongamos que $\Delta x > 0$. Por el *teorema del valor medio para integrales*, existe el número x_0 en el intervalo

$$[x, x + \Delta x]$$

tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = (x + \Delta x - x) f(x_0) \text{ o bien } f(x_0) = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}.$$

Combinando

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \text{ con } f(x_0) = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}, \text{ obtenemos}$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0).$$

Además, si el número x_0 pertenece al intervalo $[x, x + \Delta x]$ y $\Delta x \rightarrow 0$, entonces $x_0 = x$ y

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) = f(x).$$

En la notación de Leibniz para la función derivada $F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$.

Si $\Delta x < 0$ el argumento es similar.

Para reflexionar

¿Puede hacer un desarrollo similar si $\Delta x < 0$?

Hemos justificado la *primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo*, mismo que formaliza la *proposición 2.7*.

PROPOSICIÓN 2.7 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PRIMERA PARTE)
 Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ definida sobre el intervalo $[a, b]$ es derivable en todo número de (a, b) y $F'(x) = f(x)$.

La expresión $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ indica que si se integra la función f y luego se deriva la función resultante, se obtiene la función original f .

EJEMPLO 2.28 (DERIVANDO LA FUNCIÓN INTEGRAL)

a. Si $F(x) = \int_2^x (3t^2 + 4t) dt$, entonces $F'(x) = 3x^2 + 4x$.

b. $F(x) = \int_2^x \ln t dt$, entonces $F'(x) = \ln x$.

c. $F(x) = \int_5^x \sqrt{1-t+t^2} dt$, entonces $F'(x) = \sqrt{1-x+x^2}$.

La respuesta a la pregunta 5. ¿Existe un método práctico para evaluar integrales definidas?, es afirmativa y la constituye la *segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo*, y la justificaremos en el *ejemplo 2.29*.

EJEMPLO 2.29 (DERIVANDO LA FUNCIÓN INTEGRAL)

Sean: $\Delta = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ derivable,}$$

entonces

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b,$$

por tanto,

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0).$$

Rescribiendo la expresión anterior en forma telescópica

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0).$$

y en notación sigma (vea el apéndice A.C) obtenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

El *teorema del valor medio* (vea el apéndice A.A) confirma que existe el número c_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i},$$

es decir,

$$F'(c_i) \Delta x_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ o bien } F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \Delta x_i.$$

De

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \text{ junto con } F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i,$$

obtenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i.$$

Aplicando la *primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo* ($F'(c_i) = f(c_i)$), a la expresión anterior da

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ por último, si } \|\Delta\| \rightarrow 0 \text{ (o equivalentemente } n \rightarrow +\infty), \text{ entonces}$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

PROPOSICIÓN 2.8 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, SEGUNDA PARTE)

Si la función f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Si se conoce la antiderivada F de la función f , para evaluar la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ sólo es necesario evaluar F en los extremos del intervalo $[a, b]$ y calcular la diferencia $F(b) - F(a)$.

EJEMPLO 2.30

a. Una antiderivada de $F(x) = x^3 + 2x^2$ es la función $f(x) = 3x^2 + 4x$, pero

$$F(2) = (2)^3 + 2(2)^2 = 16 \text{ asimismo } F(0) = (0)^3 + 2(0)^2 = 0, \text{ entonces}$$

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x) dx = 16 - 0 = 16.$$

b. La función $F(x) = 8\sqrt{x}$ es una antiderivada de $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$, también

$$F(4) = 8\sqrt{4} = 16 \text{ asimismo } F(1) = 8\sqrt{1} = 8, \text{ entonces } \int_1^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = 16 - 8 = 8.$$

La respuesta completa a la pregunta 5. es el *Teorema Fundamental del Cálculo*.

PROPOSICIÓN 2.9 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO)

Sea la función f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces:

- a. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ definida sobre $[a, b]$ es derivable en cada punto del intervalo (a, b) y $F'(x) = f(x)$.
- b. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f .

Para evaluar una integral definida, suponiendo que se conoce la función antiderivada o primitiva de f , es conveniente tener en cuenta la notación:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 2.31 (EVALUACIÓN DE INTEGRALES DEFINIDAS)

a.

$$\int_1^2 (1-5x)dx = \left[x - \frac{5}{2}x^2 \right]_1^2 = \left(2 - \frac{5}{2}(2)^2 \right) - \left(1 - \frac{5}{2}(1)^2 \right) = (2-10) - \left(1 - \frac{5}{2} \right) = -8 + \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}.$$

b. $\int_1^4 (\sqrt{x} - 1)dx = \left[\frac{1}{2\sqrt{4}} - x \right]_1^4 = \left(\frac{1}{2\sqrt{4}} - 4 \right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 \right) = -\frac{7}{4} - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}.$

c. $\int_{-1}^2 \frac{x^2 - 4}{x - 2} dx = \int_{-1}^2 \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} dx = \int_{-1}^2 (x+2) dx = [x^2 + 2x]_{-1}^2 = 8 + 2 = 10.$

d. $\int_1^5 (x^2 - 3x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x \right]_1^5 = \left[\frac{5^3}{3} - \frac{3(5)^2}{2} - 5 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{3(1)^2}{2} - 1 \right] = \frac{53}{3}.$

EJEMPLO 2.32 (EVALUACIÓN DE INTEGRALES DEFINIDAS)

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - \text{sen } x)dx = [3x + \text{cos } x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{cos}\frac{\pi}{2} \right) - (3(0) + \text{cos } 0) = \left(\frac{3\pi}{2} \right) - (0 + 1) = \frac{3}{2}\pi - 1.$

b. $\int_1^5 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^5 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5).$

c. $\int_{-2}^2 (e^{-x} + 1)dx = [-e^{-x} + x]_{-2}^2 = (-e^{-2} + 2) - (-e^2 - 2) = e^2 - e^{-2} + 4.$

EJERCICIOS 2.2

1. Sean los intervalos

$[0, 2]$, $[2, 2.5]$, $[2.5, 4]$,
 $[4, 4.8]$, $[4.8, 5.4]$, $[5.4, 6.8]$,
 $[6.8, 7.2]$ y $[7.2, 8]$.

a. Proporcione el conjunto de puntos que definen la partición del intervalo $[0, 8]$.

b. ¿Cuál es la norma de la partición?

2. ¿Generan una partición del intervalo $[0, 10]$?

a. $\Delta = \{0, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 10\}$.

b. $\Delta = \{0, 1, 2, 7, 4, 6, 8, 10\}$.

Justifique su respuesta.

3. Construya los intervalos de la partición definida por el conjunto

$$\Delta = \{-0.2, 1.4, 2.3, 4.1, 6.2, 7.3, 9\}.$$

¿Cuál es la norma de la partición?

4.

a. Sea el intervalo $[-4, 6]$, proporcione los puntos y los intervalos de la partición regular de norma $\|\Delta\| = 0.5$.

b. Sea el intervalo $[1, 2]$, proporcione los puntos y los intervalos de la partición regular de norma $\|\Delta\| = 0.4$.

5. Sea la partición

$$a = 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \dots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1 = b$$

del intervalo $[0, 1]$

a. ¿Cuál es su norma?

b. ¿Qué ocurre con Δx si $n \rightarrow +\infty$?

6. Sea la partición

$$a = 0 < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^{n-1}} < \dots < \frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 1 = b$$

del intervalo $[0, 1]$.

a. ¿Cuál es su norma?

b. ¿Qué ocurre con Δx si $n \rightarrow +\infty$?

7. Considere la región del plano cartesiano definida $f(x) = \sqrt{x}$, $x=1$ y el eje x .

a. Considere la partición de $[0, 1]$

generada por $x_i = \frac{i^2}{n^2}$, ¿cuáles son los

primeros cuatro puntos de la partición?

b. ¿Cuál es el ancho del intervalo i ?

c. Determine $f(x_i)$ si $x_i = \frac{i^2}{n^2}$.

d. Determine la expresión de $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$

en términos de n .

e. Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

8. Considere la región del plano cartesiano definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x=0$, $x=1$ y el eje x .

a. Sea la partición de $[0, 1]$ generada por

$x_i = \frac{i^3}{n^3}$, ¿cuáles son los primeros cuatro

puntos de la partición?

b. ¿Cuál es el ancho del intervalo i ?

c. Si $x_i = \frac{i^3}{n^3}$, determine $f(x_i)$.

d. Determine la expresión de $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$

en términos de n .

e. Determine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

9. Utilice la definición 2.6 (integral definida) y evalúe las integrales.

a. $\int_3^6 4 dx$.

b. $\int_{-4}^4 10 dx$.

c. $\int_{-5}^5 x dx$.

d. $\int_{-2}^0 x dx$.

e. $\int_0^6 x^2 dx$.

f. $\int_{-1}^2 (x - 4) dx$.

g. $\int_{-2}^0 (1 + x) dx$.

h. $\int_2^4 (3 + x^2) dx$.

10. Expresé los límites de las sumas de Riemann como una integral definida, suponga que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

a. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (2c_i + 4) \Delta x_i$ en $[0, 1]$.

b. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (1 - 3c_i) \Delta x_i$ en $[2, 4]$.

c. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (c_i + 3c_i^3) \Delta x_i$ en $[-1, 1]$.

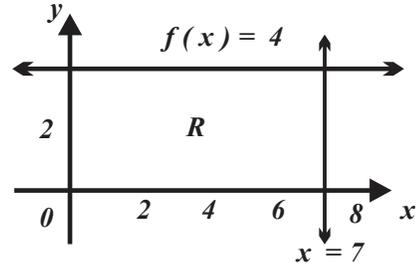
d. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (c_i^2 - 2) \Delta x_i$ en $[-2, 3]$.

e. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{c_i^2 + 1} \right) \Delta x_i$ en $[0, 5]$.

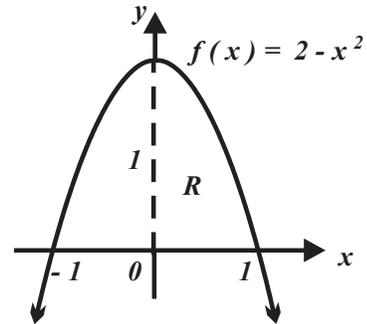
f. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{sen}(c_i^2) \Delta x_i$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$.

11. Determine la integral definida asociada a la región del plano.

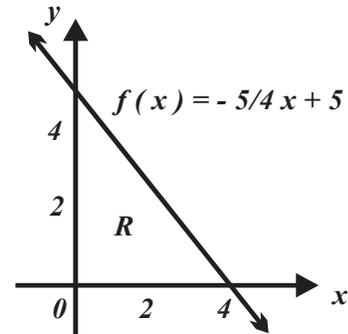
a.



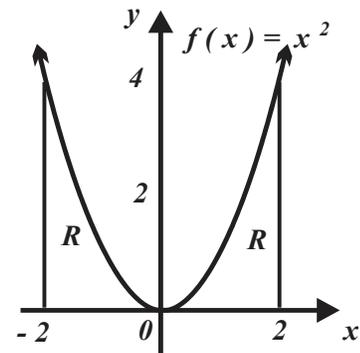
b.



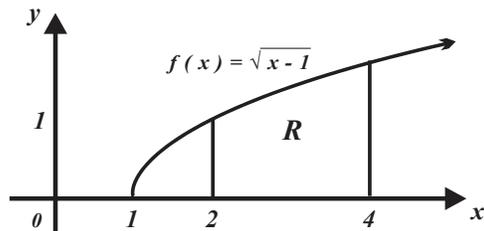
c.



d.



e.



12. Utilice sumas de Riemann y verifique.

a. $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$.

b. $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

c. $\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

d. Cuál es el valor de la integral $\int_a^b x^n \, dx$, suponga que n es un número natural.

13. ¿Cuáles integrales proporcionan el área de la región del plano correspondiente? Justifique su respuesta.

a. $\int_1^4 (x+2) \, dx$.

b. $\int_{-1}^4 (2x+1) \, dx$.

c. $\int_{-1}^1 (x-2)^3 \, dx$.

d. $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \text{sen } x \, dx$.

e. $\int_2^5 \frac{1}{x-1} \, dx$.

f. $\int_0^{\pi/4} -(\cos x) \, dx$.

g. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$.

14. ¿Existe $\int_{-3}^3 \frac{1}{x-2} \, dx$? ¿Cuánto vale?

15. ¿Existe $\int_{-3}^3 \frac{x-2}{x-2} \, dx$? si existe, ¿cuánto vale?

16. ¿Es integrable f sobre el intervalo? Explique.

a. $f(x) = \frac{3}{x-2}$, en $[0, 4]$.

b. $f(x) = \frac{3}{x-2}$, en $[3, 6]$.

c. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$, en $[3, 6]$.

d. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, en $[0, 6]$.

17. Represente en el plano cartesiano las regiones asociadas, suponga que $x > 0$.

a. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$.

c. $H(x) = \int_1^x e^{-x} \, dt$.

b. $G(x) = \int_{-2}^x 6 \, dt$.

d. $I(x) = \int_{-\infty}^x (e^{-x}) \, dt$.

18. Determine dos funciones f y g tales que $F(x) = f(g(x))$.

a. $F(x) = \int_1^{x^2+1} \cos t \, dt$.

b. $F(x) = \int_2^{e^{nx+1}} (3t-2) \, dt$.

c. $F(x) = \int_2^{8-3x+x^2} 3^{t+5} t \, dt$.

d. $F(x) = \int_2^{1+e^x} \frac{4}{3-\text{sen } t} \, dt$.

19. Construya una “función integral” tal que:

- a. Proporcione el área de un triángulo rectángulo.
- b. Proporcione el área de un triángulo equilátero.
- c. Proporcione el área de un trapecio.
- d. Proporcione el área de un semicírculo.
- e. Proporcione el área de una semielipse.

20. Suponga,

$$\int_0^3 x^3 dx = \frac{81}{4}, \int_0^3 x^2 dx = 9 \text{ y}$$

$$\int_0^3 dx = 3 \text{ y determine:}$$

a. $\int_0^3 (2x^3 - 3x^2) dx.$

c. $\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 3 \right) dx.$

d. $\int_0^3 (2x^2 - 3x^3) dx.$

e. $\int_0^3 (x^2 + 2) dx.$

f. $\int_0^3 (4x^3 + 2x^2 - 5) dx.$

21. Sean

$$\int_0^1 f(x) dx = 2$$

y

$$\int_1^4 f(x) dx = -1,$$

determine:

a. $\int_0^4 f(x) dx.$

b. $\int_{-4}^4 f(x) dx.$

c. $\int_{-4}^0 f(x) dx.$

d. $\int_{-4}^1 f(x) dx.$

22. Escriba como una sola integral.

a. $\int_{-3}^1 f(x) dx - \int_{-3}^{-5} f(x) dx.$

b.

$$\int_{-4}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_{-5}^{-4} f(x) dx.$$

c. $\int_{-3}^3 f(x) dx - \int_4^3 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx.$

d. $\int_2^2 f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx - \int_{-2}^{-5} f(x) dx.$

23. Determine $f(m)$ y $f(M)$ para f definida sobre $[a, b]$ tal que

$$f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(M)(b-a).$$

Donde $f(m)$ y $f(M)$ son los valores mínimo absoluto y valor máximo absoluto, respectivamente

de $f(x)$ sobre $[a, b]$.

a. $f(x) = 2x + 1$ sobre $[1, 3]$.

b. $f(x) = -x + 2$ sobre $[-1, 4]$.

c. $f(x) = (x-1)^2$ sobre $[0, 3]$.

d. $f(x) = 4 - (x-2)^2$ sobre $[1, \frac{7}{2}]$.

24. Determine el o los valores que garantiza el teorema del valor medio para integrales.

a. $f(x) = 2x + 4$ sobre $[0, 4]$.

b. $f(x) = 3x - 2$ sobre $[2, 6]$.

c. $f(x) = 1 - x^2$ sobre $[-1, 2]$.

d. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ sobre $[-2, 2]$.

25. Determine el valor medio de la función sobre el intervalo indicado.

a. $f(x) = -x + 3$ sobre $[-2, 2]$.

b. $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ sobre $[1, 5]$.

c. $f(x) = (x+1)^2$ sobre $[-2, 4]$.

d. $f(x) = 2 - (x-1)^2$ sobre $[-4, 0]$.

26. Verifique que (trace la curva correspondiente al integrando y luego utilice la *proposición 2.5*)

a. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx \geq \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$.

b. $\int_0^1 x^3 dx \leq \int_0^1 x^2 dx$.

c. $\int_2^5 x^3 dx \geq \int_2^5 x^2 dx$.

d. $\int_2^5 x^4 dx \geq \int_2^5 x^3 dx$.

27. Utilice el teorema fundamental del cálculo y obtenga $F'(x)$.

a. $F(x) = \int_1^x (e^t - \ln t) dt$.

b. $F(x) = \int_2^x (t - t^2 - 2)$.

c. $F(x) = \int_2^x \left(\frac{1+t}{2+t} \right) dt$.

d. $F(x) = \int_2^x \frac{4 + \cos t}{3 - \sin t} dt$.

28. Suponga que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

a. Calcule $\ln(1)$.

b. $\frac{d}{dx} \ln(x)$.

c. Verifique que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ es creciente.

d. Verifique que la función $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ es cóncava hacia arriba.

29. Utilice el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para obtener $F'(x)$.

a. $F(x) = \int_1^{x^2+1} \cos t dt$.

b. $F(x) = \int_2^{e^{\ln x+1}} (3t - 2)$.

c. $F(x) = \int_2^{8-3x+x^2} 3^{t+5} t dt$.

d. $F(x) = \int_2^{1+e^x} \frac{4}{3 - \sin t} dt$.

30. Determine los valores extremos y analícelos.

a. $F(x) = \int_2^x (1 - t^2) dt$.

b. $F(x) = \int_2^x (t^2 + 2t + 1) dt$.

ACTIVIDADES 2.2

1. Longitud de una curva

Es posible calcular la longitud de una curva (que posee ciertas características como la estar asociada a una función derivable) utilizando algunas de las ideas desarrolladas en la presente sección.

a. Trace una curva suave y continua en el plano cartesiano.

b. Seleccione una parte de curva, para ello utilice dos rectas verticales que contengan los extremos de la curva y los extremos del intervalo $[a, b]$ que la definen.

c. Aproxime la parte de la curva de f seleccionada por n segmentos de recta cuyos puntos terminales sean las imágenes de los puntos de la partición

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

d. El segmento i está limitado por las imágenes de los extremos $[x_{i-1}, x_i]$, es decir los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, utilice la “fórmula para calcular la distancia entre dos puntos” y calcule la longitud de este segmento.

e. Suponga que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y que $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ y transforme la expresión obtenida en el inciso anterior.

f. Ahora establezca la relación (que incluye una suma finita) que aproxima la suma de todos los segmentos de aproximación señalados en el inciso c. y obtenga

$$l \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} (\Delta x_i).$$

g. Observe que la aproximación es mejor cuando $n \rightarrow +\infty$ (es decir $|\Delta x| \rightarrow 0$) y recuerde que por el teorema del valor medio que en $[x_{i-1}, x_i]$ existe c_i tal que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i), \text{ verifique que}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} (\Delta x_i)$$

h. ¿Por qué $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$?

2. Longitudes de curvas

Utilice la relación $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

y calcule:

a. La longitud de la curva definida por $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ sobre $[0, 4]$.

b. La longitud de la curva definida por $f(x) = 1 + 6x^{\frac{3}{2}}$ sobre $[1, 2]$.

c. La longitud de la curva definida por $f(x) = x$ sobre $[-2, 2]$.

3. En cada caso utilice el teorema fundamental del cálculo y calcule $F'(x)$:

a. $F(x) = \int_0^{2x+1} t^2 dt.$

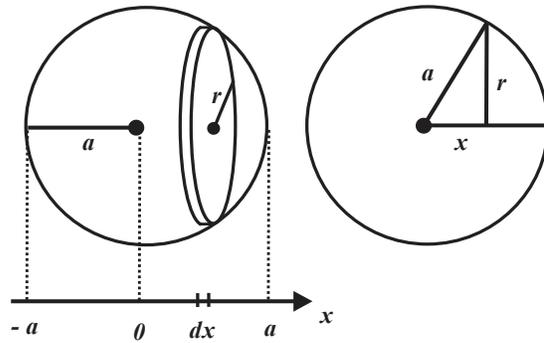
b. $F(x) = \int_x^{2x+1} t^2 dt.$

c. $F(x) = \int_a^{g(x)} t^2 dt.$

d. $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$

4. Volumen de una esfera

a. La figura muestra una esfera de radio a , sobre ella se encuentra un cilindro de altura dx , ¿cuál es el área de la base del cilindro?



b. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

c. De acuerdo con la figura de la derecha verifique que la relación entre a , x y r es $r^2 = a^2 - x^2$.

d. En consecuencia, ¿el volumen del cilindro en función de x es?

e. Verifique que el volumen de la esfera es

$$v = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx, \text{ evalúe.}$$

2.3

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

APRENDIZAJES

El alumno:

- | | |
|---|--|
| 12. Interpreta la solución de un problema, como el cálculo del área bajo una curva. | 13. Aplica el teorema fundamental del cálculo. |
|---|--|

TEMÁTICA

Aplicaciones de la integral definida:

- i. Área comprendida entre dos funciones.
- ii. Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.
- iii. Cálculo de una población a partir de su tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.

La integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

se vincula con el área de regiones del plano cartesiano, sin embargo, tal interpretación requiere tener en cuenta el signo de la función f sobre el intervalo de interés.

- i. Si la función f es positiva e integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces el número

$$\int_a^b f(x) dx$$

Coincide con el número de unidades de área de la región limitada por las rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$, el eje de las x y la curva asociada a f , figura 2.46.a.

- ii. Por otra parte, si f es negativa e integrable sobre el intervalo

$$[a, b], \text{ entonces}$$

el número

$$\int_a^b f(x) dx \text{ es negativo y, por tanto, } -\int_a^b f(x) dx$$

es positivo, y es el número de unidades cuadradas de la región, del plano cartesiano limitada por las líneas rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$, el eje de las x y la curva asociada a $-f$, vea la figura 2.46.b.

- iii. Si la función f es en parte positiva y en parte negativa sobre

$$[a, b],$$

de modo que existe el número x_0 donde la curva de f corta al eje, figura 2.46.c., el número

$$\int_a^b f(x) dx$$

es la diferencia entre el área definida por la parte positiva de f y su parte negativa, entonces para obtener el área de una región con estas características debemos determinar $x = x_0$ y posteriormente calcular las integrales

$$\int_a^{x_0} f(x) dx \text{ y } \int_{x_0}^b f(x) dx$$

para posteriormente sumar los valores absolutos resultantes.

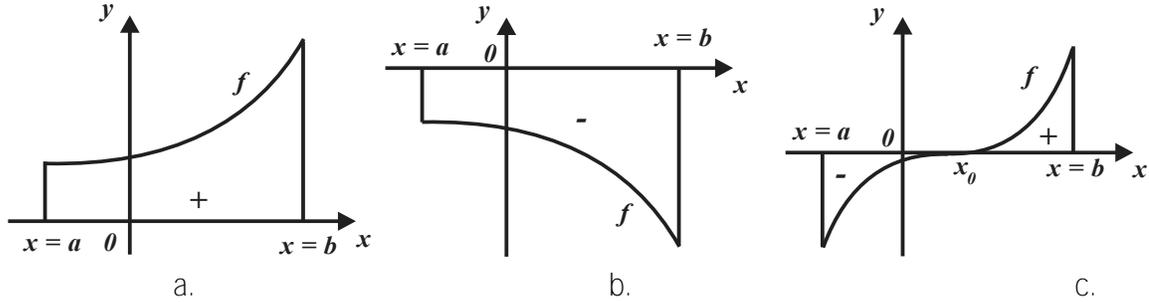


FIGURA 2.46

EJEMPLO 2.33 (ÁREA DE UNA REGIÓN)

a. La región del plano cartesiano R definida por $f(x) = x - 4$ y el intervalo $[-2, 4]$ se encuentra por abajo del eje x figura 2.47, entonces

$$\begin{aligned} A(R) &= -\int_{-2}^4 (x - 4) dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 - 4x \right]_{-2}^4 \\ &= -\left\{ \left[\frac{1}{2}(4)^2 - 4(4) \right] - \left[\frac{1}{2}(-2)^2 - 4(-2) \right] \right\} = 18 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

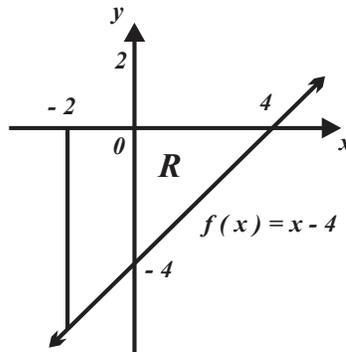


FIGURA 2.47

b. El área de la región del plano cartesiano R definida por la curva asociada a $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ sobre el intervalo $[-1, 2]$, se calcula dividiendo la región R en las subregiones R_1 y R_2 , vea la figura 2.48 y observe que a la izquierda de $x_0 = 0$ la función f es negativa y que a su derecha es positiva.

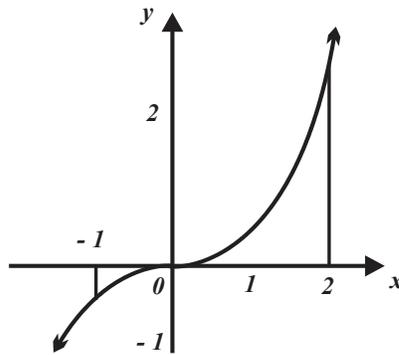


FIGURA 2.48

Esto implica $A(R) = -\int_{-1}^0 \frac{1}{3}x^3 dx + \int_0^2 \frac{1}{3}x^3 dx u^2$.

Dado que

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{3}x^3 dx = -\left[\frac{1}{12}x^4\right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} \text{ y } \int_0^2 \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{12}x^4\right]_0^2 = \frac{16}{12} - 0 = \frac{16}{12},$$

entonces

$$A(R) = \frac{1}{12} + \frac{16}{12} = \frac{17}{12} u^2.$$

c. Para determinar el área de la región R del plano cartesiano definida por la curva asociada a $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-3, 3]$, notemos que $f(x) = 4 - x^2 = 0$ si $x_{01} = -2$ y $x_{02} = 2$. Dividamos la región R en las subregiones R_1 , R_2 y R_3 , (la figura 2.49 muestra que las regiones R_1 y R_3 se encuentran por abajo del eje x), por tanto,

$$A(R) = -\int_{-3}^{-2} (4 - x^2) dx + \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx - \int_2^3 (4 - x^2) dx.$$

Puesto que

$$\int_{-3}^{-2} (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{-2} = \left[-8 + \frac{8}{3}\right] - \left[-12 + 9\right] = -\frac{7}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$

$$\int_2^3 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_2^3 = [12 - 9] - \left[8 - \frac{8}{3}\right] = -\frac{7}{3},$$

entonces

$$A(R) = -\left(-\frac{7}{3}\right) + \frac{32}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{46}{3} u^2.$$

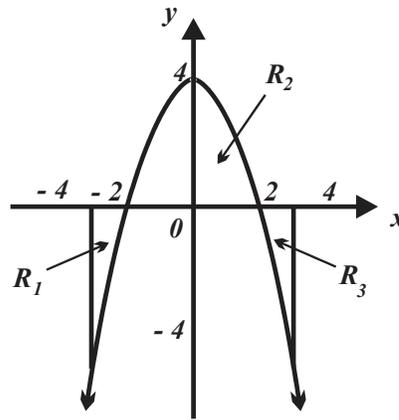


FIGURA 2.49

Es posible calcular el área de regiones del plano cartesiano de mayor complejidad que las tratadas hasta ahora, por ejemplo, determinar el área de una región encerrada por dos curvas no rectas, situación que trataremos a continuación. Para este efecto, el proceso a seguir consiste en trazar un “**rectángulo generatriz**” R_i , vea la *figura 2.50*, en la región de interés y luego utilizar la **integral definida** para “sumar” las áreas de todos los rectángulos que componen la región de interés. Sean f y g funciones tales que $f \geq g$ e integrables sobre el intervalo $[a, b]$, vea la *figura 2.50*. Sea R la región limitada por las líneas rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$ y las curvas asociadas f y g . La base del rectángulo generatriz es Δx y su altura mide $h = y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}$, por tanto, su área es

$$[f(x) - g(x)]\Delta x.$$

La “suma” de las áreas de todos los rectángulos entre $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

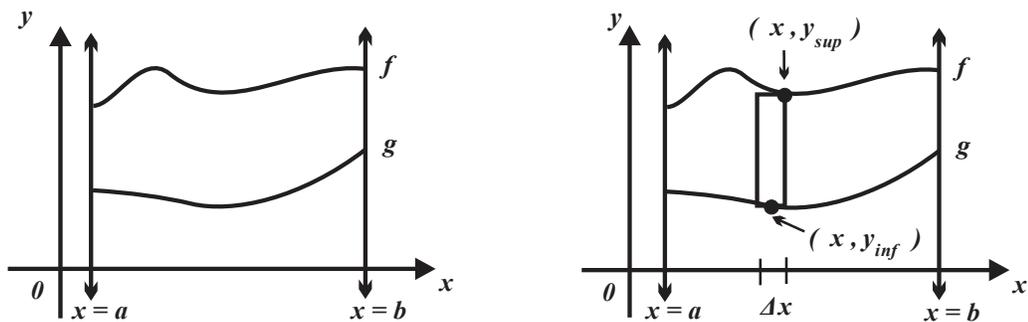


FIGURA 2.50

Al desplazar horizontalmente el rectángulo generatriz R_i sobre $[a, b]$ se “barre” toda la región R , por tanto, la relación

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

es válida; sin importar si las curvas asociadas a f y g están por encima o por debajo del eje x .

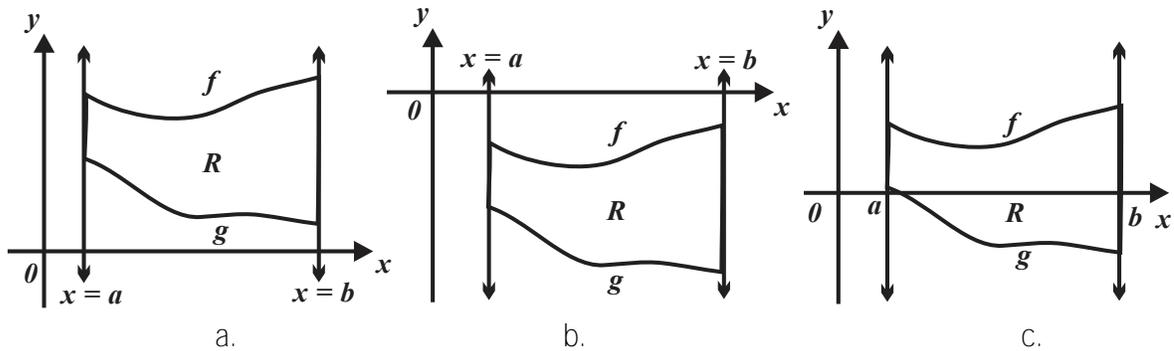


FIGURA 2.51

Para determinar el área limitada por dos curvas, es necesario verificar que se cumple la relación $f \geq g$ sobre el intervalo $[a, b]$, geoméricamente se observa que la curva asociada a f se encuentra “por encima” de la curva asociada a g .

EJEMPLO 2.34 (ÁREA ENTRE DOS CURVAS)

a. Las curvas asociadas a

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x - 1, \quad x = 0 \text{ y } x = 1$$

definen la región mostrada en la figura 2.52, note que se cumple $f \geq g$ sobre el intervalo $[0, 1]$, por tanto,

$$A(R) = \int_0^1 [\sqrt{x} - (2x - 1)] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x + 1) dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3} u^2.$$

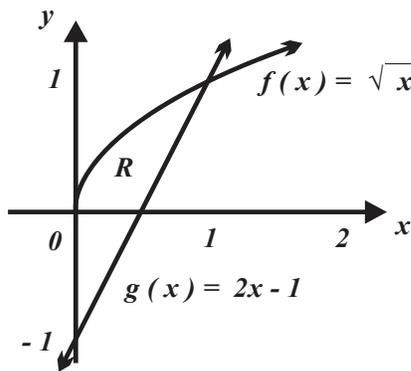


FIGURA 2.52

b. La figura 253 muestra la región del plano limitada por las curvas asociadas a $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $x = 0$ y $x = 2$.

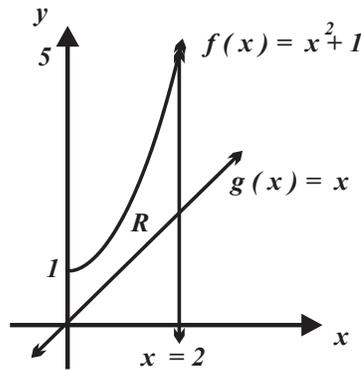


FIGURA 2.53

Note que sobre el intervalo $[0 , 2]$ la curva asociada a $f(x) = x^2 + 1$ se encuentra encima de la curva asociada a $g(x) = x$, por tanto,

$$A(R) = \int_0^2 [x^2 + 1 - x] dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} + 2 - 2 \right] - \left[\frac{0}{3} + 0 - \frac{1}{2}(0) \right] = \frac{8}{3} u^2.$$

Cuando el desplazamiento horizontal del rectángulo R_i sobre $[a , b]$

no "barre" toda la región R , el método antes descrito no se aplica, sin embargo, en ocasiones es posible determinar el área de la región R utilizando rectángulos horizontales. Si la región del plano cartesiano está acotada por dos curvas (de manera que una de ellas se encuentre a la derecha de la otra) vea la *figura 2.54*, el rectángulo generatriz tiene área

$$[f(y) - g(y)] \Delta y,$$

por tanto, la suma de las áreas de todos los elementos entre c y d es

$$A(R) = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

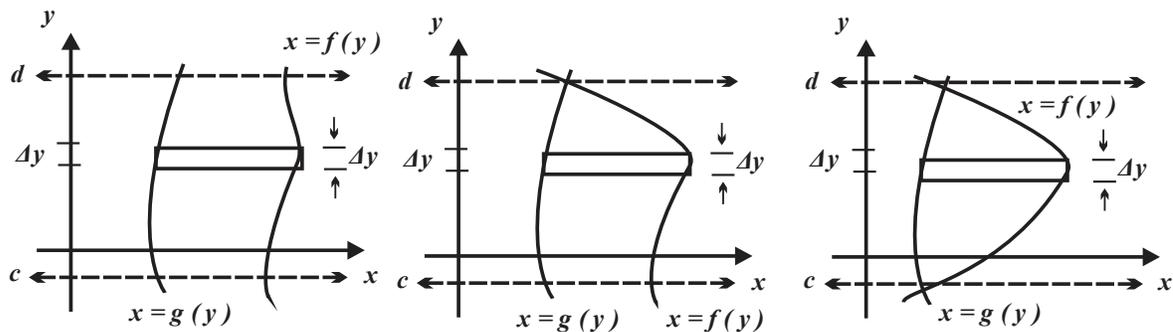


FIGURA 2.54

EJEMPLO 2.35 (ÁREA ENTRE DOS CURVAS)

Las curvas asociadas a $y^2 = x$ y $x - y = 2$ se intersecan cuando

$$y^2 = y + 2, \text{ es decir, sí } y^2 - y - 2 = 0,$$

lo cual implica $y = -1$ y $y = 2$. En la *figura 2.55*, la curva asociada a $x - y = 2$ se encuentra a la derecha de la curva asociada a $y^2 = x$, por tanto, conviene describir las funciones en términos de la variable y , obtenemos

$$f(y) = y + 2 \text{ y también } g(y) = y^2,$$

entonces

$$A(R) = \int_{-1}^2 [y + 2 - (y^2)] dx = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} u^2.$$

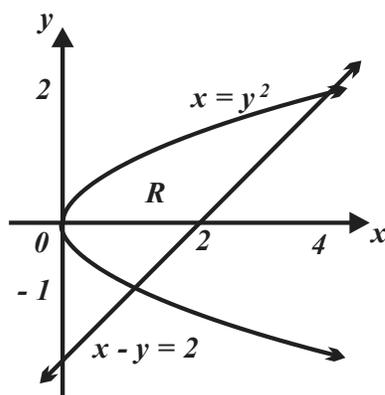


FIGURA 2.55

Si se conoce la función que describe el movimiento de un objeto, utilizando los elementos del cálculo diferencial es posible determinar su velocidad (o en su caso la rapidez), basta con obtener la derivada (o razón de cambio instantáneo) de la función movimiento y evaluarla en un tiempo específico. En cálculo integral, se opera de manera inversa, es decir, a partir de la función que describe la velocidad del objeto en movimiento, es posible analizar el comportamiento de su posición o el cambio en ella; sin embargo, es necesario tener en cuenta que términos distancia y desplazamiento (aunque en el lenguaje ordinario se utilizan como sinónimos), tienen distinto significado. En Matemáticas y Física la distancia se refiere a cuanto espacio (longitud) recorre un objeto durante el tiempo en que se mueve. Por ejemplo, en la *figura 2.56* un móvil parte del punto A , se mueve sobre la trayectoria: **8** metros al norte, **14** metros al este y finalmente **8** metros al sur, entonces la distancia total que ha recorrido es **30** metros, sin embargo, el móvil únicamente se ha desplazado **14** metros en dirección al este.

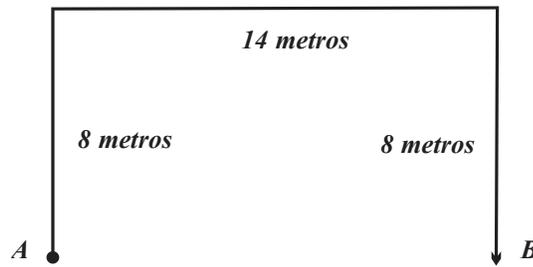


FIGURA 2.56

EJEMPLO 2.36 (DISTANCIA RECORRIDA Y DESPLAZAMIENTO)

Los objetos A , B , C y D se mueven de acuerdo con las trayectorias mostradas en la figura 2.57.

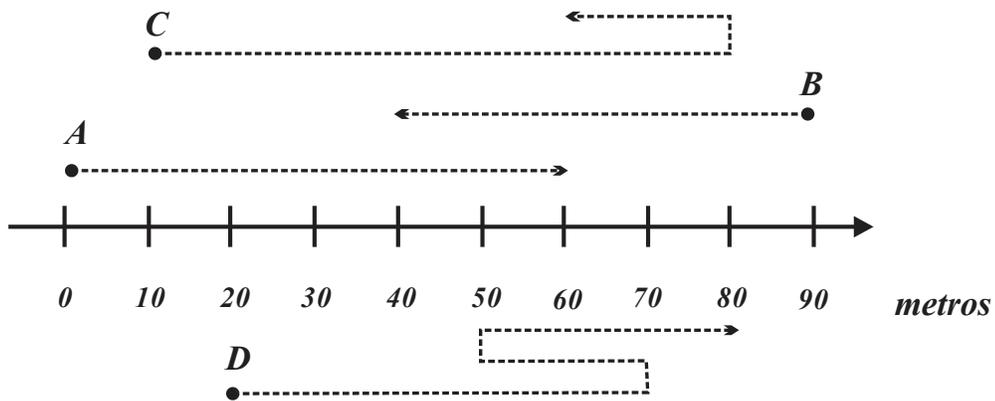


FIGURA 2.57

- El objeto A recorre una distancia de 60 metros, también se desplaza 60 metros en dirección positiva.
- El objeto B recorre una distancia de 50 metros, sin embargo, se desplaza $40 - 90 = -50$ metros en dirección negativa.
- El objeto C recorre una distancia de $70 + 20 = 90$ metros, pero se desplaza $70 - 20 = 50$ metros en dirección positiva.
- El objeto D recorre una distancia de $50 + 20 + 30 = 100$ metros, pero solo se desplazado 60 metros en dirección positiva.

EJEMPLO 2.37 (DESPLAZAMIENTO E INTEGRACIÓN)

Un objeto se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 6 - t$ metros por segundo, t representa el tiempo en segundos, vea la figura 2.58. Si la velocidad del objeto es positiva significa que se mueve hacia la derecha, en caso contrario se mueve a la izquierda.

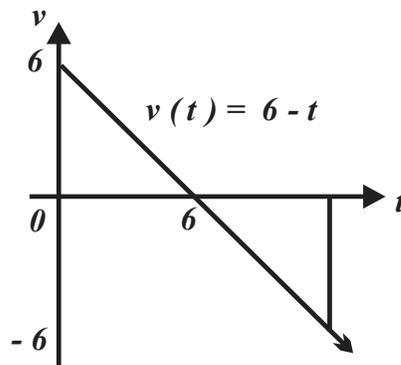


FIGURA 2.58

a. Su desplazamiento (es decir, el cambio en su posición) entre los 0 y los 6 segundos es

$$\int_0^6 (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^6 = 36 - 18 = 18 \text{ metros.}$$

La distancia que ha recorrido entre los 0 y los 6 segundos es

$$\int_0^6 (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^6 = 36 - 18 = 18 \text{ metros.}$$

b. Su desplazamiento (el cambio en su posición) entre los 0 y los 12 segundos es

$$\int_0^{12} (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{12} = 0 \text{ metros.}$$

La distancia que ha recorrido entre los 0 y los 12 segundos es

$$\int_0^{12} (6-t) dt - \int_6^{12} (6-t) dt = 36 \text{ metros (verifíquelo).}$$

c. Su desplazamiento (el cambio en su posición) entre los 0 y los 10 segundos es

$$\int_0^{10} (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{10} = 60 - 50 = 10 \text{ metros.}$$

La distancia que ha recorrido entre los 0 y los 10 segundos es

$$\int_0^6 (6-t) dt - \int_6^{10} (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^6 - \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_6^{10} = 36 + 8 = 44 \text{ metros.}$$

d. Su desplazamiento (es decir, el cambio en su posición) entre los 2 y los 8 segundos es

$$\int_2^8 (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_2^8 = 6 \text{ metros.}$$

La distancia que ha recorrido entre los 2 y los 8 segundos es

$$\int_2^6 (6-t) dt - \int_6^8 (6-t) dt = \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_2^6 - \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_6^8 = 8 + 2 = 10 \text{ metros.}$$

EJEMPLO 2.38 (INTEGRACIÓN Y CRECIMIENTO)

a. El modelo $P(t) = 43.155e^{0.2877t}$, t en horas, proporciona el crecimiento de una población de bacterias al tiempo t .

Las unidades de la función $P(t) = 43.155e^{0.2877t}$ son “bacterias / horas”, por tanto, el producto $t \cdot P(t)$ tiene unidades de bacterias, es decir, para obtener el número de bacterias es necesario integrar.

i. El total de bacterias estimadas pasando las 3 horas son

$$\int_0^3 (43.155e^{0.2877t}) dt = [150e^{0.2877t}]_0^3 \approx 206 \text{ bacterias.}$$

ii. El número de bacterias en el cultivo entre las 2 y las 5 horas es

$$\int_2^5 (43.155e^{0.2877t}) dt = [150e^{0.2877t}]_2^5 \approx 366 \text{ bacterias.}$$

b. Si el modelo $M(t) = 2.564e^{0.02564t}$, describe la rapidez de desintegración de la masa (en gramos) de cierto material radiactivo por año, entonces sus unidades son “gramos / año”. Por tanto, el producto $t \cdot M(t)$ tiene como unidades los gramos, es decir, para conocer la cantidad de masa del material radiactivo a los t años se requiere integrar la función $M(t) = 2.564e^{0.02564t}$.

i. La cantidad de masa del elemento radiactivo a los dos años es

$$\int_0^2 (2.564e^{0.02564t}) dt = [100e^{0.02564t}]_0^2 \approx 5.262 \text{ gramos.}$$

ii. La cantidad de masa del elemento radiactivo entre los dos y los cuatro años es

$$\int_2^4 (2.564e^{0.02564t}) dt = [100e^{-0.02564t}]_{20}^4 \approx 5.539 \text{ gramos.}$$

c. La función $X(t) = 693.36e^{0.366t}$ modela la rapidez de crecimiento de cierta familia de bacterias en términos del tiempo (t en horas).

i. ¿Cuál es el tamaño de la familia a los 90 minutos?

$$\int_0^{1.5} (693.36e^{0.366t}) dt = [1894.5e^{0.366t}]_0^{1.5} \approx 1386 \text{ bacterias.}$$

ii. ¿Cuál es el número de bacterias en la familia entre la primera y la tercera hora?

$$\int_1^3 (693.36e^{0.366t}) dt = [1894.5e^{0.366t}]_{01}^3 \approx 2948 \text{ bacterias.}$$

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 2.3 ▼

1. Trace la región y determine su área.

a. $f(x) = x + 4$, $g(x) = 2$, y las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$.

b. $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 1$, y las líneas rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 3$.

c. $f(x) = 4$, $g(x) = 1 - x^2$, y las líneas rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$.

d. $f(x) = 2x$, $g(x) = 1 - x^2$, y las líneas rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 3$.

2. Trace la región y determine su área.

a. $f(x) = x$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

b. $f(x) = 2x + 2$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -4$ y $x = 3$.

c. $f(x) = x^2 - 4$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -4$ y $x = 3$.

d. $f(x) = 1 + x^3$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

3. Trace la región y determine su área.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \pi$.

b. $f(x) = \operatorname{sen} x$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

c. $f(x) = \cos x$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

d. $f(x) = 1 + \cos x$, el eje x , y las líneas rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 2\pi$.

4. Trace la región y determine su área.

a. $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 6$.

b. $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$.

c. $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2 - x$.

d. $f(x) = x$ y $g(x) = x(x - 2)$.

5. Trace la región y determine su área.

a. $x = y^2$ y $x - y = 2$.

b. $x = 4 - y^2$ y $x = y - 2$.

c. $y^2 = x$ y $3x - 2y = 1$.

d. $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

6. Un objeto se mueve en línea recta (de izquierda a derecha) con la velocidad $v(t) = 4 - t^2$ metros por segundo, si t representa el tiempo, determine:

a. El desplazamiento y la distancia 3 segundos después.

b. El desplazamiento y la distancia a los 4 segundos.

c. El desplazamiento y la distancia entre los 4 y los 6 segundos.

7. Un objeto se mueve en línea recta (de izquierda a derecha) con la velocidad $v(t) = 25 - t^2$ metros por segundo, si t representa el tiempo, determine:

a. El desplazamiento y la distancia a los 3 segundos.

b. El desplazamiento y la distancia a los 4 segundos.

c. El desplazamiento y la distancia entre los 4 y los 6 segundos.

8. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad es $v(t) = t^2 - 2t - 8$ metros por segundo.

- a. Determine el desplazamiento de la partícula entre los 1 y los 6 segundos.
- b. Determine la distancia recorrida en el lapso de 1 y los 6 segundos.

9. La función $p(t) = 916e^{0.229t}$, describe la rapidez de crecimiento del número de anfibios en cierto lago en el mes t .

- a. Calcule la cantidad de individuos a los 6 meses.
- b. Calcule la cantidad de individuos entre los 6 meses y un año.

10. El modelo $p(t) = 2250e^{0.15t}$, describe la rapidez de crecimiento de una inversión a los t años.

- a. Determine el valor de la inversión a los 5 años.
- b. Determine el valor de la inversión entre los 3 y los 6 años.

11. La función $p(t) = 10000e^{0.01t}$ describe la rapidez de cambio del valor de un inmueble con el transcurso del tiempo, t representa el número de años transcurridos.

- a. Determine el valor del inmueble a los 10 años.
 - b. Determine el valor del inmueble entre los 4 y los 5 años.
-

3

LA INTEGRAL INDEFINIDA

PROPÓSITOS

Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.

CONTENIDO

1. Métodos de integración
2. Problemas contextualizados

3.1

MÉTODOS DE
INTEGRACIÓN

APRENDIZAJES

El alumno:

- | | |
|--|--|
| <p>1. Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración.</p> <p>2. Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación.</p> <p>3. Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren.</p> <p>5. Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada.</p> | <p>6. Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales.</p> <p>7. Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla.</p> <p>8. Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones.</p> |
|--|--|

TEMÁTICA

- i. Fórmulas inmediatas de integración.
- ii. Relación entre la condición inicial y la constante de integración.
- iii. Métodos de integración:
 - Cambio de variable.
 - Integración por partes.

En la unidad 2 deducimos, formalizamos y justificamos la propiedad más importante del Cálculo, propiedad que vincula al Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial, esta propiedad es el “**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**”, nuevamente la reproducimos puesto que será fundamental en el desarrollo de la presente sección.

PROPOSICIÓN 2.7 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PRIMERA PARTE)

Si la función f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ definida sobre $[a, b]$ es derivable en cada punto del intervalo (a, b) y $F'(x) = f(x)$.

Informalmente, el Teorema Fundamental del Cálculo, afirma: el “operador derivada” y el “operador integral” son inversos entre sí, es decir, $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$. La expresión anterior indica que si se integra la función f y posteriormente se deriva la función resultante, se

obtiene la función original f , así, el propósito que engloba a todos los aprendizajes a cubrir en la presente sección es

a partir de la función derivada f' , determinar la función f
(función primitiva o función antiderivada)

Para reflexionar

¿La antiderivada de una función es única? Explique.

La derivada (concretamente la función derivada) suele interpretarse en términos de la razón de cambio instantáneo de la función f al cambiar la variable x ; situación en la que resulta más conveniente el uso de la notación de Leibniz:

$$\frac{df}{dx} = f'(x), \text{ se interpreta "de } f \text{ en de } x".$$

El proceso de obtención de una función a partir de su función derivada se denomina antiderivación o integración y a la función obtenida se le llama: integral, antiderivada o primitiva.

DEFINICIÓN 3.1 (INTEGRAL ANTIDERIVADA O PRIMITIVA)
Si $F'(x) = f(x)$ para toda x en el intervalo I , entonces la función F es la antiderivada o primitiva de la función f , sobre el intervalo I ,

La figura 2.1 muestra la relación entre los procesos de integración y derivación.

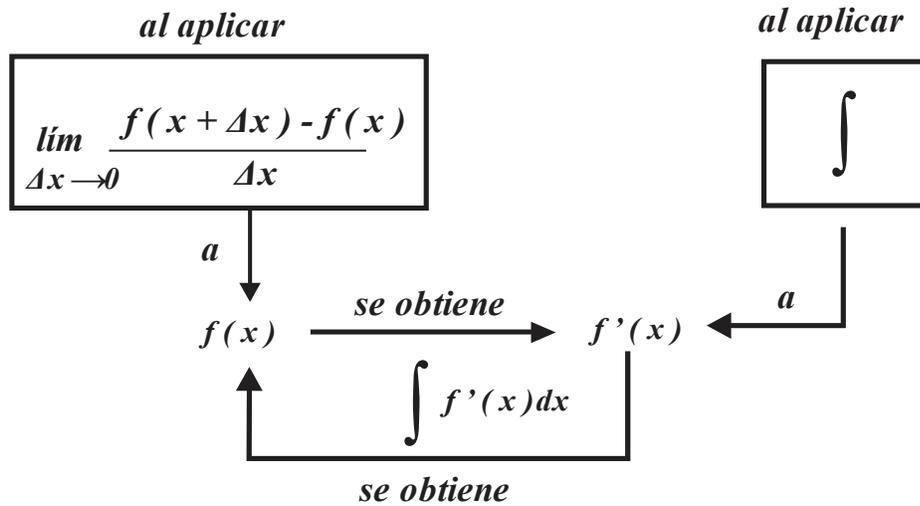


FIGURA 3.1

EJEMPLO 3.1 (ANTIDERIVADAS)

a. Antiderivadas de la función $f(x) = 8$ son las funciones:

$$F_1(x) = 8x + 5, F_2(x) = 8x - 12, F_3(x) = 8x + \frac{5}{8} \text{ y } F_4(x) = 8x - \pi,$$

entre otras, en general, si C es “una constante”, entonces $F(x) = 8x + C$ es la función antiderivada de $f(x) = 8$, puesto que

$$\frac{d}{dx}(8x + C) = 8.$$

b. Antiderivadas de la función $f(x) = 2x - 5$ son las funciones

$$F_1(x) = x^2 - 5x + 4, F_2(x) = x^2 - 5x - 6 \text{ y } F_3(x) = x^2 - 5x + \frac{3}{4},$$

entre otras, en general, para cualquier constante C , $F(x) = x^2 - 5x + C$ es antiderivada de $f(x) = 2x - 5$, puesto que $\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + C) = 2x - 5$.

c. Antiderivadas de la función

$$f(x) = e^x \text{ son las funciones } F_1(x) = e^x + \frac{1}{2}, F_2(x) = e^x - 300 \text{ y } F_3(x) = e^x + 6a,$$

entre otras. En general, si C es una “constante”, entonces $F(x) = e^x + C$ es antiderivada de $f(x) = e^x$, puesto que

$$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x.$$

Para Reflexionar

¿Puede generalizar los resultados señalados en el ejemplo 3.1?

Observe que una función, antiderivable, tiene asociada un gran número de funciones antiderivadas, mismas que difieren en una constante.

<p>PROPIEDAD 3.1 (ANTIDERIVADA O PRIMITIVA)</p> <p>F y G son (funciones) antiderivadas o primitivas de f en el intervalo I si y sólo si $G(x) = F(x) + C$ para toda x en el intervalo I, donde C es una constante.</p>
--

EJEMPLO 3.2 (FUNCIONES CON LA MISMA DERIVADA)

Si F y G son (funciones) antiderivadas o primitivas de f , entonces $G(x) = F(x) + C$.

1. Sea la función

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

derivable en el intervalo I .

2. Puesto que $F(x)$ y $G(x)$ tienen la misma derivada, entonces

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0,$$

3. Esto significa $H'(x) = 0$ y como consecuencia $H(x) = C$.

4. De las observaciones hechas en los incisos 1. y 3. concluimos $C = F(x) - G(x)$.

5. Es decir,

$$F(x) = G(x) + C,$$

las funciones $F(x)$ y $G(x)$ difieren en la constante C .

El *teorema 3.1* afirma: si la función f es antiderivable, entonces tiene asociado un conjunto de antiderivadas (llamado familia de antiderivadas), que se obtiene al agregar una constante C a una antiderivada conocida; la constante C se llama constante de integración.

EJEMPLO 3.3 (FAMILIA DE FUNCIONES)

a. Note que

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$$

entonces la familia de antiderivadas de la función es $f(x) = 3x^2$ es

$$F(x) = x^3 + C.$$

b. Puesto que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \text{cos } x,$$

entonces la familia de antiderivadas de la función $f(x) = \text{cos } x$ es

$$F(x) = \text{sen } x + C.$$

c. Si $\frac{d}{dx}(\ln x + e^x) = \frac{1}{x} + e^x$, la familia de antiderivadas de la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + e^x$$

es la función

$$F(x) = \ln x + e^x + C.$$

EJEMPLO 3.4 (FAMILIA DE FUNCIONES)

a. Si $\frac{d}{dx}(ax) = a$, entonces la familia de antiderivadas de la función

$$f(x) = a$$

es $F(x) = ax + C$.

b. Dado que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right) = ax + b,$$

entonces la familia de antiderivadas de la función $f(x) = ax + b$ es $F(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + C$.

Si la función $f(x)$ es antiderivable y su antiderivada es la familia de funciones

$$G(x) = F(x) + C,$$

a cada valor específico asignado a la constante C , corresponde una función distinta a las otras, sin embargo, el trazo de las curvas asociadas que tienen asociadas se obtiene trasladando verticalmente una de ellas, vea la *figura 3.2*.

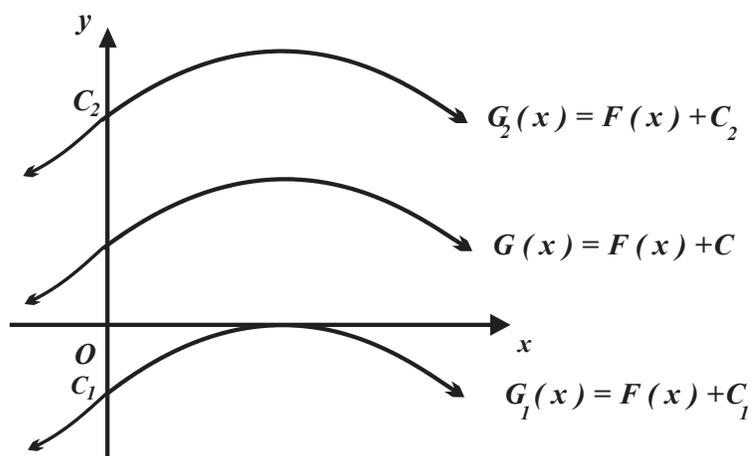


FIGURA 3.2

En ocasiones es necesario, seleccionar una función específica de una familia de funciones antiderivadas, para ello se establece la condición que debe cumplirse y se dice que se resuelve un problema de condición inicial.

EJEMPLO 3.5 (SELECCIÓN DE LA FUNCIÓN ESPECÍFICA)

a. Si $f(x) = 3$ y su antiderivada contiene al punto $p(0, 1)$, entonces:

i. Su antiderivada es $F(x) = 3x + C$.

ii. El hecho de que la antiderivada incluya al punto $p(0, 1)$ significa: si $x = 0$, entonces $F(x) = 1$, por tanto, $1 = 3(0) + C$ y $C = 1$.

La antiderivada correspondiente es

$$F(x) = 3x + 1.$$

b. Determinemos la función $F(x)$ que satisface $F(1) = 0$ y tiene como derivada $F'(x) = -\frac{3}{4}$.

i. La familia de antiderivadas es $F(x) = -\frac{3}{4}x + C$.

ii. La condición $F(1) = 0$ indica: si $F(x) = 0$ y $x = 1$, por tanto, $0 = -\frac{3}{4}(1) + C$ y $C = \frac{3}{4}$,
y como consecuencia $F(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

c. Si $f(x) = x + 5$ y su función antiderivada contiene al punto $p(1, 2)$, entonces

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

la condición “contiene al punto $p(1, 2)$ ” significa: si $x = 1$, entonces $F(x) = 2$, por tanto,

$$2 = \frac{1}{2} + 5 + C \text{ o } C = -\frac{7}{2} \text{ y la antiderivada correspondiente es la función } F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{7}{2}.$$

d. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ tal que su antiderivada contiene al punto $p(1, 2)$. Entonces la familia de

antiderivadas es $F(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + C$. Que contenga al punto $p(1, 2)$ significa: si $x = 1$,

entonces $F(x) = 2$, por tanto, $2 = \frac{1^2}{3} - 2(1) + C$ o $C = \frac{11}{3}$ y la antiderivada correspondiente es

$$F(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{11}{3}.$$

Notación de antiderivada:

En lo subsecuente utilizaremos el símbolo \int para indicar la antiderivada (o integral indefinida) de una función, vea la figura 3.3.

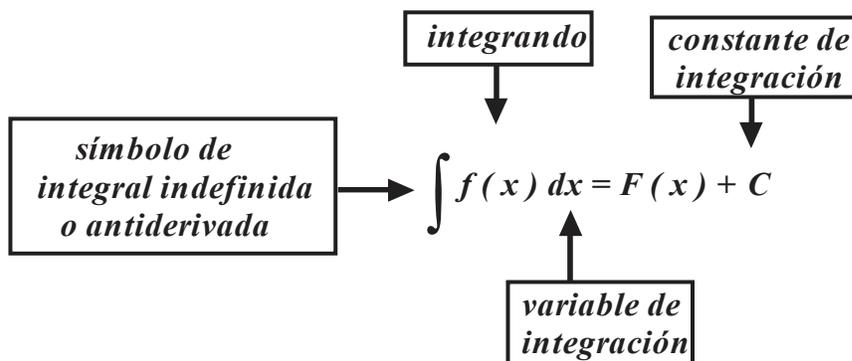


FIGURA 3.3

EJEMPLO 3.6 (NOTACIÓN)

a. La expresión $\int \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) dx$ se interpreta como la “antiderivada de la función $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ ”, por tanto,

$$\int \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) dx = \frac{1}{3}x^2 - 2x + C \text{ o } F(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + C.$$

b. La expresión $\int (ax + b) dx$ denota la “antiderivada de la función $g(x) = ax + b$ ”, por tanto,

$$\int (ax + b) dx = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C \text{ o } G(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C.$$

c. La expresión $\int k dx$ se lee “antiderivada de la función $g(x) = k$ ”, esto se escribe

$$\int k dx = kx + C \text{ o } G(x) = kx + C.$$

EJEMPLO 3.7 (VERIFICACIÓN DE ANTIDERIVADAS)

a. Si $f(x) = x$, entonces $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, puesto que $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = x$.

b. Si $f(x) = x^2$, entonces $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, puesto que $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} + C \right) = x^2$,

c. Si $f(x) = x^3$, entonces $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, puesto que $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} + C \right) = x^3$

d. Si $f(x) = x^4$, entonces $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, puesto que $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{5} + C \right) = x^4$.

La tabla 3.1 resume los resultados del ejemplo 3.7.

FUNCIÓN POTENCIA	ANTIDERIVADA O INTEGRAL
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$
$f(x) = x^4$	$F(x) = \frac{x^5}{5} + C$

TABLA 3.1

La *tabla 3.1*, muestra que el grado de la función antiderivada $F(x)$ es mayor que el grado de la función potencia $f(x)$ en 1 unidad, y que el grado de la función potencia es divisor de ella misma.

$$\text{En general, si } f(x) = x^n, \text{ entonces } F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ o } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

siempre que n sea un número entero positivo. En realidad, la afirmación anterior se cumple para todo número real n distinto de -1 .

Para reflexionar

¿Si $f(x) = x^{-1}$ cuál es su función antiderivada $F(x)$?

Las observaciones anteriores se formalizan en la *propiedad 3.2*.

PROPIEDAD 3.2 (ANTIDERIVADA DE LA FUNCIÓN $f(x) = x^n$)

a. Si n es cualquier número real, $n \neq -1$ y $f(x) = x^n$, entonces $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

b. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

EJEMPLO 3.8 (APLICACIÓN DEL TEOREMA 3.2)

	REESCRIBIR	ANTIDERIVADA	SIMPLIFICACIÓN
a. $\int (x^8) dx$		$F(x) = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C$	$F(x) = \frac{x^9}{9} + C$
b. $\int (x^{-4}) dx$		$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$
c. $\int \frac{1}{x^3} dx$	$\int x^{-3} dx$	$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
d. $\int \frac{1}{x^{-5}} dx$	$\int x^5 dx$	$F(x) = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C$	$F(x) = \frac{x^9}{9} + C$
e. $\int \sqrt{x} dx$	$\int x^{\frac{1}{2}} dx$	$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$
f. $\int \sqrt[6]{x} dx$	$\int x^{\frac{1}{6}} dx$	$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + C$
g. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$	$\int x^{-\frac{4}{3}} dx$	$F(x) = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$	$F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$

Para reflexionar

¿Si $f(x) = ax^n$ cuál es la función antiderivada $F(x)$?

¿Cuáles son las propiedades de la función antiderivada?

Puesto que la antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación, las propiedades básicas de la función derivada justifican las propiedades de la función antiderivada.

PROPIEDADES 3.3 (DE LA FUNCIÓN ANTIDERIVADA)

Si f y g son funciones antiderivables con antiderivadas

F y G ,

respectivamente, y k es cualquier número real, entonces:

a. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

b. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$.

La propiedad establecida en el inciso a. se denomina “**propiedad de aditividad**” y la establecida en el inciso b. se denomina “**propiedad del producto por una constante**”.

EJEMPLO 3.9

Del teorema 3.3 se concluye:

$$\text{sí } n \neq -1, \text{ entonces } \int ax^n dx = a \int x^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Las propiedades antes señaladas permiten antiderivar (o equivalentemente integrar funciones polinomiales), por tanto, para integrar funciones polinomiales se debe integrar cada sumando.

EJEMPLO 3.10 (APLICACIÓN DE LA PROPIEDAD 3.3)

a. $\int (3x^3 - 4x^2 + x - 1) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$.

b. $\int (x^5 - 10x + 9) dx = \frac{1}{6}x^6 - 5x^2 + 9x + C$.

c. $\int \left(4e^x - \frac{8}{x} \right) dx = 4e^x - 8 \ln x + C$.

En ocasiones es posible reducir funciones racionales a funciones polinomiales (de manera que sean iguales en casi todas partes, es decir, que sólo difieran en un número finito de puntos). Los integrandos del *ejemplo 3.11* muestran esta situación.

EJEMPLO 3.11 (INTEGRACIÓN DE FUNCIONES QUE DIFIEREN EN UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS)

$$\begin{aligned} \text{a. } \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx &= \int \frac{(x + 1)(x + 1)}{x + 1} dx = \int (x + 1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C . \\ \text{b. } \int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} dx &= \int \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} dx = \int (x - 2) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C . \\ \text{c. } \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} dx &= \int \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C . \end{aligned}$$

Ya tratamos la teoría y los métodos para determinar la antiderivada (o integral indefinida) de funciones polinomiales y de funciones que se reducen a ellas, ahora trataremos las técnicas para determinar la integral indefinida de otras.

La *tabla 3.2* presenta las integrales indefinidas o antiderivadas de las funciones básicas.

INTEGRALES INMEDIATAS
$\int k dx = kx + C .$
$\int ax^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + C ,$ siempre que $n \neq -1 .$
$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) dx = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \dots + a_0 x + C ,$ siempre que $n \neq -1 .$
$\int e^x dx = e^x + C .$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C , x > 0 .$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x + C .$
$\int \operatorname{cos} x dx = \operatorname{sen} x + C .$
$\int \operatorname{csc}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C .$
$\int \operatorname{sec}^2 x dx = \operatorname{tg} x + C .$

TABLA 3.2

Otras integrales (antiderivadas) verificables de forma inmediata son aquellas en que la variable independiente difiere en una constante de la variable x .

EJEMPLO 3.12 (OTRAS INTEGRALES INMEDIATAS)

$$a. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, \text{ siempre que } a \neq 0.$$

$$b. \int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

$$c. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + C.$$

$$d. \int \operatorname{csc}^2 ax dx = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C.$$

$$e. \int \operatorname{sec}^2 ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C.$$

EJEMPLO 3.13 (INTEGRALES INMEDIATAS)

Las siguientes integrales son inmediatas:

$$a. \int e^{-10x} dx = -\frac{1}{10} e^{-10x} + C.$$

$$b. \int \operatorname{sen} 13x dx = -\frac{1}{13} \cos 13x + C.$$

$$c. \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C.$$

$$d. \int \operatorname{sec}^2 \frac{1}{2}x dx = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + C.$$

$$e. \int \operatorname{csc}^2 \frac{2}{3}x dx = \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{sec} \frac{2}{3}x \right| + C.$$

No existe un método o algoritmo que permita obtenerlas absolutamente, sin embargo, en las siguientes líneas describiremos las estrategias y métodos básicos en su obtención.

EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El primer modelo o método de sustitución se fundamenta en la “regla de la cadena” y consiste en reconocer (o en su caso construir) la derivada de la función que compone a la función que se encuentra en el integrando. La regla de la cadena establece

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = F'(g(x))g'(x),$$

de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo se sigue:

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

0

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(u) + C \text{ sí } u = g(x).$$

Los resultados anteriores los formaliza la propiedad 3.4.

PROPIEDAD 3.4 (TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE)

Si g es una función cuyo recorrido es el intervalo I , sea f integrable en I . Si g es derivable y F es una antiderivada de f en I , entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces

$$du = g'(x)dx \text{ y } \int f(u)du = F(u) + C.$$

La figura 3.3 muestra el patrón a identificar cuando requiere utilizar el teorema del cambio de variable en la evaluación de una integral.

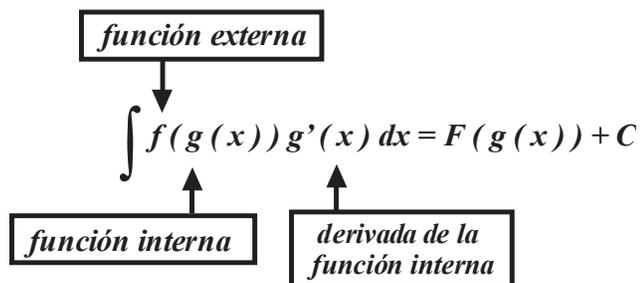


FIGURA 3.3

El ejemplo 3.14 muestra la aplicación del teorema del cambio de variable; mismo que reconoce la existencia de los elementos: $g(x)$, $f(g(x))$ y $g'(x)$.

EJEMPLO 3.14 (IDENTIFICACIÓN DE COMPONENTES)

a. En

$$\int (x^3 + x^2)^8 (3x^2 + 2x) dx,$$

el integrando puede interpretarse como

$$f(g(x))g'(x) \text{ en donde } g(x) = x^3 + x^2 \text{ y } f(x) = x^8,$$

por tanto,

$$g'(x) = 3x^2 + 2x \text{ y } f(g(x))g'(x) = (x^3 + x^2)^8 (3x^2 + 2x).$$

Entonces $\int f(g(x))g'(x)dx = \int (x^3 + x^2)^8(3x^2 + 2x)dx = \frac{1}{9}(x^3 + x^2)^9 + C$.

b. El integrando de $\int 10e^{10x} dx$ es de la forma $f(g(x))g'(x)$ donde $g(x) = 10x$ y $f(x) = e^x$, entonces $g'(x) = 10$ y $f(g(x))g'(x) = e^{10x}(10)$.

Luego $\int 10e^{10x} dx = e^{10x} + C$.

c. En $\int 4\text{sen } 4x dx$, el integrando es de la forma $f(g(x))g'(x)$.

Sean $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 4x$, entonces

$$g'(x) = 4 \text{ y } f(g(x))g'(x) = \text{sen } 4x(4) = (4)\text{sen } 4x.$$

Entonces

$$\int 4\text{sen } 4x dx = -\cos 4x + C.$$

El teorema del cambio de variable incrementa su utilidad en términos de “variable u ” y de du (o de cualquier otra variable conveniente). Este cambio de variable resulta útil para integrandos en los que no se observa de manera evidente el patrón $f(g(x))g'(x)$. El cambio de la variable original por la variable u se basa en la notación de Leibniz para la diferencial. Sean $u = g(x)$, entonces $\frac{du}{dx} = g'(x)$ y $du = g'(x)dx$ por lo que la propiedad 3.4 es equivalente a:

PROPIEDAD 3.4. a. (TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE)

Si $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ en $\int f(g(x))g'(x)dx$, entonces $\int f(u)du = F(u) + C$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

La tabla de integrales 3.2 presenta mayor utilidad si se rescribe (parte de ella) en términos de la variable u , así:

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ sí } n \neq -1.$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C, u > 0.$
$\int e^u du = e^u + C.$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$
$\int \text{sen } u du = -\cos u + C.$	$\int \cos u du = \text{sen } u + C.$
$\int \sec^2 u du = \text{tg } u + C.$	$\int \csc^2 u du = -\text{ctg } u + C.$

TABLA 3.3

EJEMPLO 3.15 (CAMBIOS DE VARIABLE)

a. En $\int (\operatorname{sen} x)^3 (\operatorname{cos} x) dx$, sea $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \operatorname{cos} x dx$, en consecuencia

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\operatorname{cos} x) dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C,$$

regresando a la variable x :

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\operatorname{cos} x) dx = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} x)^4 + C.$$

b. En $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$, sea $u = x^2 + x$, entonces

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C,$$

regresando a la variable x

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln |x^2+x| + C.$$

Los integrandos en los *ejemplos 3.15 y 3.16* presentan la forma $f(g(x))g'(x)$, sin embargo, es posible que el integrando sea distinto en un factor constante del patrón

$$f(g(x))g'(x),$$

en tal caso se multiplica por $1 = \frac{k}{k}$ para obtener la forma $k f(g(x))g'(x)$, posteriormente se utiliza la propiedad

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

EJEMPLO 3.16 (AGREGANDO UN FACTOR CONSTANTE)

a. En $\int (8+5x^2)^3 x dx$, sea $u = 8+5x^2$, luego $du = 10x dx$, así al integrando le falta el factor 10, conviene multiplicar

la integral por $1 = \frac{10}{10}$, así

$$\int (8+5x^2)^3 x dx = \frac{1}{10} \int (8+5x^2)^3 10x dx.$$

En consecuencia

$$\int (8+5x^2)^3 x dx = \frac{1}{10} \int (8+5x^2)^3 10x dx = \frac{1}{10} \int u^3 du = \frac{u^4}{40} + C = \frac{(8+5x^2)^4}{40} + C.$$

b. En $\int (x+1) \operatorname{sen}(x^2+2x+1) dx$, si $u = x^2+2x+1$, entonces $du = (2x+2) dx = 2(x+1) dx$,

por lo que conviene multiplicar la integral por $1 = \frac{2}{2}$, así

$$\begin{aligned}\int (x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+1)dx &= \frac{1}{2}\int 2(x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+1)dx \\ &= \frac{1}{2}\int (2x+2)\operatorname{sen}(x^2+2x+1)dx\end{aligned}$$

En términos de la variable u , $\int (x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u du = -\frac{1}{2}\cos u + C$,

Finalmente $\int (x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+1)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+2x+1) + C$.

c. En $\int \operatorname{sen} x e^{5\cos x} dx$, sea $u = 5\cos x$, entonces $du = -5\operatorname{sen} x$, y por tanto conviene multiplicar la integral por $1 = \frac{-5}{-5}$, así

$$\int \operatorname{sen} x e^{5\cos x} dx = -\frac{1}{5}\int -5\operatorname{sen} x e^{5\cos x} dx = -\frac{1}{5}\int e^u du = -\frac{1}{5}e^u + c = -\frac{1}{5}e^{5\cos x} + C.$$

d. Si $\int \operatorname{sen}^5 4x \cos 4x dx$, puesto que $\operatorname{sen}^5 4x = (\operatorname{sen} 4x)^5$, sea $u = \operatorname{sen} 4x$, luego

$du = 4\cos 4x dx$, conviene multiplicar la integral por $1 = \frac{4}{4}$, así

$$\int \operatorname{sen}^5 4x \cos 4x dx = \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen} 4x)^5 4\cos 4x dx = \frac{1}{4}\int (u)^5 du = \frac{u^6}{24} + c = \frac{(\operatorname{sen} 4x)^6}{24} + C.$$

e. En $\int \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} dx$, sea $u = 8+x^3$, entonces $du = 3x^2 dx$ por lo que la integral original debe multiplicarse por $1 = \frac{3}{3}$, así

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{8+x^3}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{8+x^3} + C.$$

f. En $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$, sea $u = \cos x$, entonces $du = -\operatorname{sen} x dx$, la integral debe multiplicarse por $1 = \frac{-1}{-1}$, luego,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + c = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + C.$$

g. Si en las integrales

$$\int e^{ax} dx, \int \operatorname{sen} ax dx, \int \cos ax dx, \int \operatorname{tg} ax dx, \int \sec^2 ax dx \text{ y } \int \csc^2 ax dx$$

efectuamos el cambio de variable $u = ax$ obtenemos:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C, \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C,$$

$$\int \operatorname{tg} ax dx = \frac{1}{a}\ln |\sec ax| + C, \int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C \text{ y } \int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$$

En ocasiones el integrando no sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$, sin embargo, un cambio de variable apropiado simplifica la integral.

EJEMPLO 3.17 (OTROS CAMBIOS DE VARIABLE)

a. En $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$, sea $u = x+1$, entonces $du = dx$. Puesto que el integrando contiene el factor x es necesario escribir x en términos de u , de $u = x+1$ obtenemos $x = u-1$. La integral en términos de la variable u es

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

b. En $\int x\sqrt{3x+4} dx$, sea $u = 3x+4$, entonces $du = 3dx$ y $dx = \frac{1}{3}du$. Puesto que el integrando contiene el factor x es necesario escribir x en términos de la variable u , entonces $u = 3x+4$ obtenemos $x = \frac{u-4}{3}$. Rescribiendo la integral en términos de la variable u obtenemos

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3x+4} dx &= \int \frac{u-4}{3} \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{9} \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + c = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{5} \sqrt{u^5} - \frac{8}{3} \sqrt{u^3} \right) + C \\ &= \frac{2}{45} \sqrt{(3x+4)^5} - \frac{8}{27} \sqrt{(3x+4)^3} + C \end{aligned}$$

c. Para integrar $\int \frac{2x-1}{x+3} dx$, sea $u = x+3$, luego $x = u-3$, $dx = du$. El numerador del integrando en términos de la variable u es $2x-1 = 2(u-3)-1 = 2u-7$.

Así, la integral en términos de la variable u es

$$\int \frac{2x-1}{x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2u-7}{u} du, \int \frac{2u-7}{u} du = \int \left(2 - \frac{7}{u} \right) du = 2u - 7 \ln u + C.$$

Por tanto,

$$\int \frac{2x-1}{x+3} dx = 2(x+3) - 7 \ln |x+3| + C.$$

Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente estrategia para determinar una integral indefinida por medio de una sustitución.

ESTRATEGIA A SEGUIR PARA DETERMINAR UNA INTEGRAL
UTILIZANDO UN CAMBIO DE VARIABLE

- Simplifique el integrando tanto como le sea posible.
- Elija la sustitución $u = g(x)$ a la función interna de la función compuesta del integrando.
- Calcule $du = g'(x)dx$, si observa que es proporcional al factor de la función externa del integrando, el método es el adecuado.
- Reescriba el integrando en términos de la variable u .
- Determine la integral en términos de la variable u .
- Reemplace u por $g(x)$ para obtener la integral en términos de la variable x .

El método de integración por cambio de variable (o sustitución) tiene sus limitantes, por lo que es necesario tratar otros métodos, en particular.

EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes se puede aplicar a una gran diversidad de funciones, en particular es útil si el integrando es un producto de una función algebraica y una función trascendente y se fundamenta en la relación (fórmula) para derivar un producto de funciones.

Si

$$u = u(x) \text{ y } v = v(x)$$

son funciones derivables, u' y v' son continuas, entonces

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \text{ o } (uv)' = uv' + vu'$$

Observe que al integrar ambos lados de la última ecuación obtenemos

$$uv = \int uv' dx + \int vu' dx \text{ o } uv = \int u dv + \int v du,$$

de donde

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ o } \int v du = uv - \int u dv.$$

El proceso anterior lo formaliza la *propiedad 3.5*.

PROPIEDAD 3.5 (TEOREMA DE INTEGRACIÓN POR PARTES)

Si u y v son funciones de la variable x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

La forma

$$\int u dv = uv - \int v du$$

expresa la integral original en términos de una segunda integral, que dependiendo de la forma de selección de las funciones u y a dv , debe ser la más fácil de evaluar que la integral inicial. La integración por partes es una técnica útil en la integración de productos de dos funciones, donde uno de los factores es de fácil integración y el otro se simplifica cuando se deriva.

Las siguientes líneas describen una estrategia del uso del método de integración por partes.

ESTRATEGIA A SEGUIR PARA DETERMINAR UNA INTEGRAL UTILIZANDO INTEGRACIÓN POR PARTES

- Seleccione uno de los factores del producto, el que sea relativamente más sencillo de integrar, denomínelo dv e intégrele para obtener v ; el otro factor es u .
- Determine el producto uv .
- Derive el factor u .
- Obtenga vdu .
- Forme la expresión $\int u dv = uv - \int v du$ y simplifíquela.

El *ejemplo 3.18* muestra la forma en que se aplica el teorema de integración por partes.

EJEMPLO 3.18 (INTEGRACIÓN POR PARTES)

a. En $\int xe^{3x} dx$, ambos factores x y e^{3x} son fáciles de integrar y derivar, sin embargo, el proceso de derivación simplifica a x y deja a e^{3x} prácticamente igual, entonces

$$u = x \text{ y } dv = e^{3x} dx, \text{ luego } du = dx \text{ y } v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x},$$

consecuentemente

$$\int xe^{3x} dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) + c = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

b. En $\int x \cos x dx$, ambos factores x y $\cos x$ son fáciles de integrar y derivar, sin embargo, el proceso de derivación simplifica a x y conserva la dificultad de $\cos x$ prácticamente igual, sean

$$u = x \text{ y } dv = \cos x dx, \text{ entonces } du = dx \text{ y } v = \int \cos x dx = \text{sen } x,$$

entonces

$$\int x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + C.$$

Al aplicar método una primera vez el proceso de integración por partes, éste debe conducirnos a una integral de menor complejidad que la inicial, así en *ejemplo 3.18. a.* el nombrar los factores de manera contraria, a la forma como se hizo, nos conduce a

$$\int xe^{3x} dx, \text{ sean } u = e^{3x} \text{ y } dv = x dx, \text{ entonces } du = 3e^{3x} dx \text{ y } v = \frac{x^2}{2},$$

luego

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{3x} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{3x} dx, \text{ se complica.}$$

También, si en $\int x \cos x dx$, hacemos $u = \cos x$ y $dv = x dx$, obtenemos

$$du = -\sin x dx \text{ y } v = \frac{x^2}{2}, \text{ la integral } \int x \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx,$$

se ha complicado.

EJEMPLO 3.19 (INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL)

En $\int \ln x dx$, dado que aún no conocemos la integral de $f(x) = \ln x$, la única elección posible es

$$u = \ln x \text{ y } dv = dx, \text{ luego } du = \frac{1}{x} dx \text{ y } v = x,$$

así

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

En ciertas integrales, la integración por partes conduce a otra integral que también debe integrarse por partes.

EJEMPLO 3.20 (APLICANDO VARIAS VECES EL METODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES)

a. En $\int x^2 \sin x dx$, sean $u_1 = x^2$ y $dv_1 = \sin x dx$, entonces $du_1 = 2x dx$ y $v_1 = \int \sin x dx = -\cos x$, por tanto,

$$\int x^2 \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx,$$

la integral de la derecha también se obtiene integrando por partes, sean:

$$u_2 = x \text{ y } dv_2 = \cos x dx, \text{ luego } du_2 = dx \text{ y } v_2 = \int \cos x dx = \sin x,$$

por tanto,

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right)$$

o

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

b. En $\int x^2 e^x dx$, sean $u_1 = x^2$ y $dv_1 = e^x dx$, luego $du_1 = 2x dx$ y $v_1 = \int e^x dx = e^x$,

así

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx,$$

la integral de la derecha también se obtiene integrando por partes, sean

$$u_2 = x \text{ y } dv_2 = e^x dx, \text{ entonces } du_2 = dx \text{ y } v_2 = \int e^x dx = e^x,$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right]$$

$$= x^2 e^x - 2 \left[x e^x - e^x \right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

En otras integrales, una primera integración por partes conduce a una integral que difiere en una constante de la integral original, luego deben reducirse términos semejantes.

EJEMPLO 3.21

a. En $\int e^x \operatorname{sen} 2x dx$, sean $u_1 = e^x$ y $dv_1 = \operatorname{sen} 2x dx$, entonces $du_1 = e^x dx$ y $v_1 = -\frac{1}{2} \cos 2x$, luego

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx$$

la integral de la derecha presenta la misma dificultad que la original, integremos nuevamente por partes, sean $u_2 = e^x$ y $dv_2 = \cos 2x dx$, entonces $du_2 = e^x dx$ y $v_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, luego

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \int e^x \operatorname{sen} 2x dx \right] + C_1,$$

el desarrollo de los productos da

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4} \int e^x \operatorname{sen} 2x dx + C_1$$

si reagrupamos términos semejantes obtenemos

$$\frac{5}{4} \int e^x \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \operatorname{sen} 2x + c_1,$$

$$\text{entonces } \int e^x \operatorname{sen} 2x dx = \frac{4}{5} \left[-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \operatorname{sen} 2x \right] + C.$$

b. En $\int e^{4x} \cos x dx$, sean $u_1 = e^{4x}$ y $dv_1 = \cos x dx$, entonces $du_1 = 4e^{4x} dx$ y $v_1 = \operatorname{sen} x$,

por tanto, $\int e^{4x} \cos x dx = e^{4x} \operatorname{sen} x - 4 \int e^{4x} \operatorname{sen} x dx$, la integral de la derecha presenta la misma dificultad que la original, integremos de nuevo por partes, sean:

$$u_2 = e^{4x} \text{ y } dv_2 = \operatorname{sen} x dx, \text{ entonces } du_2 = 4e^{4x} dx \text{ y } v_2 = -\cos x,$$

luego

$$\int e^{4x} \cos x dx = e^{4x} \operatorname{sen} x - 4 \left[-e^{4x} \cos x + 4 \int e^{4x} \cos x dx \right] + C_1,$$

el desarrollo de los productos da

$$\int e^{4x} \cos x dx = e^{4x} \operatorname{sen} x + 4e^{4x} \cos x - 16 \int e^{4x} \cos x dx + C_1$$

si reagrupamos términos semejantes obtenemos

$$17 \int e^{4x} \cos x dx = e^{4x} \operatorname{sen} x + 4e^{4x} \cos x + C_1 \quad 0 \int e^{4x} \cos x dx = \frac{1}{17} [e^{4x} \operatorname{sen} x + 4e^{4x} \cos x] + C_2.$$

EJERCICIOS 3.1

1. Determine la antiderivada en su forma general y verifique el resultado utilizando derivación.

a. $f(x) = 2x - 5$.

b. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$.

c. $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$.

d. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + x^3$.

e. $f(x) = (x-3)(x+1)$.

f. $f(x) = x^2(x+1)$.

g. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 5x$.

h. $f(x) = 3x - 4x^{\frac{1}{2}}$.

i. $f(x) = \sqrt{x} - 7x$.

j. $f(x) = \sqrt[4]{x} + x^{-1}$.

k. $f(x) = \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$.

l. $f(x) = \frac{6}{x^5}$.

2. Determine la antiderivada en su forma general y verifique el resultado utilizando derivación.

a. $f(x) = 3x^2 + \cos x$.

b. $f(x) = 3\operatorname{sen} x - 4\cos x$.

c. $f(x) = 3e^x + \operatorname{sen} x$.

d. $f(x) = 3^x + 2^x$.

e. $f(x) = \frac{4}{x} + 5e^x$.

f. $f(x) = -\frac{1}{x} + 3^x$.

3. "Reduzca", luego determine la antiderivada en su forma general y verifique el resultado utilizando derivación.

$$a. f(x) = \frac{3-x^2-2x^4}{x^6}.$$

$$b. f(v) = \frac{v-v^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{4}}}{v^2}.$$

$$c. f(u) = \frac{u^2-\sqrt{u}}{u^3}.$$

$$d. f(z) = \frac{z^2-4}{z+2}.$$

$$e. f(z) = \frac{z^2+5z+6}{z+2}.$$

$$f. f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}.$$

$$g. f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}.$$

$$h. f(x) = \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos} x}.$$

$$i. f(x) = \frac{e^x+4}{e^x}.$$

$$j. f(x) = \frac{e^{-x}+3}{e^{-x}}.$$

$$k. f(x) = \frac{e^{2x}-16}{e^x+4}.$$

4. Determine la función antiderivada $F(x)$

que satisface la condición específica.

$$a. f(x) = 4x-5, F(0) = 1.$$

$$b. f(x) = x^2-4x, F(0) = 2.$$

$$c. f(x) = 1-2x^2, F(1) = 1.$$

$$d. f(x) = 6x-x^2, F(4) = 0.$$

$$e. f(x) = 8x^3+5, F(1) = -4.$$

$$f. f(x) = -5x^4+5, F(0) = -2$$

5. Determine una función antiderivada $F(x)$ que satisfaga la (las) condición (condiciones) dada (dadas).

$$a. f(x) = 4x^2+1, F(0) = 2.$$

$$b. f(x) = 4\operatorname{cos} x+1, F(0) = 3.$$

$$c. f(x) = 2\operatorname{sen} x-2, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$$d. f(x) = 3e^x+x, F(0) = 4.$$

$$e. f(x) = e^x+1, F(0) = 1.$$

$$f. f(x) = e^x+e^{-x}, F(0) = 1.$$

$$g. f(x) = 6-x^2, F'(0) = 2 \text{ y } F(0) = 3.$$

$$h. f(x) = 4x, F'(0) = -3 \text{ y } F(0) = 2.$$

$$i. f(x) = e^x,$$

$$F'(0) = 1 \text{ y } F(0) = 1.$$

6. Determine la función $F(x)$ (antiderivada) cuya curva contiene al punto señalado.

$$a. f(x) = 3x+2, p(0, 2).$$

$$b. f(x) = 4x^2-4x, p(0, 1).$$

$$c. f(x) = -\frac{1}{x^2}, p(1, 2).$$

$$d. f(x) = x-x^2, p(1, 1).$$

$$e. f(x) = 4x^2+2x+1, p(1, 1).$$

$$f. f(x) = x^3-10x, p(2, 1).$$

7. Evalúe la integral utilizando la sustitución indicada.

$$a. \int -4e^{-4x} dx, u = -4x.$$

$$b. \int \frac{2x}{1+x^2} dx, u = 1+x^2.$$

$$c. \int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2} dx, u = x^2+x^3.$$

$$d. \int 5(\operatorname{sen} x)^4 \operatorname{cos} x dx, u = \operatorname{sen} x.$$

$$e. \int -\frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx, u = \ln x.$$

8. Evalúe la integral utilizando la sustitución indicada.

a. $\int \sec^2 x e^{tg x} dx$, $u = tg x$.

b. $\int \frac{3}{2} \sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x} (-\operatorname{sen} x - \cos x) dx$,

$$u = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

c. $\int 11(x^3 + 4x)^{10} (3x^2 + 4) dx$,

$$u = x^3 + 4x$$

d. $\int 4(x + \sqrt{x})^3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$,

$$u = x + \sqrt{x}.$$

9. Evalúe la integral.

a. $\int (5 - 8x)^3 dx$.

b. $\int (1 + 8x^2)^5 x dx$.

c. $\int \sqrt{x^2 + 3x} (2x + 3) dx$.

d. $\int \sqrt{t^3 + t} (3t^2 + 1) dt$.

e. $\int (t^4 + t^2)^4 (4t^3 + 2t) dt$.

10. Evalúe la integral.

a. $\int \sqrt{t^2 + 2t} (t + 1) dt$.

b. $\int \left(t - \frac{1}{t}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

c. $\int \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + 5}}\right) ds$.

d. $\int \left(\frac{s + 1}{\sqrt{s^2 + 2s + 4}}\right) ds$.

11. Evalúe la integral.

a. $\int x^3 \operatorname{sen}(x^4) dx$.

b. $\int 5e^x \cos(e^x) dx$.

c. $\int e^{3\operatorname{sen} t} (2\cos t) dt$.

d. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$.

e. $\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$.

f. $\int \sqrt{t} \operatorname{sen} \left(6 + t^{\frac{3}{2}}\right) dt$.

12. Evalúe la integral.

a. $\int \sec^2 s e^{tg s} ds$.

b. $\int 5e^{\cos s} \operatorname{sen} s ds$.

c. $\int \frac{\operatorname{sen} s}{\sqrt{1 + 4\cos s}} ds$.

d. $\int \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^3 z} dz$.

e. $\int \frac{\cos s \cdot \operatorname{sen} s}{5 + \cos^2 s} ds$.

f. $\int \frac{\operatorname{sen} s}{\sqrt{1 + 4\cos s}} ds$.

13. Evalúe la integral.

a. $\int \frac{\sqrt{4 + \ln t}}{t} dt$.

b. $\int \frac{8}{t(\ln t + 3)^4} dt$.

c. $\int \frac{4}{t \ln t} dt$.

d. $\int \frac{\operatorname{sen} e^x}{e^{-x}} dx$.

e. $\int \frac{(1 + \ln t)^6}{t} dt$.

14. Evalúe la integral.

a. $\int \frac{(1 + \ln t + \ln t^3)^2}{t} dt$.

b. $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} e^{x+\ln x} dx$.

c. $\int \frac{1 + \ln 5x}{x} dx$.

d. $\int \frac{\cos(3 + \ln x)}{10x} dx$.

15. Evalúe la integral.

a. $\int \frac{e^t + 1}{e^t} dt$.

b. $\int x^2 e^{x^3+10} dx$.

c. $\int \frac{x}{e^{-x^2}} dx$.

d. $\int (\operatorname{sen} t) e^{3\cos t} dt$.

e. $\int \ln e^{t^2} dt$.

16. Evalúe la integral.

a. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

b. $\int (1+e^t) dt$.

c. $\int \frac{e^{-t} + e^t}{e^{-t}} dt$.

d. $\int \frac{\cos(e^t + 5)}{e^{-t}} dt$.

17. Evalúe la integral utilizando la sustitución indicada.

a. $\int \frac{x+2}{x+1} dx$, $u = x+1$.

b. $\int \frac{2x+3}{x+6} dx$, $u = x+6$.

c. $\int \frac{x+4}{2x+1} dx$, $u = 2x+1$.

d. $\int x\sqrt{1-4x} dx$, $u = 1-4x$.

e. $\int (x+5)\sqrt{x+3} dx$, $u = x+3$.

18. Evalúe la integral utilizando la sustitución indicada.

a. $\int (x+1)\sqrt{3x+1} dx$, $u = 3x+1$.

b. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$, $u = 1+\sqrt{2x}$.

c. $\int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} dx$, $u = 3+\sqrt{x}$.

d. $\int \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}+1} dt$, $u = \sqrt[3]{t}+1$.

19. Evalúe la integral utilizando la sustitución indicada.

a. $\int \frac{2x+4}{x+1} dx$, $u = x+1$.

b. $\int \frac{2x}{3x+1} dx$,

$$u = 3x+1.$$

c. $\int \frac{x-2}{2x-3} dx$,

$$u = 2x-3.$$

d. $\int x\sqrt{2x+5} dx$,

$$u = 2x+5.$$

e. $\int (2x+3)\sqrt{3x-2} dx$,

$$u = 3x-2.$$

20. Las funciones seno y coseno hiperbólicos se definen por

$$\operatorname{senht} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ y } \operatorname{cosht} = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

demuestre

a. $\int \operatorname{cosht} dt = \operatorname{senht} + C$.

b. $\int \operatorname{senht} dt = \operatorname{cosht} + C$.

21. Evalúe la integral utilizando integración por partes.

a. $\int x e^{x+2} dx$.

b. $\int \frac{3x}{e^x} dx$.

c. $\int x 8^x dx$.

d. $\int x^2 \ln x dx$.

e. $\int x^4 \ln x dx$.

f. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

22. Evalúe la integral utilizando integración por partes.

a. $\int t \sqrt{t+2} dt$.

b. $\int \frac{s}{\sqrt{4+2s}} ds$.

c. $\int \frac{s}{\sqrt{s+1}} ds$.

d. $\int t \cos t dt$.

e. $\int x \operatorname{sen} x dx$.

f. $\int x \operatorname{sen} 2x dx$.

23. Evalúe la integral utilizando integración por partes.

a. $\int (\ln z)^2 dz$.

b. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x dx$.

c. $\int \cos x \cos 2x dx$.

d. $\int x(x+1)^8 dx$.

e. $\int (x+1)(x+2)^4 dx$.

f. $\int x^3 e^{x^2} dx$.

24. Evalúe la integral utilizando integración por partes.

a. $\int x^2 e^{x+3} dx$.

b. $\int \frac{x^2}{e^x} dx$.

c. $\int x^3 e^x dx$.

d. $\int x^5 \ln x dx$.

e. $\int x^8 \ln x dx$.

f. $\int t^2 \cos t dt$.

25. Evalúe la integral utilizando integración por partes.

a. $\int x^2 \cos 8x dx$.

b. $\int x^3 \cos x dx$.

c. $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$.

d. $\int 3^s s^2 ds$.

e. $\int 2^s s^3 ds$.

f. $\int x^2 3^x dx$.

g. $\int x^2 4^{-x} dx$.

26. Evalúe la integral.

a. $\int x e^{10x} dx$.

b. $\int \frac{3x}{e^{-4x}} dx$.

c. $\int (x+4)^2 e^x dx$.

d. $\int x^2 \ln(x+4) dx$.

e. $\int x^2 \ln(2x+1) dx$.

f. $\int x^3 \log_2(x+3) dx$.

27. Evalúe la integral.

a. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx.$

b. $\int (t+1)\sqrt{t+2} dt.$

c. $\int \frac{z}{\sqrt{z+3}} dz.$

d. $\int t \cos(t+4) dt.$

e. $\int t \cos 4t dt.$

28. Evalúe la integral.

a. $\int z \operatorname{sen} 10z dz.$

b. $\int (3z+2) \operatorname{sen}(3z+1) dz.$

c. $\int x^2 (x+1)^{\frac{1}{4}} dx.$

d. $\int \cos \sqrt{z} dz.$

29. Evalúe la integral.

a. $\int \operatorname{sen} \sqrt{z} dz.$

e. $\int e^{\sqrt{4x}} dx.$

b. $\int \cos(2x) e^{\operatorname{sen} x} dx.$

f. $\int \cos(\ln z) dz.$

c. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx.$

g. $\int \ln(z+2) dz.$

d. $\int \ln(4x+3) dx.$

30. Evalúe la integral.

a. $\int 4s\sqrt{4s+5} ds.$

b. $\int t\sqrt{2+t} dt.$

c. $\int \frac{z^3}{\sqrt{z^2+1}} dz.$

d. $\int x\sqrt{4+x} dx.$

31. Evalúe la integral.

a. $\int \sec^3 x dx.$

b. $\int e^{2x} \cos x dx.$

c. $\int e^{4x} \operatorname{sen} x dx.$

d. $\int x^2 \ln(x+4) dx.$

e. $\int \frac{\ln z}{z} dz.$

f. $\int z^3 \ln z dz.$

ACTIVIDADES 3.1

1. Se define las funciones hiperbólicas

$$f(x) = \operatorname{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(seno hiperbólico) y

$$g(x) = \operatorname{coshx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(coseno hiperbólico).

a. Descompóngalas en dos sumandos.

b. Anti derive los dos sumandos.

c. Obtenga sus antiderivadas.

d. Obtenga relación entre las dos funciones hiperbólicas antes definidas y sus antiderivadas.

2. La velocidad de un objeto que se desplaza con aceleración constante está dada por $\frac{dv}{dt} = a$.

a. Si inicialmente (en $t = 0$), $v(0) = v_0$, verifique que la velocidad del objeto es $v(t) = v_0 + at$.

b. Si el desplazamiento del móvil sigue la relación $\frac{dx}{dt} = v$ e inicialmente (en $t = 0$), $x(0) = x_0$, verifique que su desplazamiento es $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

3. Suponga que F y C representan las temperaturas en grados Fahrenheit y grados Celsius respectivamente.

a. Si $\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$, ¿quién es $F(C)$?

b. Si $F(0) = 32$, determine la función que describe la temperatura en grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

c. Determine la función que describe la temperatura en grados Celsius en función de los grados Fahrenheit.

4. Suponga que una población de bacterias $\frac{dP(t)}{dt}$ crece de manera que en todo

momento t es directamente proporcional a la población total de bacterias $P(t)$.

a. Si $P(t)$ representa la población total de bacterias en el tiempo t establezca el modelo que describe esta situación.

b. Si $P(t)$ representa la población total de bacterias, obtenga la antiderivada de la expresión obtenida en el inciso anterior.

c. Si inicialmente (en $t = 0$, $P(0) = P_0$) la población cuenta con P_0 bacterias demuestre que $P(t) = P_0e^{kt}$, donde k es la constante de proporcionalidad.

3.2

APLICACIONES CONTEXTUALIZADAS

APRENDIZAJES

El alumno:

7. Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.

TEMÁTICA

iv. Problemas de aplicación en diferentes contextos.

En el *ejemplo 3.1* presentamos situaciones en las que se conoce la función que describe la razón de cambio instantáneo de una función (es decir la función derivada de la función), sin embargo, en ocasiones es de interés conocer o determinar la función $f(x)$ a partir de la que se determinó la función $f'(x)$. Si este es el caso, el proceso se denomina antiderivación, y en este contexto la función $f(x)$ se denomina integral de $f'(x)$.

EJEMPLO 3.21

a. En el plano cartesiano

$$f'(x) = m_t(x)$$

describe el comportamiento de la pendiente de la línea recta que es tangente a la curva asociada a la función $f(x)$, así

$$f(x)$$

es la antiderivada de la función $f'(x)$, es decir,

$$f(x) = \int m_t(x) dx.$$

b. El cambio instantáneo de posición de un cuerpo en el instante t se representa por

$$v(t) = \frac{d}{dt}[x(t)]$$

y se le llama velocidad, así la función

$$x(t)$$

representa la posición del cuerpo al instante t y es la función antiderivada de

$$x(t) = \int v(t) dt.$$

c. El cambio instantáneo de la velocidad de un cuerpo se le llama aceleración y se representa por

$$a = \frac{d}{dt} [v(t)].$$

Así la función

$$v(t)$$

representa la velocidad del cuerpo al instante t y es la función antiderivada de

$$v(t) = \int a(t) dt.$$

d. La ley de enfriamiento de Newton establece que, la variación de la temperatura superficial $T(t)$ que experimenta un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura T_m del medio que lo rodea (o contiene), por tanto, el modelo matemático correspondiente a esta ley es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

e. La Ley de Torricelli afirma: “la razón de cambio del volumen de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua”. La formulación matemática de esta ley es

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}$$

en donde h representa la profundidad del agua y V el volumen del tanque.

f. La ley de Malthus, respecto al crecimiento de una población P , afirma que el crecimiento de una población es directamente proporcional al tamaño de la población, es decir,

$$\frac{d}{dt} [P(t)] = kP.$$

EJEMPLO 3.22 (IDENTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DEL COMPORTAMIENTO DE SU PENDIENTE)

Suponga que la curva asociada a una función f contiene al punto

$$p(1, 1)$$

y que las pendientes, de las líneas rectas que son tangentes a ella en cualquiera de los puntos, se comportan de acuerdo con la función

$$m_T(x) = 3x - 1.$$

Para determinar la función es necesario calcular

$$f(x) = \int m_T(x) dx, \text{ es decir, } f(x) = \int (3x - 1) dx,$$

entonces

$$f(x) = 3x^2 - x + C.$$

Calculemos C considerando que $f(x) = 1$, si $x = 1$, de donde

$$1 = 3(1)^2 - (1) + C \text{ o } C = -1.$$

Por tanto, la función buscada es

$$f(x) = 3x^2 - x - 1.$$

EJEMPLO 3.23 (DESPLAZAMIENTO DE UN MÓVIL)

Suponga que un móvil se desplaza horizontalmente con velocidad dada por la función

$$v(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = 9.81t - 5, \text{ a partir } x = 2.$$

Para determinar la función

$$x(t)$$

que describe su posición del móvil en cualquier instante se requiere integrar la función

$$v(t) = \frac{d}{dt}[x(t)] = 9.81t - 5,$$

por tanto,

$$x(t) = \int (9.81t - 5) dt = \frac{9.81}{2}t^2 - 5t + C.$$

Si $x = 2$ cuando $t = 0$, entonces

$$2 = \frac{9.81}{2}(0)^2 - 5(0) + C, \text{ de donde obtenemos } C = 2,$$

por tanto, la función que describe el desplazamiento del móvil es

$$x(t) = \frac{9.81}{2}t^2 - 5t + 2.$$

EJEMPLO 3.24 (MOVIMIENTO DE UN OBJETO)

Una partícula se desplaza a lo largo de un eje coordenado del plano cartesiano y su aceleración está descrita por la función

$$a(t) = (t+4)^{-3} \text{ metros sobre segundo al cuadrado.}$$

La partícula tiene una velocidad inicial de 8 metros sobre segundo. Para determinar la función que describe su velocidad, utilizamos el hecho de que su aceleración es

$$a = \frac{d}{dt}[v(t)],$$

por tanto,

$$\frac{d}{dt}[v(t)] = (t+4)^{-3}, \text{ bajo la condición } v(0) = 8$$

integrando

$$v(t) = \int (t+4)^{-3} dt \text{ o } v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + C.$$

De

$$v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + C \text{ y la condición } v(0) = 8$$

obtenemos

$$-\frac{1}{2}(0+4)^{-2} + C = 8, \text{ de donde } C = \frac{257}{32}.$$

La función que describe el desplazamiento de la partícula es

$$v(t) = -\frac{1}{2}(t+4)^{-2} + \frac{257}{32}.$$

EJEMPLO 3.25 (LANZAMIENTO DE UN PAQUETE)

Suponga que un helicóptero se eleva a una rapidez constante de 4 metros por segundo. Cuando alcanza la altura de 48 metros (sobre la horizontal) desde él se deja caer un paquete.

a. Para determinar la función que describe la velocidad del paquete consideremos que la aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra es 9.81 metros sobre segundo al cuadrado. Por tanto, se debe integrar la ecuación

$$a = \frac{d}{dt}[v(t)] = -9.81 \text{ o } v(t) = \int -9.81 dt,$$

considerando que

$$v(0) = 4.$$

Por tanto,

$$v(t) = -9.81t + C.$$

De

$$v(t) = -9.81t + C \text{ y la condición } v(0) = 4$$

obtenemos

$$4 = -9.81(0) + C \text{ y } C = 4.$$

La velocidad de caída del paquete está descrita por la función

$$v(t) = -9.81t + 4.$$

b. Determinemos la función que describe la altura $y(t)$ del paquete una vez que se ha dejado caer, puesto que

$$v(t) = \frac{d}{dt}[y(t)]$$

Es necesario que integremos la ecuación

$$\frac{d}{dt}[y(t)] = -9.81t + 4, \text{ sujeta a la condición } y(0) = 48.$$

Entonces

$$y(t) = \int (-9.81t + 4) dt \text{ o } y(t) = -\frac{9.81}{2}t^2 + 4t + C.$$

De

$$y(t) = -\frac{9.81}{2}t^2 + 4t + C$$

y de $y(0) = 48$ obtenemos

$$48 = -\frac{9.81}{3}(0)^2 + 4(0) + C, \text{ de donde obtenemos } C = 48.$$

Finalmente

$$y(t) = -\frac{9.81}{2}t^2 + 4t + 48.$$

EJEMPLO 3.26 (LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON)

Suponga que un recipiente contiene agua que inicialmente se encuentra a temperatura de 100 grados centígrados, posteriormente se traslada a un cuarto con temperatura constante de 15 grados centígrados. Transcurridos 20 minutos se enfriado a 20 grados centígrados. Para determinar la función $T(t)$ que describe el comportamiento de la temperatura en función del tiempo se utiliza la forma matemática de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{d}{dt}[T(t)] = k(T(t) - T_m).$$

De acuerdo con los datos del enunciado

$$\frac{d}{dt}[T] = k(T - 15), \text{ bajo las condiciones } T(0) = 100 \text{ y } T(20) = 20.$$

Para integrar la ecuación anterior, separamos las variables involucradas, entonces

$$\frac{dT}{T - 15} = k dt,$$

Integrando obtenemos

$$\int \frac{dT}{T - 15} = \int k dt \text{ o bien, } \ln(T - 15) = kt + C.$$

Si aplicamos las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas obtenemos

$$(T - 15) = T_0 e^{kt}, \text{ de donde } T(t) = 15 + T_0 e^{kt}.$$

De la condición $T(0) = 100$ obtenemos el valor de T_0 cómo sigue

$$100 = 15 + T_0 e^{k(0)} \text{ o bien } T_0 = 85,$$

de donde

$$T(t) = 15 + 85e^{kt}.$$

Utilizando $T(t) = 15 + 85e^{kt}$ y la condición

$$T(20) = 20$$

obtenemos el valor de k , entonces

$$20 = 15 + 85e^{(20)k} \text{ es decir, } e^{(20)k} = \frac{1}{17} \text{ y } k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{1}{17}\right) = -1.4167.$$

Por tanto,

$$T(t) = 15 + 85e^{-1.4167t}.$$

EJEMPLO 3.27 (LEY DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL)

Supongamos que una población de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Inicialmente se tienen 125 bacterias en el cultivo y 375 bacterias después de 4 horas. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de la población de bacterias?

Sea

$$N(t)$$

el número de bacterias en el tiempo t . De acuerdo con los datos en el enunciado se cumple:

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

bajo las condiciones

$$N(0) = 125 \text{ y } N(4) = 375.$$

Es decir, debemos integrar

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

bajo las condiciones

$$N(0) = 125 \text{ y } N(4) = 375.$$

De

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

obtenemos

$$\frac{dN}{N} = k dt,$$

integrando

$$\int \frac{dN}{N} = \int k dt \text{ o } \ln N = kt + C,$$

si escogemos

$$C = \ln N_0$$

obtenemos

$$\ln N - \ln N_0 = kt \text{ o } \ln \frac{N}{N_0} = kt,$$

esto implica

$$\frac{N}{N_0} = e^{kt}, \text{ por tanto, } N(t) = N_0 e^{kt}.$$

De la condición $N(0) = 125$ y de $N(t) = N_0 e^{kt}$, se obtiene $N(t) = 125 e^{kt}$.

De la condición $N(4) = 375$ y de $N(t) = 125 e^{kt}$, se obtiene $375 = 125 e^{4k}$ o $3 = e^{4k}$.

Aplicando la función logaritmo natural y despejando da

$$k = \frac{1}{4} \ln 3.$$

La función que describe el comportamiento de la población de bacterias es

$$N(t) = 125e^{\left(\frac{1}{4}\ln 3\right)t} \text{ o } N(t) = 125 \cdot 3^{\frac{1}{4}t}.$$

EJEMPLO 3.28 (LEY DE TORRICELLI)

La Ley de Torricelli afirma: "la razón de cambio del volumen de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua".

Suponga que un tanque cilíndrico de radio $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ centímetros y 16 centímetros de altura, inicialmente

lleno, tarda 40 segundos en vaciarse. Para obtener la función que describe el volumen en el tanque, aplicamos la ley de Torricelli

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h},$$

por otra parte, el volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{10}{\sqrt{\pi}} \right)^2 h = 100h, \text{ entonces } h = \frac{V}{100}.$$

De las ecuaciones

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h} \text{ y } h = \frac{V}{100}$$

obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = k \frac{\sqrt{V}}{10} \text{ o equivalentemente } V^{-\frac{1}{2}} dV = k_1 dt \text{ con } k_1 = \frac{k}{10}.$$

Integrando

$$\int V^{-\frac{1}{2}} dV = \int k_1 dt,$$

esto implica

$$2V^{\frac{1}{2}} = k_1 t + C, \text{ si } k_2 = \frac{k_1}{2} \text{ y } C_1 = \frac{C}{2}, \text{ entonces } V(t) = (k_2 t + C_1)^2.$$

De la condición

$$V(0) = 16 \text{ obtenemos } 16 = ((0)k_2 + C_1)^2 \text{ o } C_1 = 4,$$

por tanto,

$$V(t) = (k_2 t + 4)^2.$$

De la condición

$$V(40) = 0, \text{ obtenemos } 0 = (40k_2 + 4)^2,$$

de donde $k_2 = -\frac{1}{10}$. La función es

$$V(t) = \left(-\frac{1}{10}t + 4 \right)^2.$$

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 3.2 ▼

1. La curva asociada a f contiene el punto $p(-1, 2)$ y las pendientes de sus líneas rectas tangentes en sus puntos se comportan de acuerdo con la función $m_T(x) = 3x^2 + 2x$, determine $f(x)$.
2. La curva asociada a $f(x)$ contiene el punto $p(-1, 1)$ y las pendientes de sus líneas rectas tangentes en sus puntos se comportan de acuerdo con la función $m_T(x) = -x^2 + 2x$, determine $f(x)$.
3. La curva asociada a $f(x)$ contiene el punto $p(1, 6)$ y las pendientes de sus líneas rectas tangentes en sus puntos se comportan de acuerdo con la función $m_T(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2$, determine $f(x)$.
4. Un objeto se desplaza de modo que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 3 + t + 4t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el segundo minuto? (suponga que parte del reposo).
5. Un objeto se desplaza de modo que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 1 + 8t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el cuarto minuto? (suponga que parte del reposo).
6. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 60 metros por segundo.
 - a. ¿Cuál es su velocidad en cualquier instante si se supone que se desacelera a aproximadamente 9.8 metros por segundo cuadrado?
 7. Desde una torre de 100 metros de altura se lanza un objeto verticalmente y hacia arriba con una velocidad constante de 98 metros por segundo, Determine:
 - a. La máxima altura alcanzada por el objeto respecto al suelo y el tiempo requerido para ello.
 - b. El tiempo transcurrido hasta que el objeto llega al suelo.
 - c. La velocidad con que llega al suelo.
 8. Un objeto que inicialmente tiene temperatura de 70 grados centígrados, se coloca un medio a 40 grados centígrados. Transcurridos tres minutos, la temperatura del objeto es 60 grados centígrados. De acuerdo con el modelo de enfriamiento de Newton, ¿cuál es la función que describe la temperatura del objeto?
 9. A las 16:00 horas se encontró el cadáver de un gato. El veterinario llegó a las 16:30 horas y le tomó la temperatura, siendo esta de 28 grados centígrados. Dos horas después la temperatura del gato que registró el veterinario fue 22 grados centígrados. Si la temperatura del lugar donde fue encontrado el cadáver del gato era 16 grados centígrados (constante), determine la función que describe la temperatura del cuerpo del gato. ¿A qué hora murió el gato?

10. Supongamos que una población de bacterias incrementa su número continuamente en una tasa que es proporcional a su número actual.

Que la población inicial de bacterias es **140** ; que aumentó a **720** bacterias en 4 horas. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de la población de bacterias?

11. Supongamos que una población de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Inicialmente había **100** moscas antes del segundo día del experimento y **300** moscas después del cuarto día. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de la población de moscas?

ACTIVIDADES 3.2

1. Se definen las funciones hiperbólicas:

$$f(x) = \operatorname{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(seno hiperbólico) y

$$g(x) = \operatorname{coshx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(coseno hiperbólico).

- Descompóngalas en dos sumandos.
- Antiderive los dos sumandos.
- Obtenga sus antiderivadas.
- Obtenga la relación entre las dos funciones hiperbólicas (antes definidas) y sus antiderivadas.

2. La velocidad de un objeto que se desplaza con aceleración constante está dada por $\frac{dv}{dt} = a$.

a. Si inicialmente (en $t = 0$), $v(0) = v_0$, verifique que la velocidad del objeto es

$$v(t) = v_0 + at.$$

b. Si el desplazamiento del móvil sigue la relación $\frac{dx}{dt} = v$ e inicialmente (en $t = 0$), $x(0) = x_0$, verifique que su desplazamiento es

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

3. Suponga que F y C representan las temperaturas en grados Fahrenheit y grados Celsius respectivamente.

- Si $\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$, ¿quién es $F(C)$?
- Si $F(0) = 32$, determine la función que describe la temperatura en grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.
- Determine la función que describe la temperatura en grados Celsius en función de los grados Fahrenheit.

4. Suponga que una población de bacterias $\frac{dP(t)}{dt}$ crece de manera que en todo

momento t es directamente proporcional a la población total de bacterias $P(t)$.

a. Si $P(t)$ representa la población total de bacterias en el tiempo t establezca el modelo que describe esta situación.

b. Si $P(t)$ representa la población total de bacterias, obtenga la antiderivada de la expresión obtenida en el inciso anterior.

c. Si inicialmente (en $t=0$, $P(0)=P_0$) la población cuenta con P_0 bacterias demuestre que $P(t)=P_0e^{kt}$, donde k es la constante de proporcionalidad.

4

MODELOS Y PREDICCIÓN

PROPÓSITOS

Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.

CONTENIDO

1. Antecedentes y términos
2. Un modelo de crecimiento y predicción

4.1

ANTECEDENTES
Y TÉRMINOS

APRENDIZAJES

El alumno:

1. Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t).$$

2. Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t) \text{ y lo aplica en algunos}$$

ejemplos.

3. Identifica que la solución general del

$$\text{modelo } \frac{dp(t)}{dt} = kp(t) \text{ es una familia de}$$

funciones definida por los valores de c .

4. Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación dada y llega a un modelo del tipo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

5. Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación.

6. Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.

7. Reconoce la importancia del modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

TEMÁTICA

ii. Método de separación de variables.

Las leyes que regulan el comportamiento de los fenómenos que ocurren en nuestro entorno están, en una buena parte, escritas en el lenguaje de las matemáticas; el álgebra suele utilizarse para tratar problemas estáticos (que no dependen explícitamente del tiempo), sin embargo, los fenómenos naturales y sociales más interesantes cambian al transcurrir el tiempo y gran variedad de ellos pueden ser modelados por ecuaciones que relacionen una de sus cantidades variables con el transcurso del tiempo (que es también variable). En el estudio de un fenómeno, una vez que se ha formulado un modelo matemático el siguiente paso consiste en resolverlo, si podemos resolverlo debemos verificar que tan buena es la descripción que proporciona sobre el comportamiento real de la situación en estudio, en caso de que las estimaciones y predicciones no concuerden o sean deficientes el modelo debe refinarse o ser desechado, **indudablemente que un mayor “refinamiento”** de un problema implica un mayor número de hipótesis en su formulación y como consecuencia una mayor dificultad en la obtención de su solución.

En la presente sección trataremos situaciones u objetos en las que dos de sus características están relacionadas, son variables y también son medibles. Por otra parte, recordemos que entre los propósitos básicos de los cursos de cálculo diferencial se encuentra el estudio y comprensión del

comportamiento del cambio de las funciones, en particular, se responde la pregunta ¿si en una **función (real de variable real) el valor de la variable independiente cambió “instantáneamente”**, ¿cuánto y cómo cambió la variable dependiente? La respuesta a la pregunta anterior conduce al concepto de derivada y su posterior estudio.

EJEMPLO 4.1 (RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS)

a. El cambio instantáneo de la temperatura $T(t)$ de un objeto, que se enfría o se calienta, con el transcurso del tiempo, en términos de la función derivada, se representa con la ecuación

$$T'(t) = \frac{dT(t)}{dt}.$$

b. Si $x(t)$ representa la posición de una partícula en el tiempo t , entonces el cambio de su posición se denomina desplazamiento, el cambio de posición al transcurrir el tiempo se denomina velocidad o rapidez y se representa por $\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$.

c. Si $v(t)$ representa la velocidad de una partícula en el tiempo t , entonces el cambio de su velocidad al transcurrir el tiempo se denomina aceleración y se representa por

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}, \text{ o también por } a = \frac{dv}{dt}.$$

d. Si la función $m(t)$ representa la masa de una sustancia en el tiempo t , entonces $\frac{dm}{dt} = m'$ describe el cambio de la masa en el tiempo t .

e. Si la función $c(q)$ describe el costo total de producir y comercializar q gramos de un producto, entonces la función $c'(q) = \frac{dc}{dq}$ se denomina costo marginal y describe el comportamiento instantáneo del costo marginal, es decir, de producir y comercializar q gramos del producto

f. Si la función $p(t)$ describe el tamaño de la población total de cierta región en el tiempo t , entonces la función $p'(t) = \frac{dp}{dt} = c(t)$ describe es cambio instantáneo de la población en el tiempo t .

Los modelos de las situaciones planteadas en el *ejemplo 4.1* pueden representarse por la ecuación $\frac{dy}{dt} = F(t)$ que recibe el nombre de ecuación diferencial, en ella la incógnita es la función y .

DEFINICIÓN 4.1 (ECUACIÓN DIFERENCIAL)

- Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra a una función y su(s) derivada(s).
- Cualquier función que satisfaga a una ecuación diferencial se denomina solución de la ecuación diferencial.

En general, el modelo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es $y' = F(x, y)$. La incógnita no es el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma.

EJEMPLO 4.2 (ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS)

Son ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dt} = 4t^2 - 2, \text{ también } \frac{dF}{dt} = kF, \text{ asimismo } \frac{dR}{dt} = R^2 - 2R.$$

En esta sección únicamente trataremos ecuaciones diferenciales en donde la derivada de la función involucrada depende explícitamente de la variable independiente, es decir, ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t),$$

y cuyo método de solución consiste en aplicar el teorema fundamental del cálculo, para determinar la función $f(t)$, por tanto, es decir, $y(t) = \int f(x) dx + C$.

El lector debe tener en cuenta que el proceso de determinación de la función $f(t)$ puede ser engorroso e incluso resultar imposible, por tanto, sólo trataremos ecuaciones diferenciales en las que la función $f(x)$ **acepta una "integración inmediata"**.

EJEMPLO 4.3 (RESOLUCIÓN DIRECTA DE ECUACIONES DIFERENCIALES)

a. Si $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, entonces $dy = \frac{1}{t} dt$, integrando obtenemos $y(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C$, siempre que $t > 0$.

b. Si $\frac{dy}{dt} = 3 + \cos t$, entonces $dy = (3 + \cos t) dt$, luego $y(t) = \int (3 + \cos t) dt$ y al integrar obtenemos

$$y(t) = 3t + \text{sen } t + C.$$

c. Si $\frac{dy}{dt} = t - t^2$, entonces $dy = (t - t^2) dt$, al integrar obtenemos $y(t) = \int (t - t^2) dt$, por tanto,

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C.$$

DEFINICIÓN 4.2 (SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL)

Si se sustituye la función $y(t)$ (junto con su derivada) en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t)$ y se obtiene una identidad, entonces $y(t)$ es solución de ella.

EJEMPLO 4.4 (VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL)

- a. La función $y(t) = \ln t + C$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, puesto que $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$.
- b. La función $y(t) = 3t + \text{sen } t + C$ es solución de $\frac{dy}{dt} = 3 + \cos t$ puesto que $\frac{dy}{dt} = 3 + \cos t$.
- c. La función $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$ es solución de $\frac{dy}{dt} = t - t^2$, puesto que $\frac{dy}{dt} = t - t^2$.

Note que una ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones (no tiene solución única), por ejemplo, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 5$ admite como soluciones a las funciones:

$$y_1(t) = 5t + 8, \quad y_2(t) = 5t - 3, \quad \text{o bien a la función } y_3(t) = 5t - \frac{1}{3},$$

y muchas otras. La forma genérica de las funciones solución anteriores es $y(t) = 5t + C$, por lo que se dice que:

- i. La solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 5$ es la función $y(t) = 5t + C$.
- ii. Las funciones

$$y_1(t) = 5t + 8, \quad \text{también } y_2(t) = 5t - 3, \quad y_3(t) = 5t - \frac{1}{3},$$

entre otras, son soluciones particulares de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 5$.

La solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t)$ es la función $y(t) + C$ (función que esta función incluye la *constante C*), y tiene asociada una familia de funciones solución, una solución (particular) para cada valor de C . La figura 4.1 muestra a la curva asociada a la función $y(t) + C$ y una curva específica para cada valor de C .

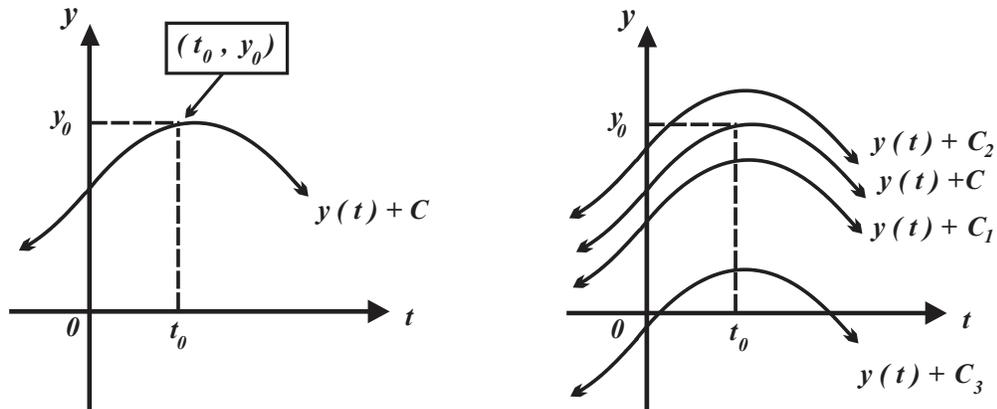


FIGURA 4.1

Si en una ecuación diferencial se agrega una condición, que debe satisfacer su solución general, al resolverla se obtiene una solución particular, y en este caso decimos que **se tiene un “problema de condición inicial”**.

DEFINICIÓN 4.3 (PROBLEMA DE VALOR INICIAL)

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t)$ sujeta a la condición $y(t_0) = y_0$ se conoce como problema de valor inicial.

Un primer método en la resolución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden consiste en **“separar las variables”**, cada variable en un miembro de la ecuación, y posteriormente integrar (por esta razón el método se llama **“separación de variables”**).

DEFINICIÓN 4.4 (ECUACIÓN DIFERENCIAL SEPARABLE)

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$ se denomina separable si puede escribirse en la forma

$$\int f(y) dy = \int g(t) dt.$$

EJEMPLO 4.5 (SEPARANDO VARIABLES)

Para resolver la ecuación diferencial $y' = 4y$, se rescribe y' en términos de la notación de Leibniz, es decir, en la forma $\frac{dy}{dt} = 4y$ y se consideran $\frac{dy}{dt}$ como una división de cantidades “infinitamente pequeñas”, con estas suposiciones podemos escribir

$$\frac{dy}{y} = 4dt,$$

en donde las variables t y y se encuentran separadas (variables iguales en cada miembro de la ecuación), si integramos ambos miembros obtenemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int 4 dt, \text{ entonces } \ln y + C_1 = 4t + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes (números), sin embargo, la ecuación se puede escribir en forma más sencilla utilizando una sola constante de integración, así

$$\ln y = 4t + C_3 \text{ cuando } C_3 = C_2 - C_1.$$

Si despejamos y obtenemos $y = e^{4t+C_3}$, o bien $y = e^{4t} e^{C_3}$; haciendo $C = e^{C_3}$ y sustituyendo en la última ecuación obtenemos

$$y(t) = Ce^{4t}.$$

EJEMPLO 4.6 (SEPARANDO VARIABLES)

a. Para determinar la solución de la ecuación

$$3t^2 - 4y \frac{dy}{dt} = 0,$$

separamos las variables involucradas, $4y \, dy = 3t^2 \, dt$, posteriormente al integrar obtenemos

$$\int y \, dy = \int \frac{3}{4} t^2 \, dt,$$

por tanto,

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^3}{4} + C, \text{ o bien } y(t) = \sqrt{\frac{t^3}{2} + C}.$$

b. La ecuación

$$(t^2 + 9) \, dy - 2ty \, dt = 0$$

es separable y se puede reescribir como

$$\frac{dy}{y} = \frac{2t}{(t^2 + 9)} \, dt,$$

Al integrar obtenemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2t}{(t^2 + 9)} \, dt, \text{ o bien } \ln y = \ln(t^2 + 9) + K.$$

Si hacemos $K = \ln C$, entonces

$$\ln y = \ln(t^2 + 9) + \ln C = \ln C(t^2 + 9),$$

al aplicamos la función exponencial natural obtenemos

$$y = C(t^2 + 9), \text{ o bien en forma explícita } y(t) = C(t^2 + 9).$$

EJEMPLO 4.7 (SEPARANDO VARIABLES)

Para resolver $y' = \text{sen} 3t$ primero escribimos y' en notación de Leibniz como $\frac{dy}{dt}$, así

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen } 3t.$$

Al separar variables obtenemos

$$dy = \text{sen } 3t \cdot dt.$$

Si integramos ambos miembros obtenemos

$$\int dy = \int \text{sen} 3t \, dt, \text{ o bien } y(t) = -\frac{1}{3} \cos 3t + C.$$

EJEMPLO 4.8 (PROBLEMA DE VALOR INICIAL)

a. Para determinar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2t^2 + 4y \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases},$$

separamos las variables y obtenemos

$$4y \, dy = -2t^2 \, dt,$$

integrando obtenemos

$$\int y \, dy = -\int \frac{1}{2} t^2 \, dt,$$

por tanto,

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{t^3}{6} + C, \text{ o bien } y(t) = \sqrt{-\frac{t^3}{3} + C}.$$

La condición $y(0) = 2$ significa: "si $t = 0$, entonces $y = 2$ ", por tanto

$$2 = \sqrt{-\frac{0^3}{3} + C}, \text{ o bien } C = 4.$$

La solución del problema de valor inicial $\begin{cases} 2t^2 + 4y \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ es $y(t) = \sqrt{-\frac{t^3}{3} + 4}$.

b. Para determinar la solución (particular) del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ debemos

separar las variables x y y de ella. Rescribimos $y' = 2xy^2$ con diferenciales $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, de donde

$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx$, integrando obtenemos

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x \, dx \text{ o bien } -\frac{1}{y} = x^2 + C, \text{ por tanto,}$$

$$y(t) = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

La condición $y(1) = 1$ indica: "si $t = 1$, entonces $y = 1$ ", por tanto,

$$1 = -\frac{1}{1^2 + C} \text{ y } C + 1 = -1, \text{ o bien } C = -2.$$

La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

es la función

$$y = -\frac{1}{x^2 - 2}, \text{ o bien } y(x) = -\frac{1}{x^2 - 2}.$$

EJEMPLO 4.9 (PROBLEMA DE VALOR INICIAL)

a. Obtengamos la solución problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -4y \\ y(0) = A_0 \end{cases}$$

La ecuación $y' = -4y$ escrita en términos la notación de Leibniz es $\frac{dy}{dt} = -4y$, al separar las variables obtenemos

$$\frac{dy}{y} = -4 dt, \text{ o bien } \int \frac{dy}{y} = \int -4 dt, \text{ integrando } \ln y - \ln c = -4t, \text{ luego } \ln \frac{y}{C} = -4t, \text{ o bien}$$

$$\frac{y}{C} = e^{-4t},$$

Por tanto, la solución general es $y(t) = Ce^{-4t}$.

La condición $y(0) = A_0$ significa: "si $t = 0$, entonces $y = A_0$ ", por tanto, $A_0 = Ce^0 = C$ y.

La solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = -4y \\ y(0) = A_0 \end{cases}$ es la función $y(t) = A_0 e^{-4t}$.

El modelo $\frac{dy}{dt} = ky$ lo trataremos detalladamente en la *sección 4.2.*, por ser de gran interés y aplicabilidad (como una primera aproximación), en el estudio del crecimiento de poblaciones.

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 4.1 ▼

1. En cada caso construya un modelo (ecuación).
 - a. Cierta teoría relativa al aprendizaje afirma: "A mayor rapidez de aprendizaje de un tema mayor olvido del tema".
 - b. La rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio que lo contiene y su propia temperatura.
 - c. El cambio del "alargamiento" de un resorte es proporcional a dicho alargamiento.
 - d. La fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa constante m es proporcional a la razón de cambio en tiempo del "momentum" del cuerpo.
 - e. Se introduce aire a un globo esférico de radio r a razón de 5 litros por minuto. ¿Cuál es el modelo que describe el ritmo de cambio del radio r del globo en función del tiempo?
 - f. En un lago se deja caer un objeto, lo que genera ondas circulares que se propagan alrededor del lugar en que cayó el objeto. Si el radio r de la onda circular exterior crece a ritmo constante de 10 centímetros por segundo, ¿cuál es el modelo que describe el crecimiento del área A perturbada en función del tiempo?

g. En tinaco cilíndrico de radio **5** metros, se vierte agua a razón constante de **25** litros por segundo. Determine el modelo que describe la rapidez a la que aumenta el nivel del agua en función del tiempo.

h. El valor V neto de una compañía aumenta a una tasa continua del **2%** anual. Sin embargo, al mismo tiempo sus obligaciones son de **5** millones de pesos anuales pagados en forma continua. ¿Cuál es el modelo que describe el valor de la compañía?

i. Sea V el volumen de agua salada en un tanque y $S(t)$ la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t . ¿Cuál es la concentración de sal en cualquier tiempo t ? Suponga que la concentración de sal es uniforme en todo el tanque y que luego entra (al tanque) una solución salina con concentración s a una razón r . Para mantener el volumen constante se drena solución del tanque a la misma razón r a la que entra, ¿cuál es el modelo que representa cantidad de sal en cualquier instante?

2. Construya un modelo para cada situación.

a. El dinero en una cuenta bancaria crece proporcionalmente a una razón r anual.

b. La rapidez con que aumenta el grosor de la capa de hielo (por ejemplo, en un refrigerador) es inversamente proporcional al grosor G .

c. En cierta ciudad, el polvo P se acumula a una razón de **2** gramos por centímetro cuadrado por año. Al mismo tiempo desaparece a una razón constante del **80%** por año.

d. La rapidez a la que disminuye la presión barométrica P con la altitud es proporcional a la presión barométrica a esa altitud.

e. La rapidez con que aumenta la temperatura T , de una botella de jugo extraída de un refrigerador a una temperatura de -10°C y puesta en una sala a 23°C (suponga proporcionalidad).

f. Inicialmente, un tanque contiene **100** litros de una mezcla al **20%** de alcohol con agua. Se extrae la mezcla a razón constante de **10** litros por hora y, al mismo tiempo se reemplaza por otra mezcla **30%** de alcohol.

g. Un joyero invierte comprando oro. El valor V neto del kilogramo de oro aumenta a una tasa continua del **20%** anual y al mismo tiempo tiene que pagar **100** pesos por kilogramo, por el concepto de almacenamiento. ¿Cuál es el modelo que describe el valor del oro adquirido?

3. Separe variables y resuelva la ecuación diferencial.

a. $x(2y+1)dx - (x^2+1)dy = 0$.

b. $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+4}{4y}$.

c. $\frac{dy}{dt} = e^{2t-2y}$.

d. $\sqrt{2ty} \frac{dy}{dt} = 1$.

e. $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$.

f. $\frac{dy}{dt} = 8t$.

g. $y\sqrt{3t^2+3} dy - t\sqrt{4-y^2} dt = 0$.

h. $t\sqrt{t^2+3} dt + 4y\sqrt{y^2+1} dy = 0$.

i. $dy - kydt = 0$.

j. $\ln y \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$.

k. $3x^2(y^2 + 4)dx - 2y\sqrt{x^3 + 1}dy = 0$.

l. $t \frac{dy}{dt} = 5y + 2$.

m. $te^y dy + \frac{t^2 + 4}{y} dt = 0$.

n. $y \cdot y' = 4\cos t$.

4. Separe variables y resuelva la ecuación diferencial, verifique su solución.

a. $y \frac{dy}{dx} = e^{y^2 - 2x}$.

b. $dT - k(T - 10)dt = 0$.

c. $4y y' - 5e^t = 0$.

d. $\frac{dr}{d\theta} + \theta e^\theta = 0$.

e. $y \frac{dy}{dx} + 2 = e^x + \frac{dy}{dx}$.

f. $\frac{dy}{d\theta} = y \cos \theta + y \sen \theta$.

g. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\theta - r}{r\theta + \theta}$.

h. $(x^2 + 5) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}(y^2 + 5)$.

i. $(4x^2 + 3)^2 \frac{dy}{dx} - 8xy = 0$.

j. $\frac{dy}{dx} = (\cos x)(\sec y)$.

k. $3t - \sqrt{t^2 + 4} y' = 0$.

l. $y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 3}{x^3}$.

5. Determine la solución del problema de valor inicial.

a. $x(y - 3)dx + x^2 dy = 0$ con $y(1) = 1$.

b. $(y^2 - 1)dx + y\sqrt{x+1}dy = 0$ y $y(2) = 1$.

c. $\frac{dy}{dt} = e^{2t+y}$ con $y(0) = 0$.

d. $\sqrt[3]{t} y \frac{dy}{dt} = 4$ con $y(1) = 1$.

e. $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{y} \ln t$ con $y(1) = 2$.

f. $te^{2y} dy + \frac{t^2 - 1}{3y} dt = 0$ con $y(1) = 1$.

g. $y^4 \sqrt{t^3 + 2} dy + t^2 \sqrt{1 - y^2} dt = 0$,
 $y(1) = 0$.

h. $y\sqrt{t+3} dy + 4\sqrt{y^2 + 9} dt = 0$, $y(1) = 1$.

i. $dy - 2ydt = 0$ con $y(\frac{1}{2}) = 2$.

j. $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ con $y(4) = 2$.

k. $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 4}{y + 1}$ con $y(-2) = 2$.

l. $\frac{dy}{dt} = -6t$ con $y(8) = 0$.

m. $2t \frac{dy}{dt} = y + 4$ con $y(2) = 1$.

n. $\frac{dy}{dt} = 2\cos 4t$ con $y(\pi) = 1$.

o. $\sqrt{t^3 + 5} \frac{dy}{dt} = 2t^2$ con $y(-1) = 1$.

p. $4y y' - 5e^t = 0$ con $y(0) = 1$.

q. $2t + \sqrt{t^2 + 4} y' = 0$ con $y(-2) = 1$.

r. $dT - k(T - 10)dt = 0$ con $T(0) = 1$.

s. $x(y^3 + 2)^3 dx = 3e^{x^2} y^2 dy$ y $y(0) = 0$.

t. $\sqrt{1 - t^3} \frac{dy}{dt} = 3t^2$ con $y(0) = 0$.

6. Utilice el cambio de variable señalado y resuelva la ecuación diferencial.

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$, $u = \frac{y}{x}$.

b. $\frac{dy}{dx} = x+y$, $u = x+y$

c. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$, $y = xv(x)$.

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2-x^2}$, $y = xv(x)$.

7. Factor integrante

a. Multiplique $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ por $i(x) = e^x$ y

luego resuélvala (identifique la derivada de un producto).

b. Multiplique $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x$ por $i(x) = \frac{1}{x^3}$

y luego resuélvala (identifique la derivada de un producto).

8. Determine la función en la que la línea recta tangente tiene pendiente:

a. $m_t = 4x+1$ para todo valor de x , y su curva contiene al punto $(1, 2)$.

b. $m_t = 3x^2 + 6x - 2$ para cada valor de x , y su curva contiene al punto $(0, 6)$.

ACTIVIDADES 4.1

1. “Ecuación diferencial de una familia de parábolas”

a. En el plano cartesiano, ¿cuál es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje focal vertical y parámetro a ? trace algunas de estas parábolas.

b. Luego el cociente $\frac{x^2}{y}$ es igual a:

c. Suponga que $y = y(x)$, utilice la “regla para derivar un cociente de funciones y derive la expresión obtenida en el inciso anterior.

d. Verifique que la ecuación diferencial de la familia de parábolas es $2ydx - xdy = 0$

2. Trayectorias “ortogonales”

En el plano cartesiano, las trayectorias asociadas a $x^2 + y^2 = c^2$ con $c > 0$ son circunferencias con centro en el origen y radios $c > 0$.

a. En el plano cartesiano trace algunas de las curvas de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ con $c > 0$.

b. Suponga que $y = y(x)$ y derive término a término la ecuación $x^2 + y^2 = c^2$ (para derivar y^2 utilice la regla de la cadena).

c. Haga los despejes adecuados y justifique que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

d. ¿Cuáles son las pendientes de las curvas que son perpendiculares a las rectas tangentes a las circunferencias (recuerde que $m \cdot m_{\perp} = -1$)?

e. Resuelva la ecuación diferencial obtenida en el inciso c. e identifique la forma de las curvas solución.

f. En el plano cartesiano que utilizó en el inciso a. trace algunas de las curvas solución.

g. En términos de perpendicularidad, establezca la relación entre las curvas con ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 = c^2$$

y las curvas obtenidas al resolver la ecuación del inciso b.

3. Cambio lineal

En la ecuación $\frac{dy}{dt} = ay + b$, a y b son constantes.

a. Considere el cambio de variable $v = y + \frac{b}{a}$.

b. Calcule $\frac{dv}{dt}$. c. Sustituya $\frac{dv}{dt}$ y $y = v - \frac{b}{a}$

en $\frac{dy}{dt} = ay + b$ para obtener una ecuación diferencial en las variables v y t .

d. Utilice la solución del modelo de crecimiento y obtenga

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

4. Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento (o calentamiento) de Newton establece que la temperatura $\theta(t)$ de un cuerpo cambia de forma que es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura A del medio

que lo rodea.

a. Explique por qué el modelo que describe la situación anterior es

$$\frac{d\theta}{dt} = K(\theta(t) - A)$$

b. Suponga que $\theta(t) - A > 0$, ¿el cuerpo se está enfriando o calentando?, explique.

c. Suponga que $\theta(t) - A < 0$, ¿el cuerpo se está enfriando o calentando?, explique.

d. ¿Cuál es el signo de K ?

e. Puesto que la solución de $\frac{dy}{dt} = ay + b$

es $y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, utilice este hecho y

obtenga $y(t) = A + Ce^{at}$.

f. ¿Qué ocurre si $t = 0$?, explique.

g. ¿Qué ocurre con $\theta(t)$ después de un largo periodo de tiempo?, explique.

5. (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado).

Un objeto móvil se desplaza con aceleración constante a , es decir su velocidad varía uniformemente durante su desplazamiento, bajo estas condiciones

$$a = \frac{dv}{dt}$$

a. Verifique que $v(t) = v_0 + at$, ¿cómo interpreta v_0 ?

b. Si toma como origen de tiempos el instante correspondiente a v_0 , es t_0 , justifique que

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

6. Lanzamiento vertical.

a. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba en un tiempo inicial $t = 0$, con una velocidad inicial v_0 y con una posición inicial cuando $y = 0$. Por tanto, $y(t)$ representa la posición del objeto en el tiempo t . ¿Cuáles son los valores iniciales de la situación descrita?

b. La segunda ley de Newton indica que **fuerza = masa \times aceleración**. La única fuerza que actúa sobre el objeto es la fuerza gravitacional hacia abajo, es decir el peso del objeto $-w$. Si la aceleración es la segunda derivada de la posición, ¿cuál es el modelo que describe la situación?

c. Si el peso del objeto es proporcional a su masa y está dado por $w = mg$ el modelo determinado en el inciso b. se transforma en:

d. Así, la velocidad $y'(t)$ del objeto en cualquier instante t es.

e. ¿La posición $y(t)$ del objeto en cualquier instante t es?

APRENDIZAJES

El alumno:

1. Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación

$$\frac{d p(t)}{dt} = k p(t).$$

2. Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación

$$\frac{d p(t)}{dt} = k p(t).$$

y lo aplica en algunos ejemplos.

3. Identifica que la solución general del

modelo $\frac{d p(t)}{dt} = k p(t)$ es una familia de

funciones definida por los valores de c .

4. Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación, dada y llega a un modelo del tipo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

5. Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación.

6. Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.

7. Reconoce la importancia del modelo

$$p(t) = p_0 e^{kt}.$$

TEMÁTICA

i. Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como $\frac{d p(t)}{dt} = k p(t)$.

iii. Condiciones iniciales aplicadas al modelo $p(t) = p_0 e^{kt}$.

Entre otras de sus aplicaciones, las ecuaciones diferenciales se utilizan como modelos para representar y analizar fenómenos relacionados con:

i. La transformación de una sustancia en otra.

ii. El crecimiento y decrecimiento de poblaciones.

iii. La determinación de la edad de objetos.

iv. El cálculo de montos (cantidades de dinero) en plazos definidos.

v. El cambio del valor de un objeto conforme transcurre el tiempo.

vi. El comportamiento del aprendizaje de un sujeto.

vii. El comportamiento de la temperatura de cuerpo inmerso en un medio que se encuentra a otra temperatura.

En la presente sección revisaremos algunas de las situaciones antes señaladas, en particular aquellas cuyo estudio conducen a la ecuación

$$\frac{d p(t)}{d t} = k p(t),$$

es decir, situaciones en que la razón de cambio instantáneo de una función (la variable dependiente) es proporcional a ella misma.

DEFINICIÓN 4.5 (RELACIÓN DE VARIACIÓN DIRECTA)

Se dice que la variable p es directamente proporcional a la variable t , si la razón entre dos valores correspondientes cualesquiera es constante, es decir, si $\frac{p}{t} = k$ o bien $p = kt$, siempre que $k \neq 0$ (también se dice que p varía directamente con t).

El problema de valor inicial $\frac{dp}{dt} = kp$, sujeto a la condición $p(0) = p_0$, llamado modelo de crecimiento de Malthus o modelo de crecimiento exponencial supone que la rapidez de crecimiento de una población, en el instante t , es directamente proporcional al tamaño de la población; también presupone que la población: se desarrolla en un ambiente sin restricciones, que es continuo y que los recursos para mantener dicha población existen.

Posteriormente justificaremos que bajo las condiciones señaladas en el párrafo anterior, el crecimiento de la población se modela con una función exponencial.

DEFINICIÓN 4.6 (MODELO EXPONENCIAL)

El problema de valor inicial valor inicial $\frac{dp}{dt} = kp$ sujeto a $p(0) = p_0$ recibe el nombre de modelo exponencial.

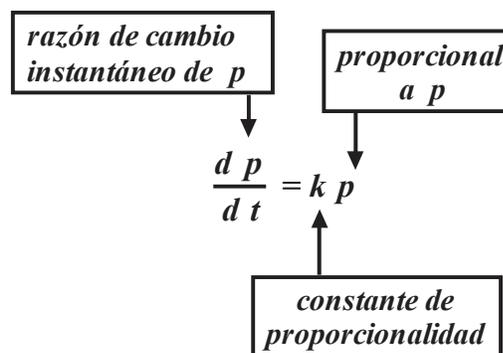


FIGURA 4.3

La solución del problema de valor inicial $\frac{dp}{dt} = kp$ sujeto a la condición $p(0) = p_0$ se obtiene utilizando el “método de separación de variables”.

Si $\frac{dp}{dt} = kp$, entonces $\frac{dp}{p} = k dt$, al integrar $\int \frac{dp}{p} = \int k dt$, obtenemos

$$\ln p - \ln C = k t$$

(note que la constante de integración ha sido escrita como $-\ln C$),

por tanto,

$$\ln \frac{p}{C} = k t \text{ o bien } \frac{p}{C} = e^{k t} \text{ y como consecuencia } p(t) = C e^{k t}.$$

Si $p(0) = p_0$, entonces $p_0 = p(0) = C e^{k(0)} = C$ lo que implica que $C = p_0$.

es decir, $p(t) = p_0 e^{k t}$.

El resultado del proceso anterior lo formaliza el *teorema 4.1*.

TEOREMA 4.1 (MODELO DE CRECIMIENTO Y DE DECRECIMIENTO EXPONENCIAL)

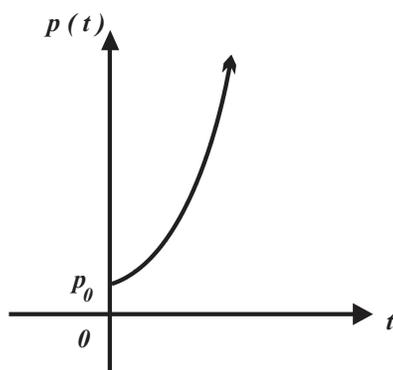
Si $y(t)$ es una función positiva y derivable tal que

$\frac{dy}{dt} = ky$, sujeta a la condición $y(0) = y_0$, para alguna constante k , entonces $y(t) = y_0 e^{k t}$.

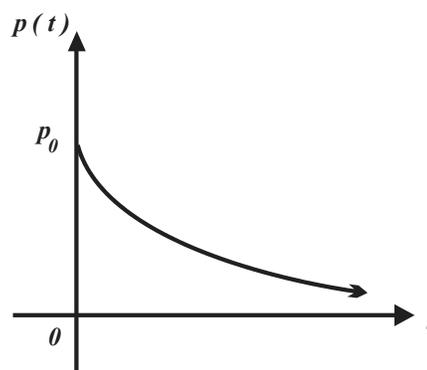
En la función $p(t) = p_0 e^{k t}$: el número $y(0) = p_0$ se conoce como valor inicial, k es la constante de proporcionalidad y el comportamiento de la función $p(t) = p_0 e^{k t}$ se denomina:

i. “Crecimiento exponencial” cuando $k > 0$, vea la *figura 4.4.a*.

ii. “Decrecimiento exponencial” si $k < 0$, vea la *figura 4.4.b*.



a.



b.

FIGURA 4.4

POBLACIONES

Aún cuando el número de individuos que componen una población es discreto (tiene asociado un número natural) el modelo de crecimiento exponencial es una “buena aproximación” en el estudio del comportamiento de poblaciones.

EJEMPLO 4.10 (CONSTRUCCIÓN DE MODELO)

a. Construya un modelo de decrecimiento exponencial con constante de proporcionalidad -2 y condición inicial $p_0 = 150$. En este caso $k = -2$ y también $p(0) = 150$, por tanto, $\frac{dp}{dt} = -2p$ con solución $p(t) = 150e^{-2t}$.

b. Construya un modelo de crecimiento exponencial con constante de proporcionalidad 5 y condición inicial $p_0 = 800$.

En este caso $k = 5$ y $p(0) = 800$, por tanto, $\frac{dp}{dt} = 5p$ con solución $p(t) = 800e^{5t}$.

EJEMPLO 4.11 (CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN)

Suponga que inicialmente un cultivo tiene 3000 bacterias y que éstas se reproducen en proporción directa, también suponga que su número se incrementa seis veces cada 10 horas.

Dado que el número de bacterias crece de exponencialmente, entonces

$$p(0) = 3000 \text{ y } \frac{dp}{dt} = kp, \text{ cuya solución es } p(t) = 3000e^{kt}.$$

Si $p(t) = 3000e^{kt}$, entonces $p(10) = 18000$, por tanto, $18000 = 3000e^{10k}$, lo que implica

$$6 = e^{10k}, \text{ luego } \ln(6) = 10k, \text{ es decir, } k = \frac{1}{10} \ln(6),$$

por tanto, $\frac{dp}{dt} = \left[\frac{1}{10} \ln(6) \right] p$ con solución

$$p(t) = 3000 e^{\left[\frac{1}{10} \ln(6) \right] t} = 3000(6)^{\frac{t}{10}}, \text{ o bien } p(t) = 3000(6)^{\frac{t}{10}}.$$

EJEMPLO 4.12 (CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN)

Suponga que el número de habitantes de cierta población aumenta de manera proporcional a su número actual. Después de dos años el número de habitantes se ha duplicado y después de tres años el número de habitantes es 20000.

Conocer el modelo que describe el comportamiento del tamaño de la población implica conocer los valores de p_0 y k .

Si el número de habitantes de cierta población crece de manera proporcional a su número actual de pobladores, entonces se ajusta al modelo

$$\frac{dp}{dt} = kp, \text{ cuya solución es } p(t) = p_0 e^{kt}.$$

Si $t = 2$, entonces $p(t) = 2p_0$ (la población se ha duplicado), al sustituir en

$$y(t) = p_0 e^{kt} \text{ obtenemos } 2p_0 = p_0 e^{2k} \text{ o bien } 2 = e^{2k},$$

en consecuencia

$$k = \frac{1}{2} \ln 2 = 0.347, \text{ como consecuencia } p(t) = p_0 e^{0.347t}.$$

Si $t = 3$, entonces $y(t) = 20\,000$. Si sustituimos en $p(t) = y_0 e^{0.347t}$ obtenemos

$$20\,000 = p_0 e^{(0.347)(3)} = p_0(2.832), \text{ de donde } p_0 = 7062.$$

El modelo que describe el crecimiento del número de habitantes en la población es

$$\frac{dp}{dt} = 0.347p \text{ con solución } p(t) = 7062 e^{0.347t}.$$

EJEMPLO 4.13 (DUPLICACIÓN DEL NÚMERO DE INDIVIDUOS)

La población del continente asiático al comienzo del año 2000 era de aproximadamente 4000 millones. Al inicio de 2001 fue de 4130 millones, considerando aplicable a la ley de crecimiento exponencial.

a. Para determinar la constante de crecimiento k y el modelo de crecimiento exponencial consideremos:

i. $t = 0$ corresponde al año 2000, entonces $y(0) = 4\,000$.

ii. $t = 1$ corresponde al año 2001, entonces $y(1) = 4\,130$.

El modelo que describe el comportamiento de la población es

$$\frac{dp}{dt} = kp \text{ sujeta a } p(0) = 4\,000 \text{ y solución } p(t) = 4000 e^{kt}.$$

La segunda condición da $4130 = 4000 e^{k(1)}$, lo que implica $k = \ln \frac{4130}{4000} = 0.03198$.

El modelo de crecimiento toma la forma $\frac{dp}{dt} = 0.03198 p$ con solución $p(t) = 4000 e^{0.03198t}$.

b. La población en el año 2020 es $y(20) = 4000 e^{(0.03198)(20)} = 7583.3447$ millones.

c. La población será doble cuando alcance 8000 millones, por tanto,

$$8000 = 4000 e^{0.03198t} \text{ o bien } 2 = e^{0.03198t}, \text{ de donde obtenemos } t = \frac{1}{0.03198} \ln 2 = 21.675 \text{ años.}$$

Para reflexionar

¿Qué papel desempeña la constante de crecimiento k en el comportamiento de la curva asociada a $p(t) = p_0 e^{kt}$?

DECAIMIENTO RADIATIVO

El modelo exponencial también proporciona resultados “bastante buenos” en situaciones de decaimiento radiactivo. Suponga que la rapidez a la que una sustancia radiactiva se desintegra (decae) en un objeto, es proporcional a la cantidad de ella presente en el objeto, y que N representa la cantidad de la sustancia radiactiva en el tiempo t , entonces el modelo que describe la cantidad de la sustancia es

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \text{ donde } \lambda \text{ es positiva y se denomina constante de decaimiento.}$$

La resolución del modelo $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, bajo la condición $N(0) = N_0$, se obtiene separando variables, ésta es $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Para reflexionar

Obtenga la solución del modelo de decaimiento radiactivo.

Un parámetro de gran utilidad en el estudio de las sustancias radiactivas es su “vida media”, misma que se define como el tiempo $t_{1/2}$ que toma en desintegrarse la mitad de su cantidad inicial, es decir, $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0$. La *tabla 4.1* incluye las vidas medias de los núclidos de algunas sustancias radiactivas.

NÚCLIDO	VIDA MEDIA	RADIACIÓN
92^{238}U	4.5×10^9 años	alfa
93^{237}Np	2.2×10^6 años	alfa
6^{14}C	5568 años	beta
38^{90}Sr	19.9 años	beta
1^3H	12.3 años	beta
56^{140}Ba	12.5 años	beta
53^{141}I	8.0 días	beta
57^{140}La	40 horas	beta
36^{94}Kr	1.4 segundos	beta

TABLA 4.1

Para reflexionar

¿Tiene sentido la condición $N(0) = 0$ en un modelo de decaimiento radiactivo? Explique.

¿Qué papel desempeña la constante de decaimiento k en el comportamiento de la curva asociada a $y(t) = y_0 e^{kt}$?

EJEMPLO 4.14 (DECAIMIENTO RADIATIVO)

Una sustancia radiactiva se desintegra de forma proporcional a su cantidad presente. Inicialmente hay 50 miligramos de la sustancia y después de cuatro horas se observa que sólo queda el 80% de ella.

a. Sea $N(t)$ la cantidad de la sustancia existente en el tiempo t . Dadas las condiciones del problema $N(t)$ satisface el modelo

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \text{ con solución } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Inicialmente $t = 0$ y $N = 50$, entonces $50 = N_0 e^{-\lambda \cdot 0}$ o bien $N_0 = 50$, entonces $N(t) = 50 e^{-\lambda t}$. Después de $t = 4$ horas queda el 80% de la sustancia ($(0.80)(50) = 40$ miligramos), entonces

$$40 = 50 e^{-4\lambda}, \text{ de donde obtenemos } \lambda = -\frac{1}{4} \ln \frac{40}{50} = 0.05578.$$

En consecuencia $N(t) = 50 e^{-0.5578t}$ en donde t representa el tiempo en horas.

b. La cantidad de sustancia radiactiva después de seis horas es $N(6) = 50 e^{-0.5578(6)} = 1.7598$ miligramos.

c. Para determinar el t tiempo al cabo del cual la sustancia radiactiva es la mitad de la inicial, es decir, $N(t) = 25$, se resuelve la ecuación

$$25 = 50 e^{-0.5578t}, \text{ en consecuencia } \frac{1}{2} = e^{-0.5578t}, \text{ o bien } -0.5578t = \ln \frac{1}{2},$$

de donde obtenemos

$$t = -\frac{1}{0.5578} \ln \frac{1}{2} = 12.426 \text{ horas.}$$

EJEMPLO 4.15 (DECAIMIENTO RADIATIVO)

A causa del accidente nuclear ocurrido en Japón, en marzo de 2011, quedó en la atmósfera cesio radiactivo 137, suponga que la vida media del ^{137}Cs es 28 años.

a. Para determinar la constante λ de desintegración del ^{137}Cs y luego las características del modelo exponencial

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \text{ sujeto a las condiciones: } N(0) = N_0 \text{ y } N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

es necesario determinar λ . Puesto que la vida media del ^{137}Cs es 28 años, entonces

$$N(28) = \frac{1}{2} N_0, \text{ es decir, } \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-28\lambda}, \text{ o bien } \frac{1}{2} = e^{-28\lambda}$$

en consecuencia

$$\ln \frac{1}{2} = -28\lambda, \text{ por tanto, } \lambda = -\frac{1}{28} \ln \frac{1}{2} = 0.02476.$$

El modelo de decaimiento es

$$\frac{dN}{dt} = -0.02476N, \text{ siempre que } N(0) = N_0 \text{ y solución } N(t) = N_0 e^{-0.02476t}.$$

b. Para determinar el tiempo t_0 en que solamente un quinto de la cantidad inicial de ^{137}Cs , es decir,

$$N(t_0) = \frac{1}{5}N_0, \text{ por la última ecuación del inciso anterior: } \frac{1}{5}N_0 = N_0 e^{-0.02476t_0},$$

al simplificarla da

$$\frac{1}{5} = e^{-0.02476t_0} \text{ o bien } \ln \frac{1}{5} = -0.02476t_0, \text{ entonces } t_0 = -\frac{1}{0.02476} \ln \frac{1}{5} = 65.0015 \text{ años.}$$

Para investigar

¿En qué consiste el método del carbono 14 para fechado de objetos? ¿Cuándo se utiliza?

* LEY ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Suponga que inicialmente un objeto se encuentra a la temperatura $T(0) = T_0$ y que es depositado en un contenedor a temperatura constante T_m ($T_C \neq T_0$), la experiencia nos indica que, con el transcurso del tiempo, la temperatura del cuerpo tiende a ser igual a la temperatura del contenedor. Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo en el tiempo t , entonces $T(t) \rightarrow T_C$.

Bajo las condiciones antes señaladas y suponiendo que la rapidez de cambio de la temperatura T de un objeto es directamente proporcional a la diferencia de las temperaturas del objeto T_0 y de su contenedor T_C (LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON) obtenemos el problema de valor inicial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_C) \text{ sujeto a la condición } T(0) = T_0.$$

Para determinar el signo de la constante de proporcionalidad k , note que:

i. Si el objeto se enfría, entonces:

$$\frac{dT}{dt} < 0 \text{ y también } T(t) - T_C > 0 \text{ (¿por qué?)}$$

y como consecuencia la constante de proporcionalidad (necesariamente) es negativa ($k < 0$).

ii. Si el objeto se calienta, entonces:

$$\frac{dT}{dt} > 0 \text{ y } T(t) - T_C < 0 \text{ (¿por qué?)}$$

y como consecuencia la constante de proporcionalidad (necesariamente) es positiva ($k > 0$). Vea la figura 4.5.

La resolución del problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_C) \text{ tal que } T(0) = T_0$$

es similar a la del modelo de crecimiento exponencial y conduce a la función

$$T(t) = T_C + T_0 e^{-kt}.$$

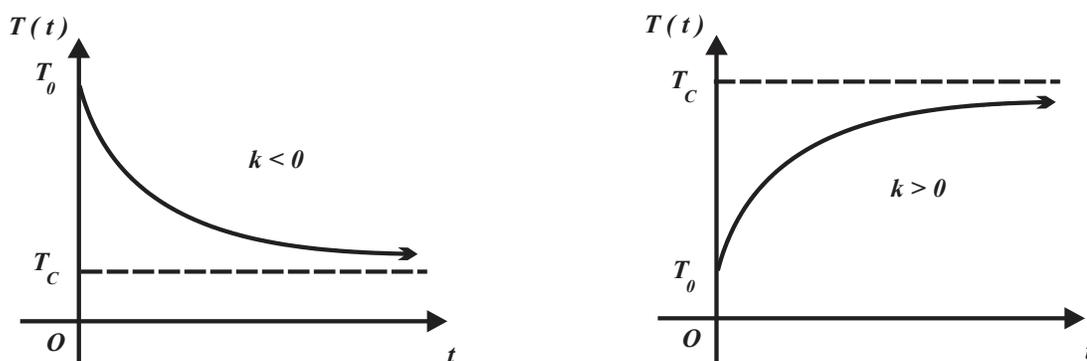


FIGURA 4.5

Para reflexionar:

Separe variables y verifique que la solución del problema de valor inicial $\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_C)$ con $T(0) = T_0$, es $T(t) = T_C + T_0 e^{-kt}$.

EJEMPLO 4.16 (ENFRIAMIENTO DE UN LÍQUIDO)

Una bebida que inicialmente se encuentra a una temperatura de 30 grados centígrados se enfría en 25 minutos a 0 grados centígrados, en un refrigerador cuya temperatura es -10 grados centígrados. Construya el modelo que describe la situación y determine la temperatura de la bebida 20 minutos después de haber sido introducida al refrigerador.

Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida en grados centígrados a los t minutos, por tanto, el problema de valor inicial que modela la situación es

$$\frac{dT}{dt} = k(T + 10) \text{ con condición inicial } T(0) = 30 \text{ y también } T(25) = 0 \text{ grados centígrados.}$$

De

$$\frac{dT}{dt} = k(T + 10), \text{ obtenemos } \frac{dT}{k(T + 10)} = dt,$$

integrando

$$\int \frac{dT}{T + 10} = \int k dt, \text{ es decir } \ln(T + 10) = kt + C,$$

entonces

$$T + 10 = e^{kt+C} = e^{kt} e^C, \text{ por tanto, } T(t) = C e^{kt} - 10.$$

Con las condiciones

$$T(0) = 30 \text{ y } T(t) = C e^{kt} - 10 \text{ obtenemos } 30 = C e^{k \cdot 0} - 10 \text{ y también } C = 40.$$

Por lo que

$$T(t) = 40 e^{kt} - 10.$$

De la condición

$$T(25) = 0 \text{ y } T(t) = 40e^{kt} - 10 \text{ obtenemos } 0 = 40e^{25k} - 10 \text{ o bien } e^{25k} = \frac{1}{4},$$

por lo que

$$k = \frac{1}{25} \ln\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0.0555,$$

así

$$T(t) = 40e^{-(0.0555)t} - 10.$$

La temperatura de la bebida 20 minutos después de haber sido introducida al refrigerador es

$$T(20) = 40e^{-0.0555(20)} - 10 = 40e^{-1.090} - 10 = 3.1951 \text{ grados centígrados.}$$

EJEMPLO 4.17 (ENFRIAMIENTO)

Al medio día se encontró el cuerpo de una persona (víctima de un crimen) en el interior de un cuarto cuya temperatura de 14 grados centígrados se conserva constante, a esa misma hora se tomó la temperatura del cuerpo el registro fue de 20 grados centígrados, una hora más tarde la temperatura del cuerpo descendió hasta los 10 grados centígrados.

Considerando que la temperatura del cuerpo al morir es de 36 grados centígrados y que su temperatura disminuye de acuerdo la ley de enfriamiento de Newton determinaremos el modelo correspondiente y la hora en la que la persona fue asesinada.

El cuarto (contenedor) permanece a temperatura constante de 14 grados, es decir, $T_c = 14$, por tanto,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 14).$$

Separando variables e integrando

$$\frac{dT}{(T - 14)} = k dt \text{ y } \int \frac{dT}{T - 14} = \int k dt \text{ o bien } \ln(T - 14) = kt + C.$$

Al componer con la función exponencial natural y renombrando constantes obtenemos

$$T(t) = Ce^{kt} + 14.$$

De la condición

$$T(0) = 36 \text{ y } T(t) = Ce^{kt} + 14 \text{ obtenemos } 36 = C + 14, \text{ lo que implica}$$

$$C = 22 \text{ y también } T(t) = 22e^{kt} + 14.$$

De la condición $T_1(1) = 20$ y la función

$$T(t) = 22e^{kt} + 14 \text{ obtenemos } 20 = 22e^k + 14, \text{ es decir, } e^k = \frac{3}{11}.$$

Por tanto, la función que proporciona la temperatura en cualquier tiempo es

$$T(t) = 22e^{\frac{3}{11}t} + 14.$$

* Una corrección al modelo de crecimiento exponencial (Modelo logístico de Verhulst)

El modelo de crecimiento exponencial pronostica que una población podría llegar a ser infinita con el paso del tiempo, sin embargo, la realidad muestra que el tamaño de una población está restringido por factores limitantes como: la falta de alimento, los depredadores, las enfermedades mortales, entre otros. Por tanto, es razonable suponer que el tamaño $p(t)$ de una población se limita a un valor máximo M , es decir, $0 < p(t) < M$ y que cuando $P(t)$ se aproxima a M , entonces $\frac{dp}{dt}$ se aproxima a 0 ; esto significa que el tamaño de la población tiende a ser estable.

Estas observaciones quedan incluidas cuando en el miembro derecho del modelo exponencial se incluye el factor

$$\frac{M - p}{M}, \text{ es decir, } \frac{dp}{dt} = kp \left(\frac{M - p}{M} \right).$$

En la razón $\frac{M - p}{M}$, si p "es muy pequeña" comparada con M , entonces $\frac{M - p}{M}$ es próximo a 1 y la rapidez de crecimiento es casi exponencial. Cuando M y F tienen valores cercanos, el modelo

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(\frac{M - p}{M} \right)$$

toma la forma $\frac{dp}{dt} \approx 0$, es decir la rapidez del crecimiento de la población se estabiliza (es constante).

El modelo

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(\frac{M - p}{M} \right) \text{ puede describirse como } \frac{dp}{dt} = Kp(M - p) \text{ si } K = \frac{k}{M}$$

es constante; observe que la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = Kp(M - p)$$

indica que la razón de crecimiento de la población es proporcional al producto del: tamaño de la población con la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño de la población.

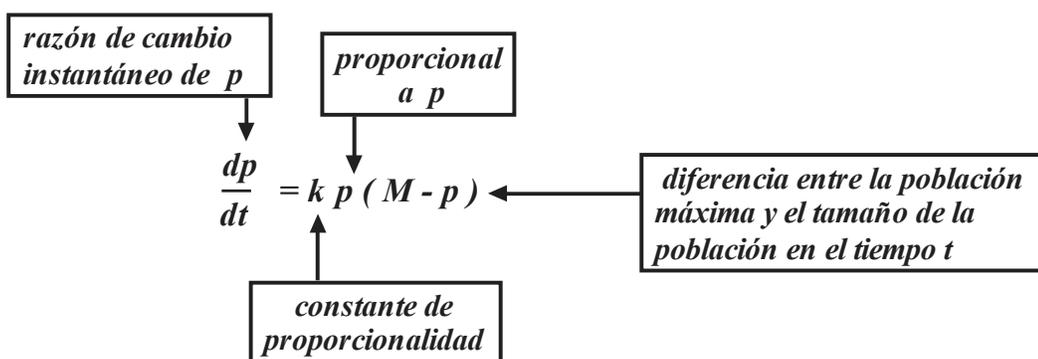


FIGURA 4.5

El modelo

$$\frac{dp}{dt} = Kp(M - p)$$

se resuelve utilizando el método de separación de variables, así

$$\frac{dp}{p(M - p)} = kdt, \text{ o bien } \int \frac{dp}{p(M - p)} = \int kdt.$$

La integral del lado izquierdo se resuelve, por ejemplo, utilizando tablas (o fracciones parciales, investigue en qué consiste este método), entonces

$$\frac{1}{M} \ln \frac{p}{M - p} = kt + C,$$

c es la constante de integración, en consecuencia

$$\ln \frac{p}{M - p} = Mkt + MC.$$

Si componemos con la función exponencial natural obtenemos

$$\frac{p}{M - p} = e^{Mkt + Mc}, \text{ o bien } \frac{p}{M - p} = Ae^{Mkt} \text{ donde } A = e^{Mc}.$$

Al despejar p de

$$\frac{p}{M - p} = Ae^{Mkt}$$

da

$$p = \frac{MAe^{Mkt}}{Ae^{Mkt} + 1} = \frac{M}{1 + \frac{1}{A}e^{-Mkt}},$$

Por último, si reemplazamos $\frac{1}{A}$ por b obtenemos $p(t) = \frac{M}{1 + be^{-Mkt}}$.

TEOREMA 4.2 (Modelo logístico)

a. La ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(\frac{M - p}{M} \right)$$

se denomina modelo logístico.

b. La función $p(t) = \frac{M}{1 + be^{-kt}}$, solución del modelo logístico, se denomina ecuación logística.

La curva correspondiente a $p(t) = \frac{M}{1 + be^{-kt}}$ se presenta en la *figura 4.6*, observe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{1 + be^{-kt}} = M.$$

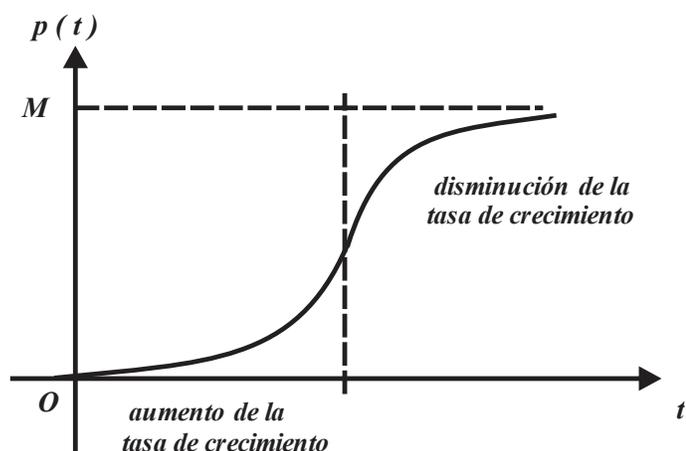


FIGURA 4.6

EJEMPLO 4.18

La matrícula de una escuela es 12 000 alumnos, debido a la limitación de recursos, la escuela abrió sus puertas, hace un año, con 1000 alumnos y ahora tiene 2500. Suponga que la rapidez de crecimiento de la población de alumnos está descrita por el modelo logístico.

- Determine el modelo logístico.
- ¿Cuántos alumnos habrá en cuatro años?

Solución

- En este caso $M = 12\,000$, inicialmente $t = 0$ y también $p = 1000$.

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(\frac{12000 - p}{12000} \right) \text{ y } 1000 = \frac{12000}{1 + be^{-k(0)}} = \frac{12000}{1 + b},$$

de donde obtenemos

$$1 + b = 12, \text{ o bien } b = 11.$$

Cuando $t = 1$ año, $p = 2500$ matriculados, entonces $2500 = \frac{12000}{1 + 11e^{-k}}$ o $1 + 11e^{-k} = \frac{12000}{2500} = 4.8$,

por tanto, $e^{-k} = \frac{3.8}{11}$ y $k = -\ln \frac{3.8}{11} = 1.0629$, lo que implica

$$\frac{dp}{dt} = 1.0629 p \left(\frac{12000 - p}{12000} \right) \text{ y también } p(t) = \frac{12000}{1 + (11)e^{-1.0629t}}.$$

- Dentro de tres años $t = 4$ el número de matriculados será de aproximadamente

$$p(4) = \frac{12000}{1 + (11)e^{-1.0629(4)}} = 10374.7380.$$

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS 4.2 ▼

1. En cada caso proporcione el modelo de crecimiento o decrecimiento exponencial de la forma $\frac{dp}{dt} = kp$, $p(t) = p_0 e^{kt}$.

a. $k = -2$, $p(0) = 2$.

b. $k = 3$, $p(0) = \frac{1}{2}$.

c. $k = 4$, $p(0) = 6$.

d. $p(0) = 1$ y $p(2) = 4$.

2. ¿En cuántos años, aproximadamente, se triplicará una población que se duplicó en 50 años? Suponga crecimiento exponencial.

3. Un pueblo tenía en 1930 fue 2000 habitantes, y en 1960 de 3000 habitantes.

Suponga válida la ley de crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada en 2020?

4. En las cárceles mexicanas la población de delincuentes crece de manera proporcional al número de delincuentes encarcelados actualmente. Si después de 10 años la población de delincuentes se ha triplicado y después de 20 la población es de 150 000 delincuentes, determine el número de delincuentes que había inicialmente en las cárceles mexicanas.

5. En cierta ciudad la población crece de forma proporcional al tamaño de la población, si la población era de 125 000 habitantes en 1990 y de 140 000 en 2010, ¿cuál es la población esperada en 2030?

6. Un cultivo de bacterias crece proporcionalmente a la cantidad de bacterias presente. Después de un día se cuentan 1000 familias de bacterias y después de cuatro horas 3000 familias. Determine:

a. El número inicial de familias de bacterias presentes en el cultivo.

b. El modelo que describe el número de familias de bacterias presentes en el cultivo en el momento t .

7. En un cultivo de bacterias la rapidez de crecimiento del número de bacterias es proporcional a las bacterias presentes.

a. Si el número de bacterias se triplica en 5 horas, ¿cuántas habrá en 10 horas?

b. ¿En qué tiempo el número de bacterias será 12 veces mayor al número inicial?

8. En una gran ciudad ocurre un brote de influenza AH1N1, cuando la Secretaría de Salud comienza a registrar casos encuentra 200 personas infectadas y una semana después detecta 1500 afectados. Suponga un crecimiento exponencial y determine el modelo que describe la situación y el número de personas infectadas cuatro semanas después de que comenzó el registro.

Decaimiento radiactivo

9. El radón tiene una vida media de 3.82 días.

a. Determine la constante de decaimiento en términos de $\ln 2$.

b. Qué fracción de cantidad de radón original queda después de 3.82 días.

10. Suponga que en un objeto, después de **50** días queda el **60%** de cierto elemento radiactivo, determine la constante de decaimiento radiactivo así como su vida media. Suponga un modelo de decaimiento exponencial.

11. Una sustancia radiactiva, con vida media de **10** días, va a implantarse temporalmente a un caballo sujeto a tratamiento médico, hasta que queden dos quintas partes de la cantidad inicialmente implantada. ¿Cuánto tiempo permanecerá la sustancia radiactiva en el caballo?

12. La rapidez con que se desintegran ciertos núcleos radiactivos es proporcional al número de núcleos presentes en una muestra específica. La mitad del número original de núcleos radiactivos se ha desintegrado en un periodo de **1500** años.

a. Determine la proporción de núcleos radiactivos que habrá después de **4500** años.

b. ¿En cuántos años quedará la décima parte del número inicial de núcleos radiactivos?

13. La rapidez con que se desintegra un núcleo radiactivo es proporcional al número de núcleos presentes en una muestra específica. En cierta muestra **8%** del número original de núcleos radiactivos se han desintegrado en un periodo de **200** años.

a. Determine la proporción de núcleos radiactivos que habrá después de **500** años.

b. ¿En cuántos años quedará la cuarta parte del número inicial de núcleos radiactivos?

14. La rapidez con que se desintegra cierto material radiactivo es proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay **500** gramos de material y después de dos meses se observa que el material ha perdido el **20%** de su masa original.

a. Determine el modelo de la masa de material remanente en un tiempo t .

b. La masa del material luego de **4** meses.

c. El tiempo en el que el material se ha desintegrado la mitad de su masa inicial.

Problemas varios

15. Una inversión de **400 000** pesos crece con una rapidez proporcional a su valor inicial a una tasa de **9%** anual.

a. ¿Qué cantidad de dinero habrá diez años después de que la cantidad inicial de dinero se invirtió?

b. ¿En qué tiempo se triplicará la cantidad inicial de dinero invertida?

16. Un principal de **100 000** pesos son invertidos un interés compuesto continuo del **6%** anual. La cantidad invertida crece con una rapidez proporcional a su valor inicial.

a. Si la cantidad de dinero se duplica en dos años, ¿cuál es la tasa de interés anual?

b. Si la cantidad de dinero crece **50%** en nueve meses, ¿en cuánto tiempo se duplicará la cantidad inicial?

17. Una persona tiene actualmente **8000** pesos y los invierte en una cuenta que paga interés compuesto continuo a una tasa constante de **6.25%**. ¿Cuánto tiempo deberá esperar para recibir **13 500** pesos?

18. Cierta clase de hongos se reproducen a una rapidez proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 4 miligramos de ese hongo y cuatro días después hay 6 miligramos.

- ¿Qué cantidad de hongos había después de un día?
- ¿Qué cantidad de hongos habrá a la semana?

19. En cada caso determine la vida media del material radiactivo.

- Después de una hora se observa sólo el 15% del material.
- Después de tres años se observa sólo el 80% del material.
- Después de tres años se ha desintegrado el 40% del material.
- Después de tres años se ha desintegrado el 10% del material.

Modelo logístico

20. Verifique que $p(t) = \frac{M}{1 + be^{kt}}$ es

solución de $\frac{dp}{dt} = kp \frac{M-p}{M}$.

21. Si $p(t) = \frac{500\,000}{1 + 0.6e^{-2t}}$ determine la ecuación diferencial del modelo logístico correspondiente.

22. En una ciudad, con población de 200 000, habitantes ocurre un brote de influenza AH1N1. Cuando la Secretaría de Salud comienza a registrar casos encuentra 200 personas infectadas y una semana después detecta 1500 afectados. Suponga un crecimiento logístico.

- Determine el modelo que describe el
- Determine el número de personas infectadas cuatro semanas después de que comenzó el registro.

23. En una ciudad con 450 000 habitantes, inicialmente 300 personas propagan el rumor "pronto vendrán los Zetas", después de seis días 1200 personas de esa ciudad conoce el rumor. Suponga crecimiento logístico.

- Determine el modelo logístico.
- ¿Cuántas personas conocerán el rumor a los quince días?

24. Suponga que en un lago específico, el número de carpas sigue el modelo logístico con razón de crecimiento k , capacidad de soporte N y el tiempo t se mide en años. Construya el modelo específico para cada situación.

- 100 carpas son cultivadas anualmente.
- Un tercio de la población de carpas es cultivada anualmente.

25. Una persona es portador del virus del SIDA y regresa a su comunidad, donde hay 1000 habitantes.

Si la rapidez con que se propaga el virus es proporcional, no sólo a la cantidad x de personas infectadas sino también a la cantidad de personas no infectadas, determine el número de personas infectadas seis días después si se observa que a los cuatro días hay 50 personas infectadas.

26. En una reserva ecológica son liberados 100 animales de cierta especie que se

encuentra en peligro de extinción. La reserva tiene una capacidad para **1500** animales y después de **4** años existen **400** animales. Suponga que el crecimiento de la manada sigue el modelo un modelo logístico.

- a. Determine el modelo logístico (ecuación diferencial y solución).
- b. Determine el número aproximado de animales a los **12** años.

27. Una reacción química transforma a sustancia en otra, y la rapidez con la que la primera sustancia se transforma es proporcional a la cantidad de esta sustancia presente en cualquier tiempo. Después de una hora quedan **40** gramos de la primera sustancia, pero después de tres horas quedan sólo **15** gramos.

- a. ¿Cuántos gramos de la sustancia había inicialmente?
- b. ¿Cuántos gramos de primera sustancia quedarán después de **4.5** horas?
- c. ¿En cuántas horas quedarán solamente **1.5** gramos de la primera sustancia?

28. Una reacción química transforma a una sustancia en otra, y la rapidez con la que la primera sustancia se convierte es proporcional a la cantidad de esta sustancia presente en cualquier tiempo. Después de una hora quedan dos quintos de la primera sustancia, pero después de **5** horas quedan sólo cuatro veintiunavos.

- a. ¿Qué fracción de la primera sustancia quedará en **8** horas?
- b. ¿En qué tiempo quedará un doceavo de la primera sustancia?

ACTIVIDADES 4.2

1. Mezcla

Un tanque de **400** litros de capacidad contiene una mezcla de **20%** de alcohol con agua en el tiempo $t=0$. Si $m(t)$ representa la cantidad de alcohol en el tanque en un tiempo t cualquiera, de forma que medido en litros $m(0)=80$. Suponga que se bombea la mezcla hacia afuera a una razón constante de **40** litros por hora, y al mismo tiempo, se reemplaza por una cantidad igual de mezcla con **30%** de alcohol, entonces la razón de cambio es

$$m'(t) = 12 - \frac{1}{10}m(t)$$

- ¿Qué cantidad de alcohol se bombea hacia adentro?
- ¿Qué cantidad de la mezcla de alcohol sale?

c. Pruebe que $m(t) = 300 - 10e^{-\left(\frac{1}{10}\right)t}$.

2. Drogas

Algunas de las drogas, en el cuerpo humano, se eliminan de la corriente sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad de droga presente.

- Construya un modelo que describa la cantidad presente de droga $D(t)$, en el cuerpo humano.
- ¿Qué cantidad de droga permanece en el cuerpo humano en un tiempo cualquiera t ?
- Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} D(t)$ y explique el significado.

3. Drogas

Si una droga se introduce al cuerpo humano

por vía intravenosa a una razón de I $mg \cdot min^{-1}$, la droga se elimina de acuerdo con $D'(t) = -kD + I$.

- Si $D=0$ cuando $t=0$ determine $D(t)$.
- Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} D(t)$ y explique el significado.
- La vida media de una droga en el cuerpo humano es de **4** horas. Estime la frecuencia con que se debe inyectar para a la larga haya **100mg** de droga en la sangre.

4. Absorción

Una roca está inmersa en un líquido que contiene una solución de cloro con una concentración constante C_0 , si $C(t)$ representa la concentración de cloro dentro de la roca al tiempo t .

- Suponga que la rapidez con que varía la concentración de cloro en la roca es proporcional a $C_0 - C(t)$, y determine $C(t)$.
- Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ y explique el significado.

5. Crecimiento de un vegetal

Cierto modelo de crecimiento de un vegetal establece que existe una cota superior de H centímetros para la longitud $L(t)$ de un vegetal a los t años. Si se supone que la tasa de crecimiento es proporcional a la longitud ya alcanzada:

- Construya un modelo que describa la longitud $L(t)$, del vegetal.
- Obtenga la solución del modelo obtenido

en el inciso a.

c. Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t)$ y explique el significado.

6. Acumulación de hojas

Las hojas desprendidas de los árboles de un bosque se acumulan en el suelo razón de 4 gramos por cm^2 por año. Al mismo tiempo las hojas se descomponen a razón constante del 80 % por año.

a. Construya un modelo que describa la cantidad de hojas en el suelo.

b. Obtenga la solución del modelo obtenido en el inciso a.

c. Trace la curva correspondiente a la solución obtenida en el inciso b. Interpretela.

7. Memoria

Cuando termina un curso, los estudiantes comienzan a olvidar los conocimientos que supuestamente aprendieron. Suponga que la rapidez con que un estudiante olvida lo que aprendió en un curso, es proporcional a la diferencia entre los conocimientos que posee y una constante positiva a . Si $A(t)$ representa es la fracción de conocimientos t semanas después de que terminó el curso:

a. Construya un modelo que describa la cantidad de conocimientos del estudiante en el tiempo t .

b. Obtenga la solución del modelo obtenido en el inciso a.

c. Trace la curva correspondiente a la solución obtenida en el inciso b. Interpretela.

8. Crecimiento compuesto continuo

Cuando los intereses r que se abonan a un principal P son continuos, el principal P de una cuenta bancaria crece de manera proporcional al principal P .

a. Construya un modelo que describa el principal P en el tiempo t .

b. Obtenga la solución del modelo obtenido en el inciso a.

c. Trace la curva correspondiente a la solución obtenida en el inciso b. Interpretela.

9. Calorías

De acuerdo con cierto modelo fisiológico, una persona necesita 40 calorías diarias por kilogramo de peso corporal para mantener su peso estable. Si consume más o menos de las calorías antes señaladas su peso cambiará a una razón de manera proporcional a la diferencia entre el número de calorías consumidas y el número necesario de calorías para mantener su peso actual. Suponga que una persona tiene la constante de proporcionalidad de $\frac{1}{1800}$ kilogramos por caloría y una ingestión calórica constante de calorías I .

a. Construya un modelo que describa el peso $P(t)$ de la persona en el instante t .

b. Obtenga la solución del modelo obtenido en el inciso a.

c. Trace la curva correspondiente a $P(t)$ para una persona que pese 78 kilogramos. Interpretela.

10. Cocimiento de un plátano

Un plátano macho se pone en un horno a $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ y se calienta de acuerdo con la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 200) , \text{ en donde } k \text{ es}$$

positiva.

- Suponga que inicialmente, el plátano macho está a $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ cuando se pone en el horno, determine $T(t)$.
 - Determine k suponiendo que después de 10 minutos el plátano está a $120\text{ }^{\circ}\text{C}$.
-

A

APÉNDICES DE APOYO

PROPÓSITOS

Incluir los sustentos requeridos para una mejor comprensión de la obra.

CONTENIDO

- A. Notación sigma
- B. Límites y continuidad
- C. Derivabilidad
- D. Soluciones a problemas seleccionados

A

SUMAS, NOTACIÓN SIGMA
Y PROPIEDADES

TEMÁTICA

- i. Notación sigma y propiedades.
- ii. Sumas de potencias de los primeros números naturales.

El estudio del cálculo integral requiere del uso y del cálculo del total de sumas con una cantidad **“muy grande de sumandos”**, por tanto, es conveniente establecer una notación adecuada y como sus propiedades operativas.

DEFINICIÓN A.1 (NOTACIÓN SIGMA)

a. Si n representa un número entero positivo y

$$a_1, a_2, a_3, a_3, \dots, a_n$$

son números reales, entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n .$$

b. El símbolo $\sum_{i=1}^n a_i$ se interpreta como “suma de a_i desde $i = 1$ hasta $i = n$.

En la definición anterior:

- i. i es el índice o variable (puede representarse por cualquier otra letra, en los textos de matemáticas frecuentemente se utilizan las letras k y n).
- ii. $i = 1$ es el límite inferior e indica el primer valor de i .
- iii. n es el límite superior e indica el último valor de i .
- iv. a_i es el término i ésimo o función.

$$\begin{array}{c}
 n \leftarrow \text{límite superior} \\
 \text{(último valor del índice)} \\
 \sum a_i \leftarrow \text{función del índice} \\
 i = 1 \leftarrow \text{límite inferior} \\
 \text{(primer valor del índice)} \\
 \uparrow \\
 \text{índice}
 \end{array}$$

FIGURA A.1

EJEMPLO A.1 (SUMAS DE POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES EN NOTACIÓN SIGMA)

a. La suma de los primeros n números naturales, se escribe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i .$$

b. La suma de los cuadrados de los primeros n números naturales se escribe en notación sigma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 .$$

c. La suma de los cubos de los primeros n números naturales se escribe en notación sigma

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 .$$

d. La suma

$$\underbrace{b + b + b + \cdots + b}_{n \text{ veces}}$$

se representa en notación sigma como

$$\sum_{i=1}^n b .$$

EJEMPLO A.2 (RESCRIBIENDO EXPLÍCITAMENTE)

a. La forma explícita de $\sum_{i=1}^5 4$ es $\sum_{i=1}^5 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

b. El desarrollo de $\sum_{i=1}^7 6$ es $\sum_{i=1}^7 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$.

c. En forma explícita $\sum_{i=1}^4 i$ equivale a $\sum_{i=1}^4 i = 1 + 2 + 3 + 4$.

d. En forma explícita $\sum_{i=1}^5 i^3$ es $\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

e. La forma explícita de $\sum_{i=1}^8 i^2$ es $\sum_{i=1}^8 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$.

EJEMPLO A.3 (DESARROLLO Y CALCULO DE SUMAS)

a. La suma

$$\sum_{i=1}^3 (2i - 3)$$

representa la suma de los números que se obtienen reemplazando en expresión $2i - 3$, primero i por 1 , luego por 2 y finalmente por 3 , por tanto,

$$\sum_{i=1}^3 (2i-3) = (2(1)-3) + (2(2)-3) + (2(3)-3) = 3.$$

b. En la suma $\sum_{k=3}^6 \left(\frac{k+3}{2} \right)$ el índice (o variable) es k , comienza en 3 y termina en 6, entonces

$$\sum_{k=3}^6 \left(\frac{k+3}{2} \right) = \frac{3+3}{2} + \frac{4+3}{2} + \frac{5+3}{2} + \frac{6+3}{2} = 15.$$

EJEMPLO A.4

a. Si

$$\sum_{p=1}^5 [p - (p-1)],$$

entonces el índice es p , comienza en 1 y termina en 5, lo que implica

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 [p - (p-1)] &= [1 - (1-1)] + [2 - (2-1)] + [3 - (3-1)] + [4 - (4-1)] + [5 - (5-1)] \\ &= (1-0) + (2-1) + (3-2) + (4-3) + (5-4) = 5. \end{aligned}$$

b. Si

$$\sum_{i=1}^5 [i^2 - (i-1)^2],$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 [i^2 - (i-1)^2] &= [1^2 - (1-1)^2] + [2^2 - (2-1)^2] + [3^2 - (3-1)^2] + \\ &\quad + [4^2 - (4-1)^2] + [5^2 - (5-1)^2] \\ &= (1-0) + (4-1) + (9-4) + (16-9) + (25-16) = 25. \end{aligned}$$

c. Si

$$\sum_{i=1}^5 [i^3 - (i-1)^3],$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 [i^3 - (i-1)^3] &= [1^3 - (1-1)^3] + [2^3 - (2-1)^3] + [3^3 - (3-1)^3] \\ &\quad + [4^3 - (4-1)^3] + [5^3 - (5-1)^3] \\ &= (1-0) + (8-1) + (27-8) + (64-27) + (125-64) = 125. \end{aligned}$$

d. La forma explícita de la suma

$$\sum_{i=1}^5 (a_i - a_{i-1})$$

es

$$\sum_{i=1}^5 (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_0.$$

NOTACIÓN SIGMA Y PROPIEDADES

PROPIEDAD A.1 (SUMA DE n VECES UNA CONSTANTE)

Si c es cualquier número, entonces

$$\sum_{i=1}^n c = nc.$$

EJEMPLO A.5 (SUMA DE n VECES UNA CONSTANTE)

a. $\sum_{i=1}^5 4 = (5)(4) = 20.$

b. $\sum_{i=1}^{10} 6 = (10)(6) = 60.$

c. $\sum_{i=1}^8 (-4) = (8)(-4) = -32.$

d. $\sum_{i=1}^6 \left(\frac{3}{5}\right) = (6)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{18}{5}.$

Observe que si c un número real, entonces

$$\sum_{i=1}^n ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c \sum_{i=1}^n a_i.$$

También

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i. \end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Las observaciones anteriores se formalizan en la *propiedad A.2*.

PROPIEDAD A.2 (PROPIEDADES DE LAS SUMAS)

Si c es cualquier número real, entonces

- a. $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$ (homogeneidad).
 b. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ (aditividad).
 c. $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica).

Las propiedades C.1 y C.2 presentan gran utilidad en la deducción de las relaciones correspondientes a las sumas de las potencias de los primeros n naturales.

SUMA DE LAS POTENCIAS ENTERAS DE LOS PRIMEROS NATURALES

Utilizando las propiedades anteriores, en particular, la propiedad telescópica

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0, \text{ obtendremos las sumas}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 \quad \text{y} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3.$$

EJEMPLO A.6 (SUMAS DE LAS POTENCIAS DE LOS PRIMEROS n NÚMEROS NATURALES)

a. Sea $a_i = i^2$, entonces $a_0 = 0^2 = 0$, $a_{i-1} = (i-1)^2$ y $a_n = n^2$,

al sustituir en

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 \text{ obtenemos } \sum_{i=1}^n (i^2 - (i-1)^2) = n^2.$$

Desarrollando

$$n^2 = \sum_{i=1}^n (i^2 - (i-1)^2) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = \sum_{i=1}^n (2i) + \sum_{i=1}^n (-1) = 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (-1) = 2 \sum_{i=1}^n i - n,$$

en consecuencia

$$2 \sum_{i=1}^n i = n^2 + n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ es decir, } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b. Sea $a_i = i^3$, entonces

$$a_0 = 0^3 = 0, \quad a_{i-1} = (i-1)^3 \quad \text{y} \quad a_n = n^3, \text{ si sustituimos en } \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3) = n^3.$$

El desarrollo da

$$n^3 = \sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) = \sum_{i=1}^n 3i^2 - \sum_{i=1}^n 3i + n = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n$$

o

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n = n^3, \text{ luego } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \sum_{i=1}^n i - n \right).$$

Así

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 3 \left(\frac{1}{2} n(n+1) \right) - n \right) = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n).$$

Finalmente

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n).$$

c. Sea $a_i = i^4$, entonces

$$a_0 = 0^4 = 0, a_{i-1} = (i-1)^4 \text{ y } a_n = n^4, \text{ la propiedad } \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

adquiere la forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4) &= n^4, \text{ desarrollando } \sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4) = n^4 \text{ obtenemos} \\ n^4 &= \sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4) = \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 4i - 1) = \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 4i) - \sum_{i=1}^n 1, \\ &= \sum_{i=1}^n 4i^3 - \sum_{i=1}^n 6i^2 + \sum_{i=1}^n 4i - n = 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - n \end{aligned}$$

así

$$4 \sum_{i=1}^n i^3 = n^4 + n + 6 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i.$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^3 &= \frac{1}{4} \left(n^4 + n + (6) \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) - (4) \frac{1}{2} n(n+1) \right) \\ &= \frac{1}{4} (n^4 + n + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n) \\ &= \frac{1}{4} (n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4} n^2 (n^2 + 2n + 1) = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2. \end{aligned}$$

La suma de los cubos de los primeros n números naturales se escribe como:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

La formalización de los resultados anteriores es la propiedad A.3.

PROPIEDAD A.3 (SUMAS DE LAS POTENCIAS DE LOS PRIMEROS n NATURALES)

<p>a. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$</p> <p>b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).$</p> <p>c. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$</p>

EJEMPLO A.7 (CÁLCULO DE SUMAS)

a. $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \sum_{i=1}^{50} i = \frac{50(50+1)}{2} = 1275.$

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{1}{6}(2(10)^3 + 3(10)^2 + (10)) = 385.$

c. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 = \sum_{i=1}^8 i^3 = \frac{8^2(8+1)^2}{4} = 1296.$

EJEMPLO A.8 (CÁLCULO DE SUMAS BIS)

a. $\sum_{i=1}^{20} (i+3) = \sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 3 = \frac{20(20+1)}{2} + 3(20) = 210 + 60 = 270.$

b. $\sum_{i=1}^6 (i-2)(i+3) = \sum_{i=1}^6 (i^2 + i - 6) = \sum_{i=1}^6 i^2 + \sum_{i=1}^6 i - \sum_{i=1}^6 6$
 $= \frac{1}{6}(2(6)^3 + 3(6)^2 + 6) + \frac{6(6+1)}{2} - (6)(6) = 76.$

c. $\sum_{i=1}^8 (i+3)^2 = \sum_{i=1}^8 (i^2 + 6i + 9) = \sum_{i=1}^8 i^2 + \sum_{i=1}^8 6i + \sum_{i=1}^8 9.$
 $= \frac{1}{6}(2(8)^3 + 3(8)^2 + (8)) + (6) \frac{8(8+1)}{2} + (8)(9) = 512.$

d. $\sum_{i=1}^5 (2i^3 - 8i) = 2 \sum_{i=1}^5 i^3 - 8 \sum_{i=1}^5 i = (2) \frac{1}{4}(5)^2(5+1)^2 - (8) \frac{5(5+1)}{2} = 450 - 120 = 330.$

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS A.A ▼

1. Calcule

a. $\sum_{i=1}^{30} (3i + 2)$.

b. $\sum_{k=1}^5 (k + 4)$.

c. $\sum_{n=2}^3 (3n^2 - 7)$.

d. $\sum_{i=1}^{10} (4i^2 + 2)$.

e. $\sum_{i=1}^{15} (i^2 + 3)$.

f. $\sum_{k=1}^{20} (k - 3)^2$.

g. $\sum_{n=1}^{10} (-1)^n$.

h. $\sum_{n=3}^4 \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n}$.

i. $\sum_{n=3}^3 \frac{(-1)^{n-1} (1-n^2)}{2^n}$.

 2. Evalúe las sumas utilizando el *teorema A.3*.

a. $\sum_{i=1}^{450} i$.

b. $\sum_{p=1}^6 4p$.

c. $\sum_{p=1}^{100} 12$.

d. $\sum_{p=1}^6 3p^2$.

e. $\sum_{k=1}^5 (2k - k^2)$.

f. $\sum_{k=1}^4 (k + 2)^3$.

g. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2} k^3 - \frac{1}{3} k \right)$.

h. $\sum_{p=1}^{12} (2^p - 2^{p-1})$.

i. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$.

3. Evalúe las sumas.

a. $\sum_{k=4}^{12} (12 - k)^2$.

b. $\sum_{k=4}^{12} (k^2 + k - k^3)$.

c. $\sum_{k=4}^{12} (20k - 5k^2)$.

d. $\sum_{x=4}^{10} (3^x - 3^{x-1})$.

4. Demuestre que

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1)$$
 .

5. Utilice la propiedad telescópica y verifique que

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{20}$$
 .

A. B

LÍMITES Y CONTINUIDAD

TEMÁTICA

- i. Propiedades operativas de los límites.
- ii. Teoremas fuertes de Continuidad.

PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LÍMITES

Un desarrollo adecuado de un cálculo integral requiere del conocimiento de los conceptos y operaciones relativos al cálculo diferencial, en particular, los conceptos y operatividad sobre límites, continuidad y derivación son imprescindibles para ello. Por esta las razones anteriores en esta sección trataremos las partes correspondientes a la temática antes señalada puesto que no se trata en los cursos ordinario de cálculo (en particular en el CCH).

En los cursos ordinarios de cálculo diferencial, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando la variable x tiende al número x_0 y se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ para representar el hecho de que, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Vea la figura B.1.

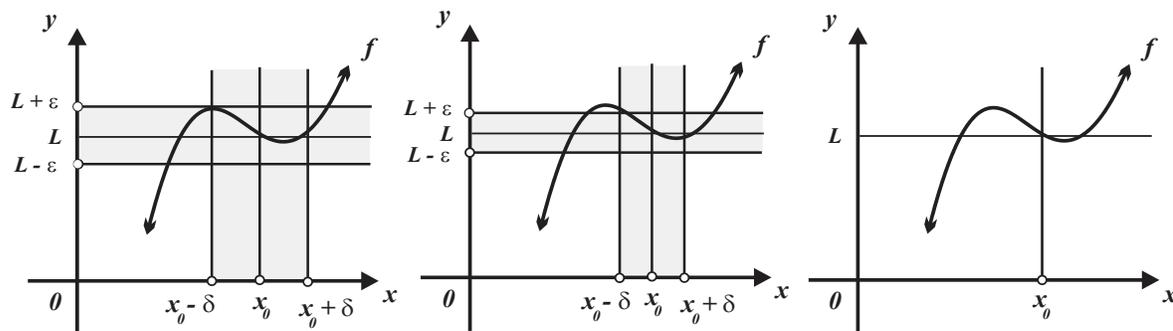


FIGURA B.1

Una vez estudiado el significado de la expresión $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ el siguiente paso consiste en establecer sus propiedades.

Pero ¿la función f tiene solo un límite L cuando x tiende a x_0 ?, ¿podría tener por ejemplo dos límites, L y M ?, es decir, ¿puede ocurrir que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$?

Las respuestas de las preguntas anteriores las formaliza la *propiedad B.1*, cuya justificación puede consultarse en textos de cálculo de nivel superior.

PROPIEDAD B.1 (UNICIDAD DEL LÍMITE)

Una función no puede tender a dos límites distintos cuando la variable tiende al mismo número x_0 .
Es decir, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$, entonces $L = M$.

El proceso de evaluación de límites incluye la aplicación de sus propiedades operativas que están expresamente construidas para ello y que formaliza la *propiedad B.2*.

PROPIEDAD B.2 (PROPIEDADES DE EVALUACIÓN DE LÍMITE)

Sean: n un número entero positivo, k una constante, f y g funciones con límite en x_0 .

Entonces

a. $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$.

b. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$.

c. $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

d. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

e. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

f. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

g. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

h. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$.

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ cuando n es par.

TABLA B.1

EJEMPLO B.1 (USO DE LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES)

a. En la evaluación de $\lim_{x \rightarrow 2} 12(x^2 + 5x - 20)$, se utilizan las propiedades c., d. y e., posteriormente la propiedad c. y finalmente las propiedades a. y b.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 12(x^2 + 5x - 20) &= 12 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x - 20) = 12 \left[\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5x - \lim_{x \rightarrow 2} 20 \right] \\ &= 12 \left[4 + 5 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 20 \right] = 12 [4 + 10 - 20] = -6. \end{aligned}$$

b. En la evaluación de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{(x+2)(x+1)}$, inicialmente se utiliza la propiedad g., posteriormente las propiedades d., e. y f., y por último las propiedades b.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{(x+2)(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - \sqrt{x})}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \frac{1+1-\sqrt{1}}{(1+2)(1+1)} = \frac{1}{6}$$

c. En la evaluación de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{(x+2)(x+1)}$, inicialmente se utiliza la propiedad g., a continuación las propiedades d., e. y f. Finalmente las propiedades a., b. y h.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{(x+2)(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)} = \frac{1+1-1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}.$$

EL TEOREMA DEL ENCAJE

En cálculo, el teorema del encaje (conocido también teorema de intercalación, teorema de estricción, teorema del enclaustramiento, teorema de compresión o teorema del sándwich) se aplica en el cálculo del límite de funciones. Este teorema afirma que, si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, entonces cualquier otra función acotada por ellas tendrá el mismo límite en el punto, vea la *figura B.2*. Su formulación moderna se debe a Gauss.

PROPIEDAD B.3 (TEOREMA DEL ENCAJE)

Sean: f , g y h funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x cercana a x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$.

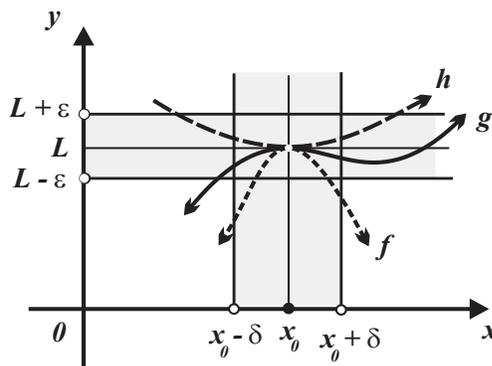


FIGURA B.2

EJEMPLO B.2 (CÁLCULO DE LÍMITES QUE REQUIEREN DEL TEOREMA DEL ENCAJE)

a. Para evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ utilizando el teorema del encaje recordemos que

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1, \text{ en particular } -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

i. Si x es positivo, entonces

$$-x \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ por tanto, } 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] \leq 0$$

y por el teorema del encaje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

ii. Si x es negativa, entonces

$$-x \geq \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] \geq x, \text{ o bien } x \leq \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] \leq -x.$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0, \text{ entonces } 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] \leq 0$$

y por el teorema del encaje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

b. Para evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - \text{sen}(2x)}{x^2 + 1}$ utilizando el teorema del encaje recordemos que

$$-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1, \text{ en particular } -1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1.$$

Multiplicando por -1 y sumando $3x^2$ obtenemos

$$1 \geq -\text{sen}(2x) \geq -1 \text{ y } 1 + 3x^2 \geq -\text{sen}(2x) \geq -1 + 3x^2.$$

Dado que $x^2 + 1$ es positivo, podemos escribir

$$\frac{1 + 3x^2}{x^2 + 1} \geq \frac{3x^2 - \text{sen}(2x)}{x^2 + 1} \geq \frac{-1 + 3x^2}{x^2 + 1} \text{ o } \frac{-1 + 3x^2}{x^2 + 1} \leq \frac{3x^2 - \text{sen}(2x)}{x^2 + 1} \leq \frac{1 + 3x^2}{x^2 + 1}.$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + 3x^2}{x^2 + 1} = 3 \text{ y también } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3x^2}{x^2 + 1} = 3.$$

Por el teorema del encaje

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - \text{sen}(2x)}{x^2 + 1} = 3.$$

c. Para evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ utilizando el teorema del encaje recordemos que

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1, \text{ entonces } -\frac{1}{x} \leq \text{sen}(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Por el teorema del encaje

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0.$$

d. Para evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\text{cos}(x)}{\sqrt{x}} \right)$ utilizando el teorema del encaje recordemos que

$$-1 \leq \text{cos}(x) \leq 1, \text{ entonces } -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\text{cos}(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ y } 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 + \frac{\text{cos}(x)}{\sqrt{x}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pero $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1$,

Por el teorema del encaje

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\text{cos}(x)}{\sqrt{x}} \right) = 1.$$

e. Para evaluar el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right]$ utilizando el teorema del encaje recordemos que

$$-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1, \text{ en particular } -1 \leq \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1.$$

i. Si x es positivo, entonces $-x \leq \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq x$. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ por tanto, } 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq 0$$

y por el teorema del encaje $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$.

ii. Si x es negativa, entonces $-x \geq \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \geq x$, o bien $x \leq \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq -x$.

Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0, \text{ entonces}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq 0, \text{ y por el teorema del encaje } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0.$$

CONTINUIDAD

El estudio de las funciones que presentan la propiedad de ser continuas, así como sus propiedades son imprescindibles en el desarrollo de un curso de cálculo diferencial.

Suponga:

- i. Que la función f relaciona los valores de la variable independiente x con la variable dependiente y , es decir, $f(x) = y$.
 - ii. Que Deseamos utilizar la función f para determinar un valor de y ; por lo que primero debemos medimos un valor de x , cuya medida muy cercana a x_0 , por lo que la medida presenta un **“pequeño” error**.
 - iii. Que el pequeño error cometido al medir x_0 influye en el cálculo del correspondiente valor de y , y como consecuencia no podemos obtener el valor exacto de y_0 .
- Surge la pregunta: ¿de qué forma el error cometido al medir x_0 afecta al valor resultante de y_0 ? Lógicamente, si para valores de x “muy próximos” a x_0 obtenemos valores de y muy diferentes entre sí, entonces la función f que relaciona x con y no es útil.*
- iv. Que en el proceso de medir los errores cometidos son inevitables y como consecuencia no es posible obtener **“el valor exacto de y_0 ”**.
 - v. Que **es posible “acotar” el error aceptable** en y_0 (y que esta cota se llama ε), es decir $|y - y_0| < \varepsilon$.
 - vi. Que es posible obtener una **cota de error “ δ ”, de tal forma que siempre que midamos x_0 con un error menor que δ tengamos la seguridad de que el valor resultante para y difiere de y_0 en menos que ε .**

Si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|y - y_0| < \varepsilon$.

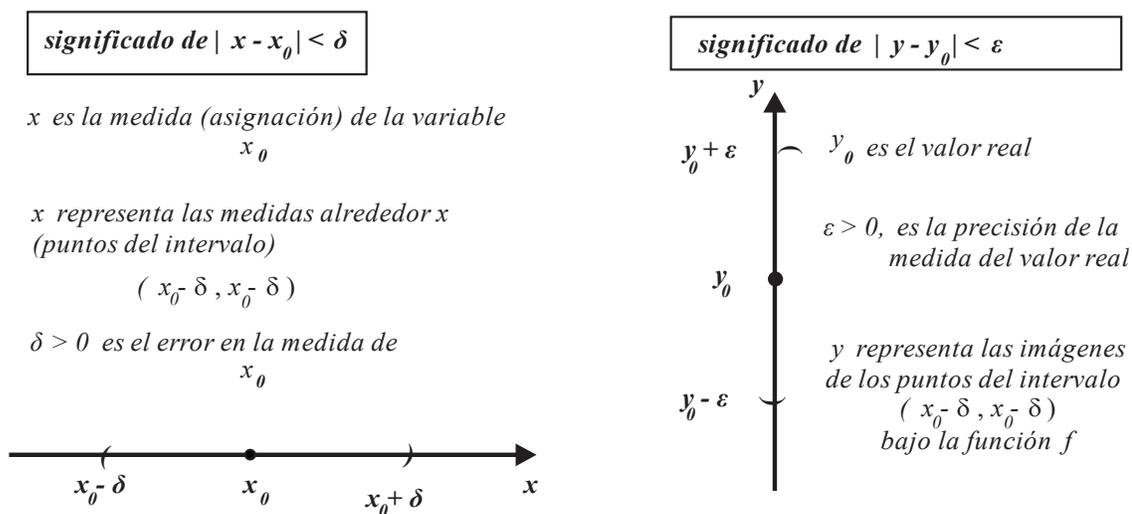


FIGURA B.3

<p>Nota</p>	<p>La cota de error δ depende de la cota de error ε, fijado anteriormente en cada caso. Intuitivamente, cuanto más pequeño sea el error permitido en las mediciones finales, tanto mejor tendremos que medir la variable independiente (los datos iniciales).</p>
-------------	--

La conjunción de todas las observaciones anteriores se formaliza con la *definición B.1*.

DEFINICIÓN B.1 (CONTINUIDAD PUNTUAL)

Sea f una función definida en todos los números de un intervalo abierto I , si $x_0 \in I$, entonces se dice que f es continua en el número $x_0 \in I$, si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ (que por lo general depende de x_0 y de ε) tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|y - y_0| < \varepsilon$.

La *figura B.4* ilustra la *definición A.1*. Observe que al disminuir la cota de error ε alrededor de y_0 disminuye la cota de error δ alrededor de x_0 .

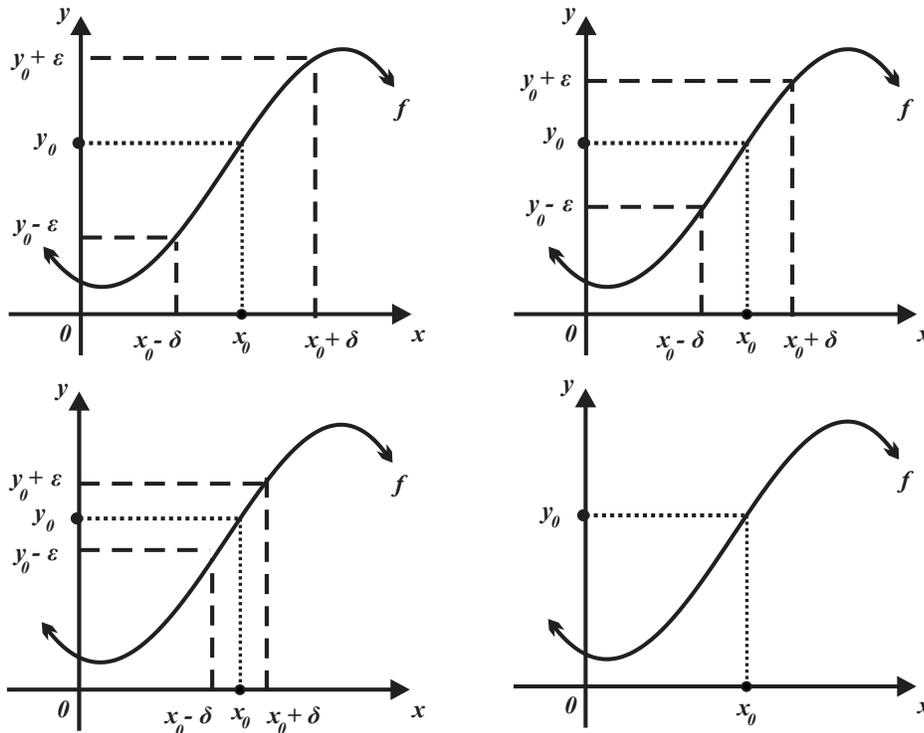


FIGURA B.4

<p>Nota</p> 	<p>a. Para hacer referencia a la continuidad (o no continuidad) de una función en un punto, este punto debe pertenecer al dominio de la función.</p> <p>b. La continuidad de una función en un punto depende únicamente de su comportamiento en la “proximidad” de dicho punto. ¡La continuidad es una propiedad local!</p> <p>c. Intuitivamente, una función continua transforma “puntos cercanos entre sí en puntos cercanos entre sí”.</p>
---	--

EJEMPLO B.3 (CONTINUIDAD PUNTUAL DE FUNCIONES)

a. La función $f(x) = 3x - 1$ es continua en cada punto de su dominio.

b. La función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

es continua en todos los puntos de su dominio.

c. Las funciones polinomiales son continuas en cada punto x_0 de su dominio.

d. Las funciones racionales son continuas en todo punto x_0 de su dominio.

EJEMPLO B.4 (CONTINUIDAD PUNTUAL DE FUNCIONES)

a. La función definida por intervalos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 2] \\ -1 & x \in (2, +\infty) \end{cases},$$

no es continua en $x_0 = 2$.

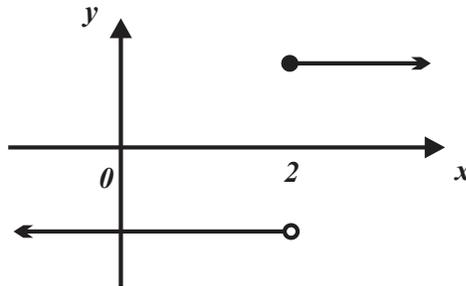


FIGURA B.5

b. La función

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{2}x & x \in (-1, +\infty) \end{cases},$$

no es continua en $x_0 = -1$.

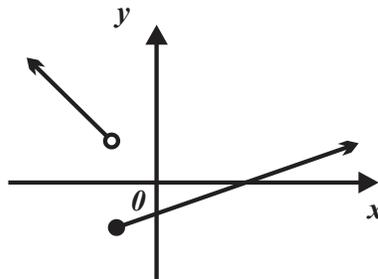


FIGURA B.6

EJEMPLO B.5 (ALCANCES DE LA DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD PUNTUAL)

a. Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$, puesto que $\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$,

no tiene sentido estudiar si tal función es o no es f en $x_0 = -1$.

b. La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ tiene dominio $\text{dom}(f) = [1, +\infty)$ por lo que sólo tiene sentido estudiar la continuidad de f en los puntos del intervalo $[1, +\infty)$.

c. Si

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4},$$

entonces

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

Por tanto, no tiene sentido preguntarse si la función f es o no es continua en los números

$$x_{01} = -2 \text{ y } x_{02} = 2.$$

El ejemplo B.6 presenta una lista de funciones que son continuas en todos los puntos de su dominio.

EJEMPLO B.6 (ALCANCES DE LA DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD PUNTUAL II)

a. La función constante $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$ es continua en todos los puntos de su dominio.

b. La función lineal $f(x) = ax + b$, es continua en todos los puntos de su dominio.

c. La función potencia $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ es continua en todos los puntos de su dominio.

Una función que es continua en todos los puntos de un intervalo I se denomina continua sobre el intervalo I , formalmente esto se expresa en la *definición B.2*.

DEFINICIÓN B.2 (CONTINUIDAD EN UN INTERVALO)

Una función f es continua sobre un intervalo I , si es continua en todo punto (número) $x_0 \in I$.

EJEMPLO B.7 (CONTINUIDAD EN UN INTERVALO)

a. Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, entonces $\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, por tanto, f es continua en todos los intervalos que no contengan el número

$$x_0 = -1.$$

b. Si $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$,

entonces

$$\text{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty),$$

por tanto, f es continua en todos los intervalos que no contengan los números

$$x_{01} = -2 \text{ y } x_{02} = 2.$$

c. En $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\text{dom}(f) = [1, +\infty)$, por tanto, f es continua en cualquier subintervalo de $[1, +\infty)$.

Las propiedades “operativas” de las funciones continuas sobre un mismo intervalo I son similares a las de los límites, es decir,

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo I , entonces:

i. Las funciones

$$f + g, f - g \text{ y } f \cdot g$$

también son continuas sobre el intervalo I .

ii. Las funciones

$$\frac{1}{g} \text{ y } \frac{f}{g}$$

también lo son, siempre y cuando $g \neq 0$.

Los elementos (conceptos y técnicas) sobre continuidad tratados garantizan que, tanto las funciones polinomiales como las funciones racionales, son continuas (en su dominio de definición), puesto que ambas clases de funciones pueden construirse a partir de sumas y productos de funciones constantes y funciones potencias. La similitud de las definiciones de continuidad puntual y de límite sugiere el siguiente criterio de continuidad puntual.

PROPIEDAD B.4 (CRITERIO DE CONTINUIDAD PUNTUAL)

Sean f una función definida sobre un intervalo I y $x_0 \in I$, entonces

$$f \text{ es continua en } x_0 \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

El *ejemplo B.8* muestra el uso del criterio de continuidad puntual.

EJEMPLO B.8 (APLICANDO EL CRITERIO DE CONTINUIDAD)

a. Si $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+4}$, entonces $f(1) = \frac{3(1)+1}{(1)^2+4} = \frac{4}{5}$ y $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x^2+4} = \frac{3(1)+1}{(1)^2+4} = \frac{4}{5}$,

por tanto,

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{5}.$$

En consecuencia f es continua en $x_0 = 1$.

Note que $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+4}$ es continua en cualquier otro punto $x = x_0$ de su dominio puesto que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3(x_0)+1}{(x_0)^2+4} = \frac{3(x_0)+1}{(x_0)^2+4} = f(x_0).$$

$$\text{b. Si } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ 2 & x = 1 \end{cases},$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ y } f(1) = 2, \text{ así } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$$

y la función f es continua en el

$$x_0 = 1.$$

c. La función $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$ cuyo dominio es $\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

no es continua (es discontinua) en cualquier intervalo que contenga a por lo menos uno de los números $x_{01} = -1$ y $x_{02} = 0$ puesto que, en ambos casos, no está definida.

PARA REFLEXIONAR

¿?	<p>¿Qué opina?</p> <p>a. “Una curva que se puede trazar sin despegar el lápiz del cuaderno pertenece a una función continua”.</p> <p>b. “Una curva que contiene huecos pertenece a una función que no es continua”.</p> <p>¿Puede dar un ejemplo de una función tal que?:</p> <p>a. EL trazo de su gráfica tenga un hueco salto y ésta corresponda a una función continua.</p> <p>b. EL trazo de su gráfica tenga un hueco y ésta no pertenezca a una continua.</p>
-----------	---

Como hemos visto, la curva que tiene asociada una función puede tener huecos o saltos sin ser esto una condición para no ser continua, ¡la característica de ser continua (o no serlo) depende del dominio de la función!

EJEMPLO B.9 (EXTENSIÓN DE UNA FUNCIÓN NO CONTINUA A UNA FUNCIÓN CONTINUA)

En la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & x \in \mathbb{R} - \{-2\} \\ 4 & x = -2 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1 \text{ y } f(-2) = 4,$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2).$$

Por tanto, es discontinua en todo intervalo que contiene al número $x = -2$. Si se redefine como

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} & x \in \mathbb{R} - \{-2\} \\ -1 & x = -2 \end{cases}$$

se obtiene una función continua.

DEFINICIÓN B.3 (TIPOS DE DISCONTINUIDADES)

- a. La función f tiene una discontinuidad removible en x_0 cuando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
- b. La función f tiene una discontinuidad esencial (inevitable) en x_0 si no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Una discontinuidad esencial en una función se manifiesta como “un salto” en la curva que tiene asociada, mientras que una discontinuidad de tipo removible suele manifestarse como un “hueco” en la curva correspondiente (concretamente, un punto se encuentra “fuera” de la curva correspondiente”, vea la figura B.7.

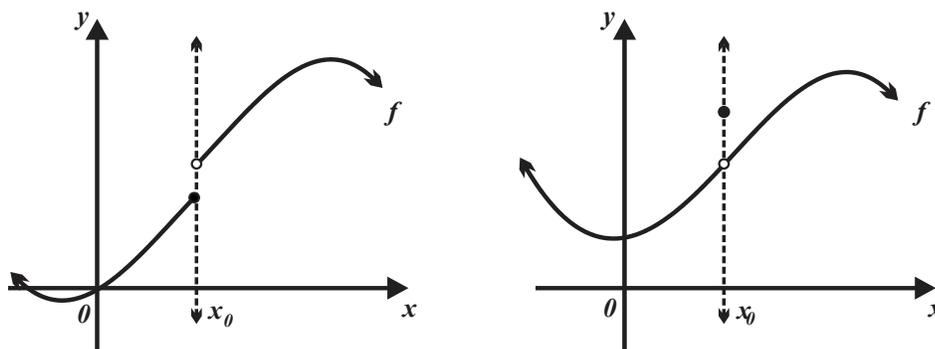


FIGURA B.7

Revisemos el tipo de discontinuidad de funciones no continuas.

EJEMPLO B.10 (TIPO DE DISCONTINUIDAD)

a. En

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \geq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, por tanto, la función es discontinua (esencialmente) en $x = 2$.

b. Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe y la función es discontinua (esencialmente) en $x = 2$.

c. En la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ 1 & x = -1 \end{cases},$$

se cumplen

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1} = 1 \text{ y } f(-1) = 1,$$

por tanto, es continua en $x = -1$.

d. En la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe y } f(0) = 1,$$

por tanto, presenta una discontinuidad cuando $x = 0$ es esencial.

La importancia de la continuidad de función sobre x_0 es que proporciona información sobre su comportamiento a su alrededor.

- i. Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces existe un intervalo que contiene al número x_0 de manera que f es mayor que cero (sobre ese intervalo).
- ii. Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) < 0$, entonces existe un intervalo que contiene al número x_0 de manera que f es menor que cero (sobre ese intervalo).
- iii. Una de las consecuencias de mayor relevancia en el cálculo, de la continuidad de una función es la propiedad conocida como

“TEOREMA DE LOS CEROS DE BOLZANO”

que afirma: Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

PROPIEDAD B.5 (TEOREMA DE LOS CEROS DE BOLZANO)

Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $x_0 \in [a, b]$, tal que $f(x_0) = 0$.

La figura B.8 ilustra el teorema de Bolzano, observe que la curva asociada a una función que es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que sus imágenes son tanto positivas como negativas, por el

teorema de los ceros de Bolzano existe un número x_0 del eje x . EL teorema de los ceros de Bolzano garantiza la existencia del número x_0 .

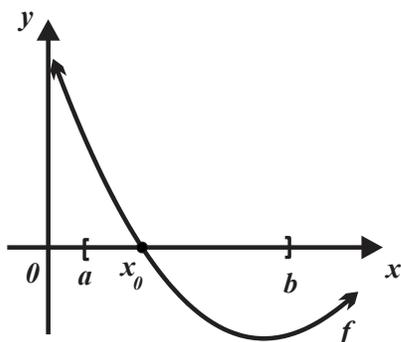


FIGURA B.8

Un enunciado equivalente del teorema de Bolzano es el “TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO”, mismo que afirma: “la imagen de un intervalo bajo una función continua es un intervalo”, es decir, una función continua transforma un intervalo en otro intervalo. La figura B.9 muestra la curva asociada a una función continua f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si seleccionamos el punto P de la curva con ordenada y_0 y lo proyectamos sobre el eje de las abscisas, entonces existe una abscisa x_0 tal que $y_0 = f(x_0)$.

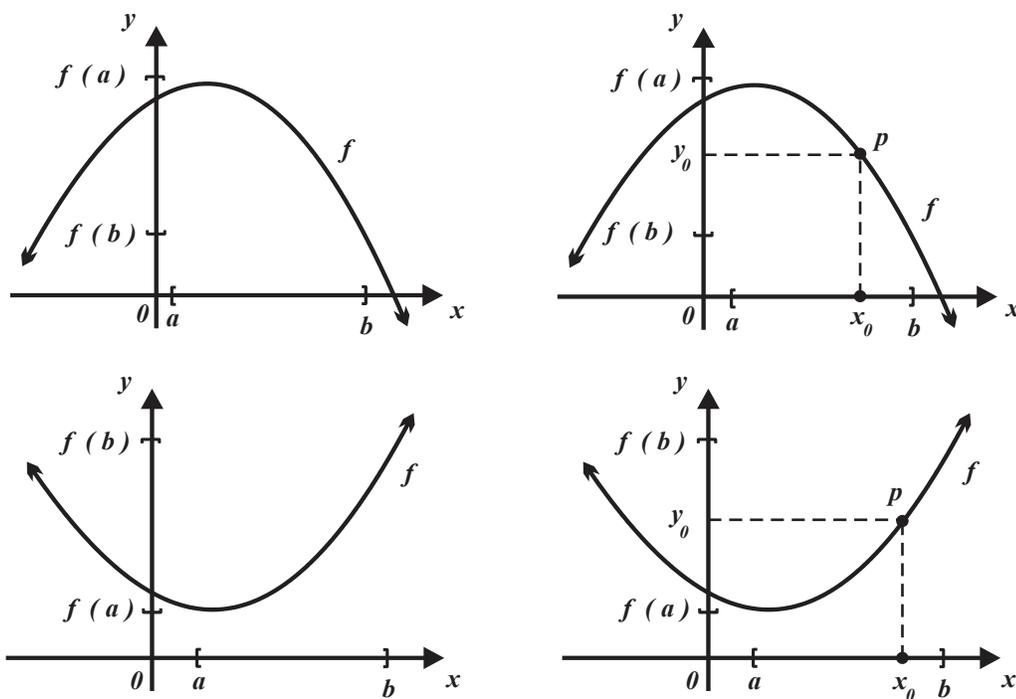


FIGURA B.9

PROPIEDAD B.6 (TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

Sea f una función definida y continua sobre en el intervalo cerrado $[a, b]$ y y_0 un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, es decir $f(a) < y_0 < f(b)$, entonces existe el número x_0 en intervalo (a, b) tal que $y_0 = f(x_0)$.

EJEMPLO B.11 (APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

a. La función con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ definida sobre } [-4, 4]$$

es continua. Sea $y_0 = 1$, para determinar la abscisa que predice el teorema del valor intermedio necesitamos resolver la ecuación

$$1 = \frac{1}{4}x_0^2, \text{ luego } x_0^2 = 4 \text{ y } x_0 = 2 \text{ o } x_0 = -2.$$

b. La función con regla de correspondencia

$$f(x) = \sqrt{4x-2} \text{ definida sobre } \left[\frac{1}{2}, 5 \right]$$

es continua. Si $y_0 = 3$ es una de sus imágenes, para determinar la abscisa que predice el teorema del valor intermedio es necesario resolver la ecuación $3 = \sqrt{4x_0 - 2}$, entonces

$$4x_0 - 2 = 9 \text{ o } x_0 = \frac{11}{4}.$$

c. ¿Es $y_0 = 4$ el valor (o uno de los valores) que predice el teorema del valor intermedio para

$$f(x) = x^2 + 4x \text{ en } [-2, 1]?$$

Si suponemos que sí, se debe cumplir que la solución de la ecuación $x^2 + 4x = 4$ se encuentra en el intervalo $[-2, 1]$.

Si $x^2 + 4x = 4$, entonces $(x-2)(x+2) = 0$, cuya solución es $x_0 = 2$, misma que no pertenece al intervalo $[-2, 1]$. Luego $y_0 = 4$ no es uno de los valores que predice el teorema del valor intermedio en

$$[-2, 1].$$

El teorema de Weierstrass es imprescindible en el desarrollo de las propiedades del cálculo integral, se refiere a los máximos y mínimos absolutos que alcanza una función continua cuando su recorrido o rango es la imagen de un intervalo cerrado y acotado. La *figura B.10* muestra la curva asociada a la función f , que es continua y está definida sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Observe que en $[a, b]$, existen números: $x_{01} = m$ y $x_{02} = M$ de manera que $f(m)$ es mínimo y $f(M)$ es máximo.

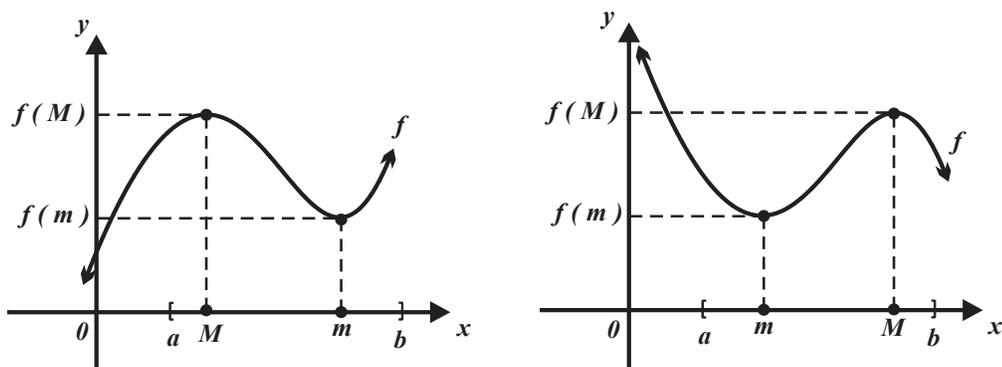


FIGURA B.10

Formalmente:

PROPIEDAD B.7 (TEOREMA DE WEIERSTRASS)

Sea f una función definida y continua sobre en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existen números m y M en $[a, b]$ tales: $f(m)$ es el valor mínimo de f y $f(M)$ es el valor máximo de f .

El ejemplo B.12 muestra el uso de la propiedad B.7.

EJEMPLO B.12 (APLICANDO EL TEOREMA DE WEIERSTRASS)

a. La función con regla de correspondencia $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$ y definida sobre $[1, 5]$, es decreciente y continua, en consecuencia $f(1) = \frac{1+3}{1} = 4$ es su valor máximo, además

$$f(5) = \frac{5+3}{5^2} = \frac{8}{25}$$

es su valor mínimo.

b. La función con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 1$$

y definida sobre $[3, 6]$, es creciente, en consecuencia

$$f(3) = \frac{1}{4}(3-3)^2 + 1 = 1 \text{ es su valor mínimo y } f(6) = \frac{1}{4}(3-6)^2 + 1 = \frac{13}{4}$$

es su valor máximo.

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS A.B ▼

1. Aplique el teorema del encaje en la evaluación de los límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right),$

sugerencia $-1 \leq \cos x \leq 1.$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right),$

sugerencia $-1 \leq \cos x \leq 1.$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cdot \cos\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right),$

sugerencia $-1 \leq \cos x \leq 1.$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sen\left(\frac{1}{x}\right),$

sugerencia $-1 \leq \sen x \leq 1.$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sen\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right),$

sugerencia $-1 \leq \sen x \leq 1.$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cdot \sen\left(\frac{1}{2x}\right),$

sugerencia $-1 \leq \sen x \leq 1.$

2.

a. El volumen de una esfera puede variar de 14 a 16 decímetros cúbicos, ¿cuánto puede variar su radio? Explique.

b. El volumen de un cubo puede variar de 0.98 a 1.02 decímetros cúbicos, ¿cuánto puede variar la longitud de su lado? Explique.

c. El radio interno de un aro puede variar entre 44 y 48 centímetros, ¿cuánto puede variar su perímetro? Explique.

3. Utilice la *definición A.2 y 1.9* y muestre que la función es continua para el valor x indicado.

a. $f(x) = 2x - 5$ en $x = 6.$

b. $f(x) = \sqrt{2x - 5}$ en $x = -2.$

c. $f(x) = \frac{2x + 2}{x + 3}$ en $x = 1.$

d. $f(x) = \sqrt[3]{8 - x}$ en $x = 0.$

4. Decida si la función es continua o no continua en los valores x indicados, justifique su afirmación.

a. $f(x) = \frac{x}{x - 4}$ en $x = 1$ y $x = 4.$

b. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 9}$ en $x = -3$ y $x = 1.$

c. $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$ en $x = -3.$

d. $f(x) = \frac{x}{x^2}$ en $x = 0.$

e. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$ en $x = -1.$

5. Si es el caso, redefina las siguientes funciones de manera que sean continuas en todo $\mathbb{R}.$

a. $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 4}.$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$

c. $f(x) = \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}.$

d. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}.$

6. a. Utilice el teorema de los ceros de Bolzano y la función con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 2$ para justificar que el número $\sqrt{2}$ existe.

b. Utilice el teorema de los ceros de Bolzano y una función continua para justificar que el número 3 existe.

c. Utilice el teorema de los ceros de Bolzano y una función continua para justificar que el número $\sqrt[3]{5}$ existe.

e. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2}$.

f. $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2+5x+4}$.

g. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-2}$.

h. $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x}$.

7. Determine el número x_0 (o los números x_0) que predice el teorema del valor intermedio.

a. $f(x) = 2x + 3$ en $[-1, 3]$ y $f(x_0) = 5$.

b. $f(x) = 16 - x^2$ en $[0, 4]$ y $f(x_0) = 12$.

c. $f(x) = x^2 + 5x + 4$ en $[-8, 6]$ y $f(x_0) = 0$.

d. $f(x) = x^3 - 8$ en $[-2, 2]$ y $f(x_0) = -9$.

8. a. ¿Existe algún número real tal que su cuadrado sea igual a -2 ?

Explique.

b. ¿Existe algún número real tal que sea igual a su cubo menos uno? Explique.

9. Determine los valores máximo y mínimo que predice el teorema de Weierstrass.

a. $f(x) = 4x - 2$ en $[-1, 3]$.

b. $f(x) = 9 - x^2$ en $[1, 3]$.

c. $f(x) = x^2 + 6x + 7$ en $[-4, -3]$.

d. $f(x) = x^3 - 8$ en $[-2, 2]$.

A.C DERIVABILIDAD

TEMÁTICA

i. Teoremas fuertes de derivación.

TEOREMAS FUERTES SOBRE DERIVACIÓN

En un curso formal de Cálculo Diferencial e Integral (a nivel bachillerato) deben incluirse las propiedades de las funciones derivables sobre un intervalo cerrado (que forma parte de su dominio). Estas propiedades sustentan formalizan y los teoremas de mayor aplicabilidad y relevancia del Cálculo Integral.

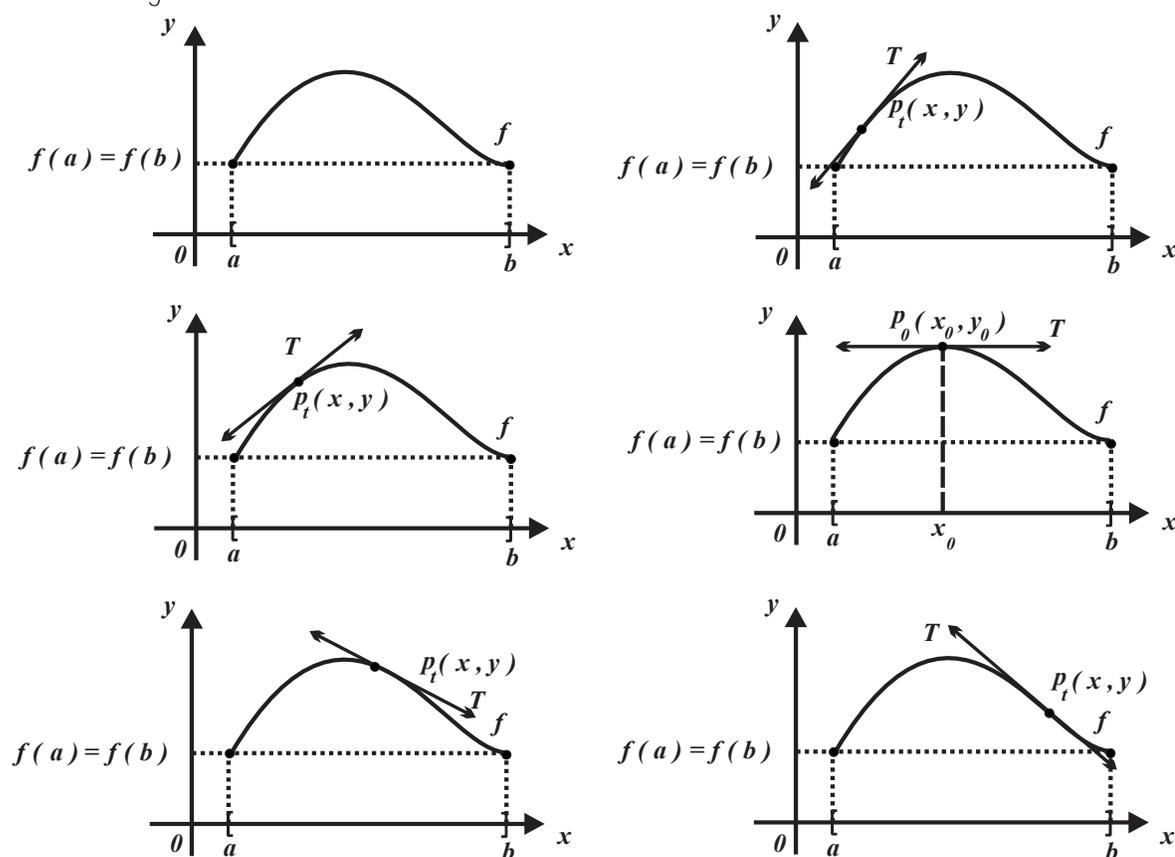


FIGURA C.1

La figura C.1 muestra la curva asociada a una función f que es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y que cumple las condiciones:

i. $f(a) = f(b) = 0$.

- ii. Es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
- iii. Es derivable sobre el intervalo abierto (a, b) .
- iv. $p_T(x, y)$ es el punto de tangencia (o contacto) de la recta tangente T a la curva asociada a la función f .

Note que al desplazar el punto de tangencia $p_T(x, y)$ a lo largo de la curva asociada a f , se encuentra (por lo menos) la existencia de un punto $p_0(x_0, y_0)$ en el que la línea recta tangente T es paralela al eje de las abscisas, lo que significa que su pendiente $m_T = 0$ (equivalentemente, f' cuando $x = x_0$).

Las observaciones anteriores fueron formalizadas por Michel Rolle en 1691, en su memoria la propiedad C.1 lleva su nombre.

PROPIEDAD C.1 (TEOREMA DE ROLLE)

Sea f una función:

- i. Continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$,
- ii. Derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
- iii. $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número x_0 en $[a, b]$ tal que $f'(x_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Dado que f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza valores máximo y mínimo absolutos sobre $[a, b]$, es decir, existen números x_m y x_M en $[a, b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para toda x en $[a, b]$ (por el teorema del máximo y del mínimo de Weierstrass).

- i. Si x_m y x_M coinciden con los extremos de $[a, b]$ respectivamente, entonces f es una función constante y $f'(x_0) = 0$.
- ii. Si x_m (x_M) es diferente de los números a y b , entonces f alcanza el valor mínimo (o su valor máximo) sobre un número del intervalo (a, b) , puesto que f es derivable en x_m (x_M), entonces $f'(x_m) = 0$ ($f'(x_M) = 0$).

EJEMPLO C.3 (EL TEOREMA DE ROLLE)

a. Determinemos el número x_0 de manera que la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ satisfaga las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo $[1, 3]$.

- i. Dado que f es una función polinomial, entonces es continua sobre $[1, 3]$.
- ii. Derivable en $(1, 3)$.
- iii. También $f(1) = f(3) = 2$.

Por tanto, se satisfacen todas las condiciones del teorema de Rolle en $[1, 3]$ y existe $x_0 \in (1, 3)$ en el que la función derivada vale cero, $f'(x_0) = 2x_0 - 4 = 0$, el número que predice el teorema de Rolle es $x_0 = 2$.

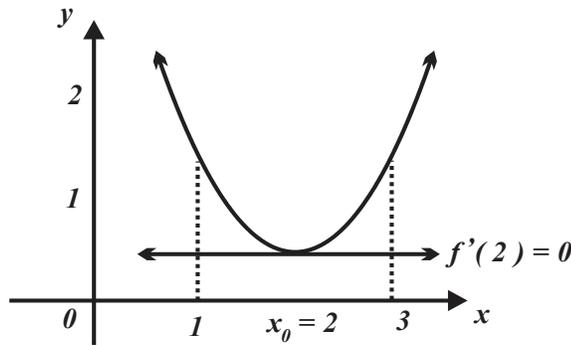


FIGURA C.2

b. Revisemos si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ y si es el caso determinaremos los valores de x_0 que predice esta propiedad.

i. Puesto que $f(x) = x - x^3$ es una función polinomial, entonces es continua los intervalos

$$[-1, 0] \text{ y } [0, 1].$$

ii. Es derivable en todos los números de los intervalos abiertos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

iii. Además $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle. Puesto que, $f'(x_0) = 1 - 3x^2$, entonces

$1 - 3x^2 = 0$ cuyas soluciones son los números $x_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_{02} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, mismos que satisfacen las

condiciones del teorema de Rolle.

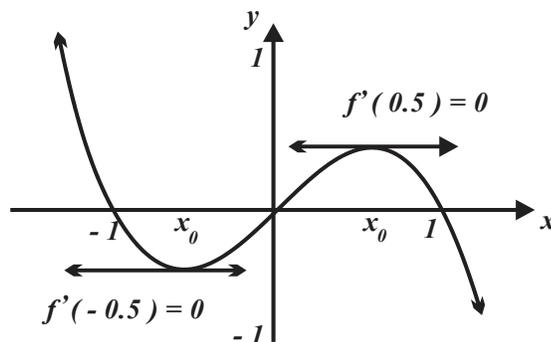


FIGURA C.3

c. Determine el número b de manera que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ satisfaga las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo $[0, b]$. Dado que f es una función polinomial es continua en

$[0, b]$ y derivable en $(0, b)$. En el teorema de Rolle $f(a) = f(b)$, por tanto, $3 = b^3 - 4b + 3$ o $b^3 - 4b = 0$, las soluciones de esta ecuación son $b = 0$, $b = -2$ y $b = 2$, pero sólo $b = 2$ satisface las condiciones del teorema de Rolle ¿por qué?

También $f'(x) = 3x^2 - 4$, si $f'(x) = 0$, entonces $3x^2 - 4 = 0$, luego $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, pero sólo $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ es el número que predice el teorema de Rolle (note que el número $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ no pertenece al intervalo $[0, b]$).

PARA REFLEXIONAR

!?	<p>Proporcione una función, definida sobre un intervalo cerrado, que no satisfaga las hipótesis del teorema de Rolle de: continuidad y derivabilidad.</p> <p>¿Qué significa omitir la hipótesis $f(a) = f(b)$ en el teorema de Rolle? De una explicación geométrica.</p>
-----------	---

Si en el teorema Rolle se omite la hipótesis $f(a) = f(b)$ y posteriormente se desplaza el punto de tangencia $p_T(x, y)$ sobre la curva asociada a f , entonces se observa por lo menos un punto (x_0, y_0) en el que la línea recta tangente T es paralela a la línea recta (secante S) que definen los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, vea la figura C.4. Esta propiedad se conoce como “propiedad del valor medio”.

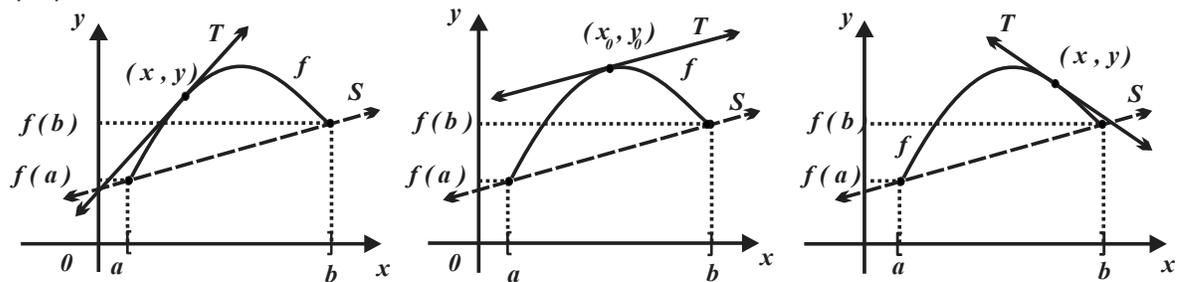


FIGURA C.4

PROPIEDAD C.2 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE)

Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable sobre el intervalo abierto (a, b) , entonces existe al menos un número x_0 en $[a, b]$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El teorema del valor medio afirma:

- i. La “función razón de cambio promedio” es igual a la razón de cambio instantáneo” en uno o más puntos.

ii. Geométricamente, la línea recta tangente a la curva asociada a la función f en algún número x_0 (comprendido entre los números a y b) es paralela a la línea recta secante que contiene a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, vea la figura C.5

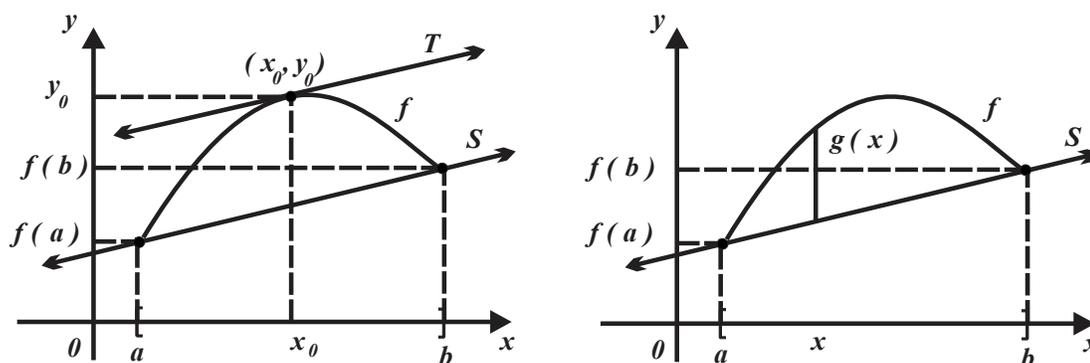


FIGURA C.5

DEMOSTRACIÓN

La demostración del teorema del valor medio se fundamenta en el teorema de Rolle.

i. Se construye la función $g(x)$ que proporciona la longitud del segmento rectilíneo vertical con extremos en los puntos $(x, f(x))$ y $\left(x, f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$ (el segundo punto pertenece a la línea recta secante de que contiene a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$) y de ecuación

$$f(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \text{ o bien } f(x) = f(a) + \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right],$$

vea la figura C.6. Por tanto, $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

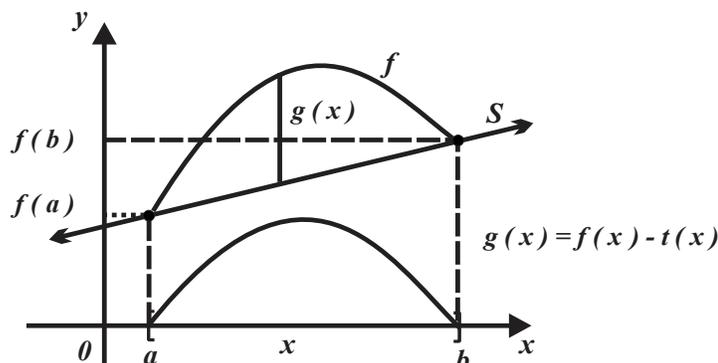


FIGURA C.6

ii. Sea la función $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, entonces

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

y

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = 0,$$

por lo que $g(x)$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle.

iii. También $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

iv. De acuerdo con el teorema de Rolle, existe un número x_0 en el intervalo $[a, b]$ tal que

$g'(x_0) = 0$, entonces $g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$, es decir

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

EJEMPLO C.4 (EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

a. Determinemos el número x_0 en el intervalo $[0, 2]$ que predice el TVM, si $f(x) = x^3 - x$.

i. Es continua sobre $[0, 2]$ puesto que es una función polinomial.

ii. Es derivable sobre el intervalo $(0, 2)$.

iii. $f(2) = 6$ y $f(0) = 0$.

Puesto que $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$, entonces $m = \frac{6-0}{2-0} = 3x_0^2 - 1$, de donde $3 = 3x_0^2 - 1$ o $3x_0^2 - 4 = 0$,

por lo que $x_{01} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x_{02} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. De ellos, sólo $x_{01} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ pertenece al intervalo $[0, 2]$.

b. Justificaremos que $f(x) = x^2 - 2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 2]$.

i. Es continua sobre $[1, 2]$ puesto que es una función polinomial.

ii. Es derivable sobre el intervalo $(1, 2)$.

iii. $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$, por tanto, existe un cambio de signo en el intervalo $(1, 2)$.

Por tanto, existe x_0 en $(1, 2)$ tal que $f(x_0) = x_0^2 - 2 = 0$, entonces $x_0 = \pm\sqrt{2}$ y $x_0 = \sqrt{2}$ es un cero de la función $f(x) = x^2 - 2$ sobre $(1, 2)$.

▲ EJERCICIOS PROPUESTOS A.C ▼

1. ¿Satisface la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$? Si es el caso, determine todos los números x_0 que predice.

2. Si $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, determine el número x_0 en el intervalo $[-1, 2]$ que predice el Teorema de Rolle.

3. ¿Satisface la función $f(x) = 1 - x$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

4. ¿Satisface la función

$$f(x) = x^2 - 4x + 11$$

las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$? Si es el caso, determine todos los números x_0 que predice.

5. ¿Satisface la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$? Si es el caso, determine todos los números x_0 que predice el teorema de Rolle.

6. Determine el valor de b de manera que la función

$$f(x) = x^3 - 4x + 3$$

satisfaga las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$? Posteriormente determine el número x_0 .

7. Determine los intervalos de manera que la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

satisfaga las condiciones del teorema de Rolle.

8. Determine el número que predice el teorema del Valor Medio cuando

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1$$

sobre el intervalo $[0, 2]$.

9. Determine el número que predice el teorema del valor medio $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el intervalo $[-2, 1]$. Si es el caso, determine todos los números x_0 .

10. Determine el número que predice el teorema del Valor Medio cuando $f(x) = x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

11. Determine los números que predice el teorema del Valor Medio cuando $f(x) = x^3 + x^2 - x$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.

12. Determine el punto de la sección parabólica comprendida entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 0)$, en el que la línea recta tangente es paralela a la línea recta secante que incluye a los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 0)$.

13. Determine el número x_0 en el intervalo $[1, 3]$ en el que la línea recta tangente a la curva asociada a $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ es paralela a la línea recta secante definida por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 20)$.

A. D

SOLUCIONES

1.1

DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- $f'(x) = 4\cos - 1$.
 - $f'(x) = 4x^3 - 2\operatorname{sen} x$.
 - $f'(x) = \sec^2 x - \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$.
 - $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} - \sqrt{7}\cos x$.
 - $f'(x) = 4\sec^3 x + 4\sec x \operatorname{tg}^2 x$.
- $f'(x) = 2[-\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x] + 6\operatorname{csc}^2 x$.
 - $f'(x) = \frac{1 - x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$.
 - $f'(x) = \frac{1 - x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$.
 - $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x} \left[\frac{1}{2x} - \operatorname{ctg} x \right]$.
 - $f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - x} \left[\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} - \frac{2x-1}{x^2 - x} \right]$.
- $f'(x) = -8 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$.
 - $f'(x) = \frac{\cos x - 1}{x^3} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{3}{x} \right]$.
- $f'(t) = -t^{-3} \operatorname{csc}^2 t - 3t^{-4} \operatorname{ctg} t$.
 - $f'(w) = 2\sec^2 w - 2\operatorname{csc}^2 w$.
- $f'(x) = 1$.
 - $f'(x) = \cos(x+5)$.
 - $f'(x) = -\operatorname{sen}(x+5)$.
 - $f'(x) = 2\cos(2x)$.
 - $f'(x) = \cos(x-\pi)$.
 - $f'(x) = -\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x$.
 - $f'(x) = \operatorname{sec} x \operatorname{tg} x$.
- $f'(u) = (3u^2 + 4)\cos(u^3 + 4u)$.
 - $f'(z) = -2z \operatorname{sen}(z^2 + 4)$.
 - $f'(z) = 3(\operatorname{sen} z + 4)^2 \cos z$.
 - $f'(x) = 5x^4 \cos x^5$.
 - $f'(t) = 4t^3 \sec^2(t^4)$.
 - $f'(x) = 4(\operatorname{tg} x)^3 \sec^2 x$.
- $f'(r) = -\frac{33}{(2-r)^2} 3\operatorname{sen}^2\left(\frac{1-6r}{2-r}\right)$.
 - $f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \operatorname{sen}\sqrt{3x^2+1}$.
 - $f'(x) = -\frac{1+\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x-x}}$.
 - $f'(x) = \frac{(x^2+x+1)(2x-2)\sec^2(x^2-2x) - (2x+1)\operatorname{tg}(x^2-2x)}{(x^2+x+1)^2}$.
 - $f'(x) = \sec(x^3+4) \left[(1-x)\operatorname{tg}(x^3+4) - 1 \right]$.
 - $f'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2} \cos\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$.
- $f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x^4 - 11)(-5x^4 \operatorname{sen} x^5) - (\cos x^5)(4x^3 \cos x^4)}{(\operatorname{sen} x^4 - 11)^2}$.
 - $f'(x) = -\frac{(x^2 + 2\cos x - 1)(\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x) + (2x - 2\operatorname{sen} x)(\operatorname{csc} x + 2)}{(x^2 + 2\cos x - 1)^2}$.
 - $f'(t) = 4(\operatorname{sent} + \operatorname{cost})^3 (\operatorname{cost} - \operatorname{sent})$.
 - $f'(x) = 3\left(\frac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^2 \left(\frac{1+\operatorname{sen} x - \cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\right)$.
 - $f'(t) = \frac{2t(\operatorname{sen}^2 t)\operatorname{cost}^2 - 2(\operatorname{sent} \operatorname{cost})\operatorname{sen} t^2}{\operatorname{sen}^4 t}$.
- $x - y + 1 = 0$
 - $x + y - 1 = 0$
 - $\sqrt{3}x - y + \left(1 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\right) = 0$
- $(3\sqrt{3}\pi - 6)x - \pi^2 y - (9\sqrt{3} - 15\pi) = 0$.
- $y^{(3n)} = a \operatorname{sen} x$.
 - $y^{(4n)} = a \cos x$.

10. a. $y^{(3n)} = -\cos x$. b. $y^{(4n)} = \operatorname{sen} x$. c. $y = \operatorname{sen} ax$. $y^{(3n)} = -a^{3n} \cos ax$. d. $y = \operatorname{sen} ax$. $y^{(4n)} = -a^{4n} \operatorname{sen} ax$.
11. a. $y^{(3n)} = \operatorname{sen} x$. b. $y^{(4n)} = \cos x$. c. $y^{(3n)} = a^{3n} \operatorname{sen} ax$. d. $y^{(4n)} = a^{4n} \cos ax$.
12. a. $f'(x) = u'(x) \cos u(x)$. b. $f'(x) = u'(x) \operatorname{sen} u(x)$. c. $f'(x) = u'(x) \sec^2 u(x)$.
17. a. Identidad trigonométrica pitagórica. b. Identidad trigonométrica pitagórica.
19. a. Máximos $M_1\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$, $M_2\left(\frac{5\pi}{4}, 4\right)$, mínimos $m_1\left(\frac{3\pi}{4}, -4\right)$ y $m_2\left(\frac{7\pi}{4}, -4\right)$. b. Máximo $M\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, mínimo $m\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$. c. Máximo $M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, mínimo $m\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.
20. a. $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)(\cos x)$. b. $f''(x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$. c. $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. d. No hay
- e. $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$. f. Máximo $M_1\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $M_2\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, mínimo $m_1(\pi, 0)$. g. Si $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$.
- h. Crece $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, decrece $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. i. Cóncava hacia abajo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.
23. a. $F(t) = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$. b. $F(t) = -\frac{1}{5} \cos 5t$. 24. a. $F(t) = \frac{1}{a} \operatorname{sen} at$. b. $F(t) = -\frac{1}{b} \cos bt$.
25. $T'(t) = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{12}$. 26. $v'(t) = f'(t) = -\operatorname{sen} t$. 27. $f(t) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \frac{1}{6} \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)$ y $v(t) = -3 \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right) 12t - 2 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)$.

1.2

DERIVADA DE LAS FUNCIONES
LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

1. a. $f(x) = x^5$. b. $f(x) = x^3$. c. $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. d. $f(x) = e^{-\frac{5}{4} \ln x}$. e. $f(x) = x^{-3}$. f. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
2. a. $f(x) = x^4$. b. $f(x) = x^3$. c. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. d. $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. e. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. f. $f(x) = 7^{-2 \log_7 x}$.
3. a. $f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t$. b. $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-t}$. c. $f(t) = (8)^{-\frac{1}{5}t}$. d. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6x}$.
4. a. $f(x) = e^{x \ln 4}$ y $f'(x) = e^x \ln 4$. b. $f(x) = e^{x \ln x}$ y $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$. c. $f(x) = e^{x \ln(\operatorname{sen} x)}$ y $f'(x) = \left(\frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} + \ln(\operatorname{sen} x)\right) x^{\operatorname{sen} x}$. d. $f(x) = e^{x \ln(\cos x)}$ y $f'(x) = \left(-\frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x} + \ln(\cos x)\right) (\cos x)^x$.
- e. $f(x) = e^{\sqrt{x} \ln 2}$ y $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \ln(2)$. f. $f(x) = x^2 e^{x \ln 3}$ y $f'(x) = \ln(3)x^2 3^x + 3^x 2x$.
5. a. $f'(x) = 4e^x$. b. $f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x+3}$. c. $f'(x) = (3x^2-3)e^{-3x+x^3}$. d. $f'(x) = (\operatorname{sen} x)e^{1-\cos x}$.
- e. $f'(x) = -\frac{e^x}{x^2}$. f. $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. a. $f'(x) = 2x^4 e^{2x} + 4x^3 e^{2x}$. b. $f'(x) = -e^{-x} \operatorname{sen} 2x + 2e^{-x} \cos 2x$. c. $f'(x) = -\sqrt{x} e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$.
- d. $f'(x) = \frac{(4+e^x)e^x - (3-e^x)e^x}{(4+e^x)^2}$. e. $f'(x) = -x(1-x^2)e^{\sqrt{1-x^2}}$.
7. a. $f'(x) = 2x^4 e^{2x} + 4x^3 e^{2x}$. b. $f'(x) = -3e^{2x} \operatorname{sen} 3x + 2e^{2x} \cos 3x$. c. $f'(x) = 2(3x - \sqrt{x})e^{2x} + e^{2x} \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

- d. $f'(x) = \frac{-2e^{-2x}\sqrt{x} - \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{x}}}{x}$. e. $f'(x) = \frac{1+x+e^x}{x-e^{4x}}$.
8. a. $f'(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x+3}} \left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{2(e^x+3)} \right)$. b. $f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^x-x}{x-e^{-x}}} \left(\frac{e^x-1}{e^x-x} - \frac{1+e^{-x}}{x-e^{-x}} \right)$.
- c. $f'(x) = (e^x+3)\cos(e^x+3x)$. d. $f'(x) = \frac{xe^x-e^x}{x^2} \sec^2\left(\frac{e^x}{x}\right)$. e. $f'(x) = -\left(\frac{(x+1)e^x-e^x}{x^2+2x+1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$.
9. a. $f'(x) = \frac{3x^2+4x+1}{x^3+2x^2+x-2}$. b. $f'(x) = -\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$. c. $f'(x) = \frac{2}{3x^2+6x}$. d. $f'(x) = -\frac{2}{1-x^2}$.
- e. $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$. f. $f'(x) = \frac{6\cos 2x}{1+3\operatorname{sen} 2x}$. 10. a. $f'(x) = \frac{4x^3+6e^2}{x^4+6e^x}$. b. $f'(x) = \frac{1}{x(3+\ln x)}$.
- c. $f'(x) = \frac{-3\sec^2 3x}{1-\operatorname{tg} 3x}$. d. $f'(x) = \frac{4x}{x^4-1}$. e. $f'(x) = -\frac{1+xe^x}{e^{2x}-1}$.
11. a. $f'(x) = \frac{(4x^2+5x)(3x^2+4x+1)}{x^3+2x^2+x-2} + (8x+5)\ln(x^3+2x^2+x-2)$.
- b. $f'(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x-1} + (3\operatorname{sen}^2 x \cos x)\ln(x-1)$. c. $f'(x) = e^{5x} \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x} + 5e^{5x}\ln(x+\cos x)$.
- d. $f'(x) = \frac{6x^{11}+x^6e^{-x}}{x^6-e^{-x}} + 6x^5\ln(x^6-e^{-x})$. e. $f'(x) = -\frac{1+\ln(x+3)}{[(x+3)\ln(x+3)]^2}$.
12. a. $f'(x) = \frac{\frac{x^3 \operatorname{sen} x}{\cos x} + 3x^2 \ln(\cos x)}{[x^3 \ln(\cos x)]^2}$. b. $f'(x) = 3(x^3 + \ln x)^2 \left(3x^2 + \frac{1}{x} \right)$.
- c. $f'(x) = \frac{(x+\operatorname{sen} x)(4x+\operatorname{sen} x) + (2x^2-\cos x)(1+\cos x)}{(x+\operatorname{sen} x)(2x^2-\cos x)}$. d. $f'(x) = -\frac{\frac{2x\ln(x+1)}{x^2-1} - \frac{\ln(x^2-1)}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$.
- e. $f'(x) = \frac{(e^{2x}-\ln(3x))\left(2e^{2x}+\frac{5}{5x+1}\right) - (e^{2x}+\ln(5x+1))\left(2e^{2x}+\frac{1}{x}\right)}{(e^{2x}-\ln(3x))^2}$.
13. a. $(3e)x-y=0$. b. $5e^4x-y-8e^4=0$. c. $ex-y-e=0$. d. $ex-y=0$.
14. a. $3x-y=0$. b. $x-y=0$. c. $x+y-2=0$. d. $2x+y-2=0$.
15. a. $\frac{\ln 3}{27\ln 3}x-y+\left(3-\frac{1}{\ln 3}\right)=0$. b. $\left(1-\frac{1}{4\ln 2}\right)x-y+\left(\frac{1}{\ln 2}-2\right)=0$.
16. a. Máximo $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}\right)$, inflexión $M\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$. b. Máximo $M\left(1, \frac{1}{e^2}\right)$, mínimo $m(0, 0)$, inflexiones $I_1\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}}\right)$, $I_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}}\right)$. c. $m(0, 0)$ mínimo relativo, $M\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ máximo relativo inflexiones en $x=-2\pm\sqrt{2}$.
- d. $m\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ mínimo relativo, inflexión en $I_1\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$. 17. a. Decrece $(0, 1)$, Crece $(1, e) \cup (e, +\infty)$, Mínimo $m(1, 0)$. Cóncava hacia arriba $(0, e)$, hacia abajo $(e, +\infty)$. Inflexión $P_1(e, 1)$. b. Decrece $(0, \frac{1}{e})$, crece $(\frac{1}{e}, +\infty)$, Mínimo $m\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$. Cóncava hacia arriba $(0, +\infty)$. c. Crece $(-\infty, 0)$, decrece $(0, +\infty)$,

Máximo $M(0, 0)$. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, hacia abajo $(-1, 1)$
 inflexiones $I_1(-1, \ln(\frac{1}{2}))$ y $I_1(1, \ln(\frac{1}{2}))$. 18. $T'(18) = \frac{35}{6} \left(\ln \frac{2}{5}\right) e^{\frac{1}{12} \ln \frac{36}{5}}$. 19. $T'(t) = 4 \left(\ln \frac{1}{3}\right) e^{\frac{1}{15} \ln \frac{20}{3}}$. 20.
 $T'(t) = 2 \left(\ln \frac{1}{3}\right) e^{\frac{1}{15} \ln \frac{1}{3}}$. 21. $C'(t) = 8000e^{0.08t}$. 22. $C'(t) = 40000e^{0.04t}$.

2.1

ÁREA BAJO UNA CURVA E
INTEGRAL DEFINIDA

1. a. $12 u^2$. b. $12 u^2$. c. $9 u^2$. 2. a. $14 u^2$. b. $6 u^2$. 3. a. $12.5 u^2$. b. $9 u^2$. 4. a. $27 u^2$. b. $3 u^2$.
 5. a. $A(t) = t^2 - 5t + \frac{25}{4}$. b. $A(t) = \frac{5}{2}t^2 - 4t + \frac{8}{5}$. c. $A(t) = \frac{3}{2}t^2 - t - \frac{21}{2}$. d. $A(t) = t^2 + 3t - 10$.
 e. $A(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t - 3$. f. $A(t) = 2t^2 - 10t + 12$. 6. a. $A(t) = t^2$. b. $A(t) = t^2 + t$. c. $A(t) = 2t$.
 10. a. $s(n) = 15$, $S(n) = 15$. b. $s(n) = 21$, $S(n) = 21$. c. $s(n) = \frac{33}{2} - \frac{27}{2n}$, $S(n) = \frac{33}{2} + \frac{27}{2n}$.
 d. $s(n) = 48 - \frac{32}{n}$, $S(n) = 48 + \frac{32}{n}$. 12. a. $15 u^2$. b. $21 u^2$. c. $\frac{45}{2} u^2$. d. $48 u^2$. 13. a. $6 u^2$. b. $\frac{4}{3} u^2$. c. $36 u^2$.
 d. $\frac{268}{4} u^2$.

2.2

FUNCIÓN ÁREA Y EL TEOREMA
FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1. a. $P = \{0, 2, 2.5, 4, 4.8, 5.4, 6.8, 7.2, 8\}$. b. $\|\Delta\| = 2$. 2. No, no se cumple la definición en cuanto a las desigualdades.
 3. a. $[-0.2, 1.4]$, $[1.4, 2.3]$, $[2.3, 4.1]$, $[4.1, 6.2]$, $[6.2, 7.3]$, $[7.3, 9]$. b. $\|\Delta\| = 1.7$.
 5. a. $\Delta x = \frac{1}{2}$. b. Las amplitudes de los rectángulos disminuye.
 7. a. 0 , $\frac{1}{n^2}$, $\frac{4}{n^2}$, $\frac{9}{n^2}$. b. $\frac{2i-1}{n^2}$, $\frac{2i-1}{n^2}$. c. $\frac{i}{n}$. d. $\frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}$, $\frac{n}{6n^3}$. e. $\frac{2}{3}$.
 8. a. 0 , $\frac{1}{n^2}$, $\frac{8}{n^2}$, $\frac{27}{n^2}$. b. $\frac{3i^2 - 3i + 1}{n^3}$. c. $\frac{i}{n}$. d. $\frac{3n^4 + 4n^3 + n^2 - n + 4}{2n^4}$. e. $\frac{3}{4}$.
 9. a. 12. b. 80. c. 0. d. -2. e. 72. f. $-\frac{21}{2}$. g. 0. h. 30.
 10. a. $\int_0^1 (2x+4) dx$. b. $\int_2^4 (1-3x) dx$. c. $\int_{-1}^1 (x-3x^3) dx$. d. $\int_{-2}^3 (x^2-2) dx$. e. $\int_0^5 \frac{4}{x^2+1} dx$. f. $\int_0^{\pi/4} \sin x^2 dx$.
 11. a. $\int_0^7 4 dx$. b. $\int_{-1}^1 (2-x^2) dx$. c. $\int_0^4 \left(-\frac{5}{4}x+5\right) dx$. d. $\int_{-2}^2 x^2 dx$. e. $\int_2^4 \sqrt{x-1} dx$.
 13. a. y e. 16. b., c. y d. son integrables en el intervalo indicado. 20. a. $\frac{27}{2}$. b. $-\frac{75}{2}$. c. 12. d. $-\frac{171}{4}$. e. 15. f. 84.
 22. a. $\int_{-5}^1 f(x) dx$. b. $\int_{-5}^3 f(x) dx$. c. $\int_{-3}^5 f(x) dx$. d. $\int_{-5}^5 f(x) dx$. 24. a. $x_0 = 2$. b. $x_0 = \frac{46}{9}$. c. $x_{01} = 1$ y
 $x_{02} = -1$. d. $x_0 = 1 - \sqrt{7/3}$. 25. a. 3. b. -1. c. 7. d. $-\frac{25}{3}$. 27. a. $F'(x) = e^x - \ln x$. b. $F'(x) = x - x^2 - 2$.
 c. $F'(x) = \frac{1+x}{2+x}$. d. $F'(x) = \frac{4+\cos x}{3-\sin x}$. 29. a. $F'(x) = 2x \cos(x^2+1)$. b. $F'(x) = [3(\sin x + 1) - 2] \cos x$.
 c. $F'(x) = 3^{8-3x+x^2} (8-3x+x^2) (-3+2x)$. d. $F'(x) = \frac{4e^x}{3-\sin(1-e^x)}$. 30. a. $F(-1) = 0$, $F(1) = \frac{4}{3}$.
 b. $F(-1) = -9$.

2.3	APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA
-----	---

1. a. 16 . b. $\frac{65}{3}$. c. $\frac{44}{3}$. d. $\frac{44}{3}$. 2. a. 4 . b. 25 . c. $\frac{71}{3}$. d. $\frac{19}{2}$. 3. a. 2 . b. 2 . c. 2 . d. 2π .
4. a. $\frac{125}{6}$. b. $\frac{4}{3}$. c. $\frac{9}{2}$. d. $\frac{9}{2}$. 5. a. $\frac{9}{2}$. b. $\frac{125}{6}$. c. $\frac{32}{81}$. d. $\frac{5}{12}$.
6. a. 3 metros y $\frac{16}{3}$ metros. $-\frac{16}{3}$ metros y 16 metros. $-\frac{2}{3}$ metros y $\frac{128}{3}$ metros.
7. a. 66 metros y 66 metros. b. Ambos $\frac{236}{3}$ metros. c. $-\frac{2}{3}$ metro y 66 metros. 8. a. $-\frac{10}{3}$ metros. b. $\frac{26}{3}$ metros.
9. a. 15804 anfibios. b. 46641 anfibios. 10. a. 211700 . b. 89130 . 11. a. 1105170 . b. 31382 .

3.1	MÉTODOS DE INTEGRACIÓN
-----	---------------------------

1. a. $F(x) = x^2 - 5x + c$. b. $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x + c$. c. $F(x) = x - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + c$.
 d. $F(x) = \frac{4}{5}x^{10} - \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{4}x^4 + c$. e. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + c$. f. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + c$.
 g. $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{2}x^2 + c$. h. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$. i. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}x^2 + c$. j. $F(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + \ln x + c$.
 k. $F(x) = \frac{7}{12}x^{\frac{12}{7}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$. l. $F(x) = \frac{3}{2x^4} + c$.
2. a. $F(x) = x^3 + \operatorname{sen} x + c$. b. $F(x) = -3\cos x - 4\operatorname{sen} x + c$. c. $F(x) = 3e^x - \cos x + c$. d. $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + c$.
 e. $F(x) = 4\ln x + 5e^x + c$. f. $F(x) = -\ln x + \frac{1}{\ln 3}3^x + c$.
3. a. $F(x) = -\frac{3}{x^5} + \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x} + c$. b. $F(u) = \ln u + \frac{2}{3\sqrt{u^3}} + c$. c. $F(v) = \ln v + \frac{2}{\sqrt{v}} + \frac{4}{3\sqrt[4]{v^3}} + c$.
 d. $F(z) = \frac{z^2}{2} - 2z + c$. e. $F(z) = \frac{z^2}{2} + 3z + c$. f. $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$. g. $F(x) = -\cos x + c$.
 h. $F(x) = \operatorname{sen} x + c$. i. $F(x) = x - 4e^{-x} + c$. j. $F(x) = x + 3e^x + c$. k. $F(x) = e^x - 4x + c$.
4. a. $F(x) = 2x^2 - 5x + 1$. b. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2$. c. $F(x) = x - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + \frac{2}{3}$. d. $F(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 - \frac{80}{3}$.
 e. $F(x) = 2x^4 + 5x - 11$. f. $F(x) = -x^5 + 5x + 24$.
5. a. $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x + 2$. b. $F(x) = 4\operatorname{sen} x + x + 3$. c. $F(x) = -2\cos x - 2x + 2\pi$. d. $F(x) = 3e^x + \frac{x^2}{2} + 1$.
 e. $F(x) = e^x + x$. f. $F(x) = e^x - e^{-x} + 1$. g. $F(x) = 3x^2 - \frac{x^4}{12} + 2x + 3$. h. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x + 2$.
 i. $F(x) = e^x + 1$.
6. a. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$. b. $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$. c. $F(x) = \frac{1}{x} + 1$. d. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{6}$.
 e. $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{7}{3}$. f. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - 5t + 7$.
7. a. $F(x) = e^{-4x} + c$. b. $F(x) = \ln(1 + x^2) + c$. c. $F(x) = \ln(x^2 + x^3) + c$. d. $F(x) = (\operatorname{sen} x)^5 + c$.
 e. $F(x) = \cos(\ln x) + c$.
8. a. $F(x) = e^{t \operatorname{gr} x} + c$. b. $F(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + c$. c. $F(x) = (x^3 + 4x)^{11} + c$. d. $F(x) = (x + \sqrt{x})^4 + c$.
9. a. $F(x) = -\frac{(5-8x)^4}{32} + c$. b. $F(x) = \frac{(1-8x^2)^6}{16} + c$. c. $F(x) = \frac{2(x^2+3x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$. d. $F(t) = \frac{2(t^2+3t)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$.
 e. $F(t) = \frac{(t^4+t^2)^5}{5} + c$.

10. a. $F(t) = \frac{(t^2+2t)^3}{3} + c$. b. $F(t) = \frac{(t+1)^5}{5} + c$. c. $F(s) = \sqrt{s^2+5} + c$. d. $F(s) = \sqrt{s^2+2s+4} + c$.
11. a. $F(x) = -\cos(x^4) + c$. b. $F(x) = 5\operatorname{sen}(e^x) + c$. c. $F(t) = 5\operatorname{sen}(e^x) + c$. d. $F(t) = -2\cos\sqrt{t} + c$.
- e. $F(t) = \operatorname{sen}(\ln t) + c$. f. $F(t) = -\frac{2}{3}\cos\left(t^{\frac{3}{2}}+6\right) + c$.
12. a. $F(s) = -\frac{1}{2\cos^2 s} + c$. b. $F(s) = -5e^{\cos s} + c$. c. $F(s) = -\frac{1}{2}\sqrt{4\cos s+1} + c$. d. $F(s) = -\frac{1}{2}\sqrt{(4\cos s+1)} + c$.
- e. $F(z) = -\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{z}{s}\right)\right)}{2} - \frac{\cos z}{2\operatorname{sen}^2 z} + c$. f. $F(s) = -\frac{1}{2}\left[\ln(\cos^2 s) + 5\right] + c$.
13. a. $F(t) = \frac{2}{3}\ln(x+4)^{\frac{3}{2}} + c$. b. $F(t) = -\frac{8}{3(\ln x+3)^3} + c$. c. $F(t) = 4\ln(\ln x) + c$. d. $F(x) = \cos(e^x) + c$.
- e. $F(t) = \frac{1}{7}(1+\ln x)^7 + c$.
14. a. $F(t) = (\ln x)^3\left[\frac{1}{7}(\ln x)^4 + \frac{2}{5}(\ln x)^2 + \frac{1}{3}\right] + c$. b. $F(x) = e^{e^x+\ln x} + c$.
- c. $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + (\ln 5)(\ln x) + c$. d. $F(x) = \frac{1}{10}\operatorname{sen}(\ln x+3) + c$.
15. a. $F(t) = t - \frac{1}{e^t} + C$. b. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+100} + C$. c. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. d. $F(t) = -\frac{1}{3}e^{3\cos t} + C$.
- e. $F(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$.
16. a. $F(x) = \ln|1+e^x| + C$. b. $F(t) = t + e^t + C$. c. $F(t) = t + 2e^{2t} + C$. d. $F(t) = \operatorname{sen}(e^t+5) + C$.
17. a. $F(x) = \operatorname{Ln}(x+1) + x + c$. b. $F(x) = 2x - 9\operatorname{Ln}(x+6) + c$. c. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}\operatorname{Ln}(2x+1) + c$.
- d. $F(x) = \frac{1}{60}\sqrt{1-4x}(24x^2-2x-1) + c$. e. $F(x) = \frac{2}{15}(x+3)^{\frac{3}{2}}(3x+19) + c$.
18. a. $F(x) = \frac{2}{135}(3x+1)^{\frac{3}{2}}(9x+13) + c$. b. $F(x) = \sqrt{2x} - \operatorname{Ln}(\sqrt{2x}+1) + c$.
- c. $F(x) = 18\operatorname{Ln}(\sqrt{x}+3) + x - 6\sqrt{x} + c$. d. $F(t) = -3\operatorname{Ln}(\sqrt[3]{t}+1) + x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + 3\sqrt[3]{t} + c$.
19. a. $F(x) = 2\ln(x+1) + 2x + c$. b. $F(x) = \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}\ln(3x+1) + c$. c. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln(2x-3) + c$.
- d. $F(x) = \frac{1}{15}\sqrt{2x+5}(6x^2+5x-25) + c$. e. $F(x) = \frac{1}{135}\sqrt{(3x-2)^3}(8x+53) + c$.
21. a. $F(x) = e^{x+2}(x-1) + c$. b. $F(x) = -e^{-x}(x+3) + c$. c. $F(x) = 8^x\left(\frac{x}{\ln 8}x - \frac{1}{9\ln 8}\right) + c$.
- d. $F(x) = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$. e. $F(x) = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{25}x^5 + c$. f. $F(x) = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$.
22. a. $F(t) = \frac{2}{15}\sqrt{t+2}(3t^2+2t-8) + c$. b. $F(s) = \frac{\sqrt{2}}{3}(s-4)\sqrt{s+2} + c$. c. $F(s) = \frac{2}{3}(s-2)\sqrt{s+1} + c$.
- d. $F(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t + c$. e. $F(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x + c$. f. $F(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + c$.
23. a. $F(z) = z(\ln z)^2 - 2z \ln z + 2z + c$. b. $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x + c$. c. $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{6}\operatorname{sen} x + c$.
- d. $F(x) = \frac{1}{90}(x+1)^9(9x-1) + c$. e. $F(x) = \frac{1}{30}(x+2)^5(5x+4) + c$. f. $F(x) = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + c$.
24. a. $F(x) = e^{x+3}(x^2-2x+2) + c$. b. $F(x) = e^{x+3}(x^2-2x+2) + c$. c. $F(x) = e^x(x^3-3x^2+6x-6) + c$.
- d. $F(x) = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + c$. e. $F(x) = \frac{x^9}{9}\ln x - \frac{x^9}{81} + c$. f. $F(t) = 2t \cos t + (t^2-2)\operatorname{sen} t + c$.
25. a. $F(x) = \frac{x}{32}\cos 8x + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{1}{256}\right)\operatorname{sen} 8x + c$. b. $F(x) = (x^3-6x)\operatorname{sen} x + 3(x^2-2)\cos x + c$.
- c. $F(x) = x(6-x)^2\cos x + 3(x^2-2)\operatorname{sen} x + c$. d. $F(s) = 3^s\left(\frac{s^2}{\ln 3} - \frac{2s}{\ln^2 3} + \frac{2}{\ln^3 3}\right) + c$.

- e. $F(s) = 2^s \left(\frac{s^3}{\ln 2} - \frac{3s^2}{\ln^2 2} + \frac{6s}{\ln^3 2} - \frac{6}{\ln^4 2} \right) + c$. f. $F(x) = 3^x \left(\frac{x^2}{\ln 3} - \frac{2x}{\ln^2 3} + \frac{2}{\ln^3 3} \right) + c$.
26. a. $F(x) = e^{10x} \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{100} \right) + c$. b. $F(x) = e^{-4x} \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{16} \right) + c$. c. $F(x) = e^x (x+4) + c$.
- d. $F(x) = \frac{1}{3} (x^3 + 64) \ln(x+4) - \frac{1}{9} x (x^2 - 6x + 48) + c$.
- e. $F(x) = \frac{1}{24} (8x^3 + 1) \ln(2x+1) - \frac{1}{36} x (4x^2 - 3x + 3) + c$.
27. a. $F(x) = \ln x - \frac{1}{x} (x+1) \ln(x+1) + c$. b. $F(t) = \frac{2}{15} (t+2)^{\frac{3}{2}} (3t+1) + c$. c. $F(z) = \frac{2}{3} (z-6) \sqrt{z+3} + c$.
- d. $F(t) = \cos(t+4) + t \operatorname{sen}(t+4) + c$. e. $F(t) = \frac{1}{16} \cos 4t + \frac{1}{16} t \operatorname{sen} 4t + c$.
28. $F(s) = \frac{1}{15} \sqrt{4s+5} (24s^2 + 10s - 25) + c$. b. $F(t) = \frac{2}{15} \sqrt{t+2} (3t^2 + 2t - 8) + c$.
- c. $F(z) = \frac{1}{3} (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + c$. d. $F(x) = \frac{2}{15} \sqrt{x+4} (3x^2 + 4x - 32) + c$.
29. a. $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln | \operatorname{tg} x + \operatorname{sech} x | + c$. b. $F(x) = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \cos x + \operatorname{sen} x) + c$.
- c. $F(x) = \frac{1}{17} e^{4x} (4 \operatorname{sen} x - \cos x) + c$. d. $F(x) = \frac{1}{3} (x^3 + 64) \ln(x+4) - \frac{1}{9} (x^3 - 6x^2 + 48x) + c$.
- e. $F(z) = \frac{1}{2} \ln^2 z + c$. f. $F(z) = \frac{1}{4} z^4 \ln z - \frac{1}{16} z^4 + c$.

3.2

APLICACIONES CONTEXUALIZADAS

1. $f(x) = x^3 + x^2 + 2$. 2. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{1}{3}$. 3. $f(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{x} + 2x + \frac{7}{4}$. 4. $x(2) = \frac{62}{3}$ metros. 5. $x(4) = \frac{524}{3}$ metros. 6. $v(t) = -9.8t + 60 \text{ m s}^{-1}$. 7. a. 590 metros en $t = 20.96$ segundos. b. $v(20.96) = -107.41 \text{ m s}^{-1}$. 8. $T(t) = 30e^{-0.1352t} + 40$. 9. $T(t) = 12e^{\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})t} + 16$, a las 15:30 horas. 10. $N(t) = 140e^{0.409t}$. 11. $M(t) = 33e^{0.5493t}$.

4.1

ANTECEDENTES Y TÉRMINOS

1. a. $\frac{dA}{dt} = 100 - A$. b. $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{ma})$. c. $\frac{dA}{dt} = kA$. d. $m \frac{dv}{dt} = F$. e. $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi r^2}$. f. $\frac{dA}{dt} = 20\pi r$. g. $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}$.
- h. $\frac{dV}{dt} = 0,2 - 5t$. i. $\frac{S(t)}{V}$, $\frac{dS}{dt} = rs - \frac{rS(t)}{V}$.

2. a. $\frac{dD}{dt} = rD$. b. $\frac{dG}{dt} = \frac{k}{G}$. c. $\frac{dP}{dt} = 2 - 0,8p$. d. $\frac{dP}{dh} = kP$, con $k < 0$. e. $\frac{dT}{dt} = k(23 - T)$. $T(0) = -10$.
- f. $\frac{dQ}{dt} = 3 - \frac{1}{10}Q$, $Q(0) = 20$. g. $\frac{dO}{dt} = 1,2 - \frac{1}{10}Q$.

3. a. $y = k(x^2 + 1) - 1$. b. $y = \sqrt{\frac{t^3}{6} + 2t + C}$. c. $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2t} + C)$. d. $y = \left(3\sqrt{\frac{t}{2}} + k \right)^{\frac{2}{3}}$. e. $y = kt$. f. $y = 4t^2 + 4$.

- g. $y = \sqrt{t^2 + k + 5}$. h. $(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + (t^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + k = 0$. i. $y = e^{kt+C}$. j. $y^2 \ln y - \frac{y^2}{2} - t^2 + C = 0$. k. $y^2 = ke^{2\sqrt{x^3+1}} + 4$.

- l. $y = \frac{1}{5}(kt^5 - 2)$. m. $e^y(y-1) + \frac{t^2}{2} - \ln\left(\frac{k}{t^4}\right) = 0$. n. $y = \sqrt{8 \operatorname{sent} + k}$.

4. a. $e^{-y^2} - e^{-2x} + C = 0$. b. $T(t) = Ce^{kt} + 10$. c. $y = \sqrt{\frac{5}{2}e^t + k}$. d. $r(\theta) = \sqrt{2e^\theta(\theta-1) + k}$.

e. $\frac{y^2}{2} + y - e^x - 2x + C = 0$. f. $y(\theta) = ke^{\sin\theta - \cos\theta}$. g. $r - \theta + \ln(Kr\theta) = 0$. h. $y = \sqrt{K(x^2 + 5)} - 5$. i. $y = ke^{\frac{1}{4x^2 + 3}}$.

j. $\sin y - \sin x + C = 0$. k. $y = 6\sqrt{t^2 + 4} + k$. l. $y^2 - ke^{-\frac{1}{x^2}} - 3 = 0$. 5. a. $y = -\frac{2}{x} + 3$. c. $y = \ln\left|\frac{2}{3 - e^{2t}}\right|$.

d. $y = \left(\frac{1}{8}t^{\frac{4}{3}} + \frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$. e. $y = 6\left(t \ln t - t + \frac{4}{3}\right)$. i. $y = 2e^{2t-1}$. k. $\frac{y^2}{2} + y - \frac{t^3}{3} - 4t - \frac{3}{2} = 0$. l. $y = -3t^2 + 192$.

n. $y = \sqrt{\sin 4t + 1}$. p. $y = \sqrt{\frac{5}{2}e^t - \frac{3}{2}}$. s. $y = \sqrt[3]{\frac{16}{(e^{-t^2} + 7)^2}}$. t. $y = 2\sqrt{1 - t^3} - 2$.

6. a. $y = x \ln x + kx$. b. $y = ke^x - x - 1$. c. $y = x \ln |Kx|$. d. $3yx^2 - y^3 + K = 0$.

7. a. $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{k}{e^x}$. b. $y = -x^2 + Kx^3$. 8. a. $y = 2x^2 + x - 1$. b. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 6$.

4.2

MODELOS DE CRECIMIENTO
Y PREDICCIÓN

1. a. $\frac{dp}{dt} = -2p$, $p(t) = 2e^{kt}$. b. $\frac{dp}{dt} = 3p$, $p(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$. c. $\frac{dp}{dt} = 4p$, $p(t) = \frac{1}{2}e^{6t}$. d. $\frac{dp}{dt} = \ln(2)p$,

$p(t) = 2^{t-1}$. 2. 79.264 años. 3. 4500. 4. $p_0 = 16\,620$. 5. $p_0 = 156\,800$. 6. a. 694. b. $F(t) = 694e^{0.366t}$. 7. a.

$8.9979F_0$. b. 11.31. 8. $p(t) = 200e^{2.0149t}$, 632805. 9. a. -0.1814. b. $0.1252N_0$. 10. $\lambda = -\frac{\ln(0.6)}{50}$,

aproximadamente 67.85 días. 11. Aproximadamente 4985 días. 12. a. 12.5%. b. Aproximadamente 4985 años. 13. a.

$0.81N_0$. b. aproximadamente 3325.24 años. 14. a. $\frac{dN}{dt} = -0.11157N$, $N(t) = 500e^{-0.11157t}$. b. 320.0023 gramos.

c. 6.2127 meses. 17. 8.38 años. 21. $\frac{dp}{dt} = -2p\left(\frac{500000-p}{500000}\right)$. 22. a. $p(t) = \frac{200000}{1 + 999e^{-2.0214t}}$.

$\frac{dp}{dt} = 2.0214p\left(\frac{200000-p}{200000}\right)$. b. 153022. 23. a. $p(t) = \frac{450000}{1 + 1499e^{-0.2313t}}$, $\frac{dp}{dt} = 0.2313p\left(\frac{450000-p}{450000}\right)$. b.

10385. 24. 276 personas. 26. a. $p(t) = \frac{1500}{1 + 14e^{-0.407t}}$. b. 1356.

A. B

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. a. 1. b. 1. c. 1. d. 1. e. 1. f. 1.

2. a. De $\sqrt[3]{\frac{21}{2\pi}}$ a $\sqrt[3]{\frac{24}{2\pi}}$. b. De $\sqrt[3]{0.98}$ a $\sqrt[3]{1.02}$. c. De 88π a 96π .

7. a. $x_0 = 1$. b. $x_0 = 2$. c. $x_0 = -4$. d. $x_0 = -1$.

9. a. $\text{mín} = -6$ y $\text{máx} = 10$. b. $\text{mín} = 0$ y $\text{máx} = 8$. c. $\text{mín} = -2$ y $\text{máx} = -1$. d. $\text{mín} = -16$ y $\text{máx} = 0$.

A. C

DERIVABILIDAD

1. Sí. $x_0 = 2$. 2. $x_0 = \frac{8-\sqrt{148}}{6}$. 3. No. 4. Sí. $x_0 = 2$. 5. Sí. $x_0 = \frac{2\pm\sqrt{7}}{2}$. 6. $b = 2$ y $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 7. $[1, 2]$ y $[2, 3]$. 8. $x_0 = 1$. 9. $x_0 = -1$. 10. $x_0 = \frac{1}{2}$. 11. $x_0 = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$. 12. $(2, -\frac{1}{2})$. 13. $x_0 = \frac{2+\sqrt{112}}{6}$.