UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL AZCAPOTZALCO

GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN EXTRAORDINARIO

PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO 2024

MATEMÁTICAS II

Autores:

Huerta Vázquez Miguel Ángel (coordinador)

Ayona Argueta Miguel Ángel

Albarrán Iturbe Laura Angélica

Rayón Alegría Rebeca Remedios

Medina Morales Ruth Mireya

García López Xóchitl Josefina

De Haro González Elizabeth

Espinosa Ramírez Mario Alberto

Salazar Nájera América Ariana

Índice

1. Unidad I Ecuaciones Cuadráticas

Aprendizaje:

- *Comprende la relación entre las constantes e incógnitas del problema dado.*

La ecuación cuadrática en una variable adopta la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $(a \neq 0)$

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican en dos tipos: ecuaciones cuadráticas completas y ecuaciones cuadráticas incompletas.

$x^2 + x - 2 = 0$	$2x^2 + 6x = 0$	$3x^2 - 27 = 0$
Ecuación cuadrática completa	Ecuación cuadrática incompleta	

Las ecuaciones cuadráticas completas tienen los términos: cuadrático (ax^2), lineal (bx) y constante (c). En las ecuaciones cuadráticas incompletas falta alguno de estos dos últimos.

Para distinguir entre ambos tipos de ecuaciones incompletas, es necesario observar los términos con la variable:

Pura: $3x^2 - 27 = 0$ Solo aparece el término cuadrático $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Mixta: $2x^2 + 6x = 0$ Sólo términos cuadrático y lineal $ax^2 + bx = 0$

1.1. Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Sugerimos la siguiente estrategia:

1. Leer con mucho cuidado el problema.
2. Discutirlo con tus compañeros o tu asesor, para distinguir lo que se da como dato, lo que se busca y cómo poder modelarlo.

A continuación, se presentan algunos problemas que se pueden resolver por medio de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Ejemplo 1. Un granjero desea cercar un terreno rectangular utilizando parte de su granero para un lado y tela de alambre en los otros tres lados. El lado paralelo al granero mide el doble que el lado restante, y el área del terreno debe ser 128m^2 Con esta información, ¿Cuántos metros de tela de alambre debe comprar para cercar el terreno?

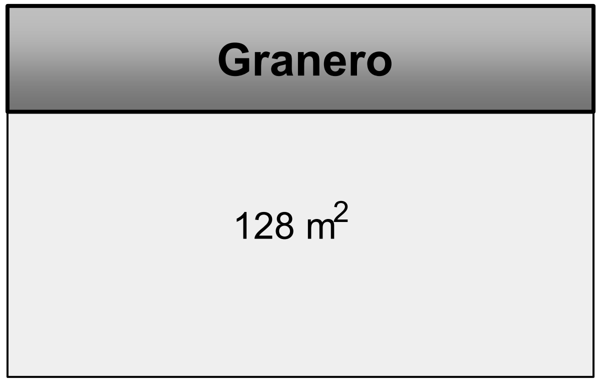


Figura 1. Terreno

Solución.

Analizando el problema ¿cuáles son los datos y condiciones del problema?

Suponiendo que x es la medida del largo del rectángulo en metros y de acuerdo con el texto “el largo del terreno mide el doble que el lado restante”, entonces el lado restante debe medir $\frac{x}{2}$,En consecuencia, retomando x, el área del terreno será:

$$A = b \cdot h \text{ (*área de un rectángulo*)}$$

$$A = x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \frac{x^2}{2}$$

Como el área del terreno es igual a $128m^2$, entonces la ecuación será:

$$\frac{x^2}{2} = 128$$

$$x^2 - 256 = 0$$

esta es una ecuación cuadrática pura, de la forma $ax^2 + c = 0$.

Ejemplo 2. La cooperativa de una escuela decidió repartir entre los alumnos los fondos que había reunido durante el año, los cuales ascienden a $200. Se le dio a cada alumno cierta cantidad, pero antes de terminar de repartir llegaron cinco alumnos más, por lo que tuvo que hacer la repartición nuevamente, y en esta ocasión le tocó a cada uno $2 menos que en la primera. ¿Cuántos alumnos eran inicialmente?

Solución.

Si representamos con a el número de alumnos y p el monto que le tocó a cada uno, entonces la siguiente ecuación representa lo que le correspondió a cada alumno después de la primera repartición: $\frac{200}{a} = p \qquad ec. 1$

La siguiente ecuación representa el total que recibió cada alumno después de la segunda repartición: $\frac{200}{a+5} = p - 2 \qquad ec. 2$

Sustituye el valor de p de la ec. 1 en la ec. 2 y tendrás: $\frac{200}{a+5} = \frac{200}{a} - 2$

Como te puedes dar cuenta, solamente aparece la variable que representa a los alumnos. Si multiplicas por $a(a+5)$ ambos lados de la igualdad, obtendrás la ecuación:

$a(a+5)\left[\frac{200}{a+5}\right] = a(a+5)\left[\frac{200}{a} - 2\right]$

es decir: $\frac{200[a(a+5)]}{a+5} = \frac{200[a(a+5)]}{a} - 2[a(a+5)]$

para obtener: $200a = 200(a+5) - 2a(a+5)$

Continúa desarrollando y simplificando:

$$200a = 200a + 1000 - 2a^2 - 10a$$
$$2a^2 + 200a - 200a + 10a - 1000 = 0$$

La ecuación obtenida es $a^2 + 5a - 500 = 0$

Ejemplo 3. El domingo anterior fui al mercado de La Lagunilla y encontré varios libros interesantes que estaban al mismo precio. En ellos gasté $180. Si hubiera comprado seis libros menos por el mismo dinero, cada libro habría costado $1 más. Determina cuántos libros compré y cuánto me costó cada uno.

Si L es el número de libros que compré por $180, entonces $\frac{180}{L}$ representa lo que me costó cada libro y $\frac{180}{L-6}$ representa lo que costarían 6 libros menos por el mismo dinero. De ahí que una ecuación que plantea el problema sería: $\frac{180}{L-6} = \frac{180}{L} + 1$

De la misma manera que en el problema anterior, modela el problema mediante una ecuación cuadrática que ayude a resolverlo. Multiplica y simplifica:

Multiplica:

$$L(L-6)\left[\frac{180}{L-6}\right] = L(L-6)\left[\frac{180}{L} + 1\right]$$

es decir:

$$\frac{180[L(L-6)]}{L-6} = \frac{180[L(L-6)]}{L} + 1[L(L-6)]$$

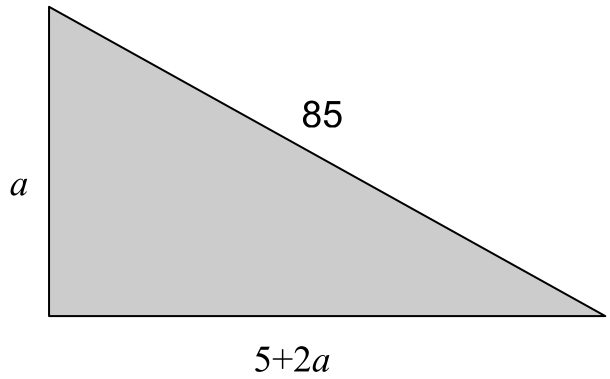
para obtener: $180L = 180(L-6) + L(L-6)$

Continúa desarrollando y simplificando:

$$180L = 180L - 1080 + L^2 - 6L$$
$$L^2 + 180L - 180L - 6L - 1080 = 0$$

La ecuación obtenida es $L^2 - 6L - 1080 = 0$

Ejemplo 4. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 5 cm más que el doble del otro. Si la hipotenusa mide 85 cm, ¿cuántos centímetros mide cada uno de los catetos?
Si llamamos a a uno de los catetos, el otro es $5 + 2a$:



Recordemos el Teorema de Pitágoras, que dice: “La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”
Aplicando este teorema se tiene lo siguiente:

$$a^2 + (5 + 2a)^2 = (85)^2$$

Desarrolla el binomio al cuadrado, simplifica e iguala a cero.

Binomio al cuadrado

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$
$$(5 + 2a)^2 = (5)^2 + 2(2a)(5) + (2a)^2$$
$$(5 + 2a)^2 = 25 + 20a + 4a^2$$

Entonces:

$$a^2 + 25 + 20a + 4a^2 = 7225$$
$$a^2 + 4a^2 + 20a + 25 - 7225 = 0$$
$$5a^2 + 20a + 25 - 7200 = 0$$

La ecuación obtenida es: $a^2 + 4a - 1440 = 0$

Ejemplo 5. Encuentra dos números cuya suma sea -2 y su producto sea -48.

Sean a y b esos números. El problema se puede plantear como sigue:

$$a + b = -2$$
$$ab = -48$$

Despeja b en la primera ecuación, y sustituye en la segunda ecuación, para obtener:

$$a(-2 - a) = -48$$
$$2a - a^2 = -48 - 2a - a^2 = -48$$

La ecuación obtenida es: $a^2 + 2a - 48 = 0$

Ejercicios 1.1.1: Plantea la ecuación de segundo grado que modela el problema. No resuelvas la ecuación obtenida.

1. Encuentra la longitud del lado de un terreno cuadrangular de 220 m^2.
2. Un terreno de forma rectangular mide 450 m^2 de superficie. Encuentra la longitud de cada lado, si el largo debe medir 5 m más que el ancho.
3. Un número es el triple de otro, y la diferencia de sus cuadrados es 1800.
4. Calcula el área de un cuadrado si se sabe que su diagonal supera por cuatro unidades a cualquiera de sus lados.
5. La suma de las edades de Memo y Lolita es de 23 años, y el producto de sus edades es 102 años.
6. Varios amigos se juntan para comprar un aparato de sonido que vale $1200. El dinero que paga cada uno excede en 194 al número de amigos. ¿Cuántos amigos compraron el aparato?
7. El dueño del estanquillo "La chonita" compró costales de azúcar por $1000. Si hubiera comprado 10 costales más por el mismo dinero, cada costal le hubiera costado $5 menos.
8. El producto de dos enteros impares consecutivos es 35.
9. Susana delimitó un área rectangular en su jardín para dedicarla a plantar tomates. El largo es el doble del ancho y el área mide 60 m^2
10. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. ¿Cuáles son estos números?
11. Un número positivo corresponde a $\frac{3}{5}$ de otro y su producto es 2160.
12. El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2.

Solución a los ejercicios 1.1.1:

1. $x^2 - 200 = 0$	7. $x^2 + 10x - 2000 = 0$
2. $x^2 + 5x - 450 = 0$	8. $x^2 - 9 = 0$
3. $x^2 - 225 = 0$	9. $x^2 - 120 = 0$
4. $x^2 - 8x - 16 = 0$	10. $x^2 - 9x + 19 = 0$
5. $x^2 - 23x + 102 = 0$	11. $x^2 - 3600 = 0$
6. $x^2 + 194x - 1200 = 0$	12. $x^2 - 8x + 7 = 0$

Aprendizaje:

Resuelve ecuaciones cuadráticas mediante el uso de transposición de términos.

1.2. Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma:

- $\boldsymbol{x^2 = b}$,
- $\boldsymbol{ax^2 = b}$,
- $\boldsymbol{ax^2 + b = c}$,
- $\boldsymbol{a(x+b)^2 + c = d}$,
- $\boldsymbol{(x+a)(x+b) = 0}$.

Es importante tener presente un teorema que es de gran ayuda en la solución de las ecuaciones de segundo grado:

Teorema del producto nulo (o producto cero):

Si $\boldsymbol{(a)(b) = 0}$ entonces $\boldsymbol{a = 0}$ o $\boldsymbol{b = 0}$ donde $\boldsymbol{a, b \in \Re}$

El teorema afirma que si se tienen dos factores cuyo producto sea igual a cero, entonces alguno de ellos necesariamente debe ser igual a cero.

Solamente se usa este teorema cuando se tienen dos o más factores que están igualados a cero.

Para resolver una ecuación de segundo grado, es necesario reconocer qué tipo de ecuación cuadrática se tiene, si es completa o incompleta.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^2 - 25 = 0$

Como la ecuación es incompleta ($\boldsymbol{x^2 = b}$), debemos despejar y resolver: $x^2 - 25 = 0$ despejamos $x^2 = 25$, sacando raíz cuadrada se tiene $x = \pm 5$, es decir, $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

Comprobación: Sustituyendo $x_1 = 5$ en la ecuación dada:

$(5)^2 - 25 = 0 \Rightarrow 25 - 25 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0$, por tanto 5 es una raíz.

Sustituyendo $x_2 = -5$ en la ecuación dada:

$(-5)^2 - 25 = 0 \Rightarrow 25 - 25 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0$, por tanto -5 es una raíz.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación.

Esta ecuación pertenece a la forma general $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$, por lo que para resolverla es necesario despejar la incógnita *x* y, posteriormente, calcular su raíz cuadrada.

Despejamos el coeficiente del término cuadrático x^2, aplicando la propiedad del inverso multiplicativo.

$$\frac{2}{2}x^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

Esto nos lleva a los siguientes pasos:
Comprobación: Sustituyendo el valor obtenido de *x* en la ecuación original, verificamos que el resultado es igual a 0, lo que confirma que la solución es correcta. Por lo tanto, 4 es una raíz.
Asimismo, al sustituir el segundo valor de *x* en la ecuación inicial, observamos que también satisface la igualdad, lo que confirma que es otra raíz de la ecuación.
dada: $2(-4)^2 - 32 = 0 \Rightarrow 32 - 32 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, por tanto -4 es una raíz.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $3x^2 - 32 = -5$
La ecuación es del tipo $\boldsymbol{ax^2 + b = c}$. Como existe más de una constante (-32 y -5) es necesario simplificarlos por términos semejantes. Trasponiendo el término independiente del segundo al primer miembro y simplificando: $3x^2 - 32 + 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$. Ahora la ecuación es incompleta de la forma ($\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$). Debemos despejar y resolver: $3x^2 - 27 = 0$ despejamos x^2, $3x^2 = 27$ el coeficiente del término cuadrático por la propiedad del inverso multiplicativo $\Rightarrow \frac{3}{3}x^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$, es decir, $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$
Comprobación: Sustituyendo $x_1 = 3$ en la ecuación dada: $3(3)^2 - 27 = 0 \Rightarrow 27 - 27 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, por tanto 3 es una raíz.
Sustituyendo $x_2 = -3$ en la ecuación dada: $3(-3)^2 - 27 = 0 \Rightarrow 27 - 27 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, por tanto -3 es una raíz.

Ejemplo 4. Resolver $16(x-8)^2 - 25 = 0$
Esta ecuación es de la forma $\boldsymbol{a(x+b)^2 + c = d}$, donde se puede considerar a d=0
Despejando $16(x-8)^2 = 25$, $(x-8)^2 = \frac{25}{16}$, $(x-8) = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$, $x - 8 = \pm\frac{5}{4}$, $x = \pm\frac{5}{4} + 8$, $x_1 = \frac{5}{4} + 8 \Rightarrow x_1 = \frac{37}{4}$, $x_2 = -\frac{5}{4} + 8 \Rightarrow x_2 = \frac{27}{4}$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $(3x-4)(2x+7) = 0$
El uso del teorema del producto nulo se usa en esta ecuación:
Si $\boldsymbol{(a)(b) = 0}$ entonces $\boldsymbol{a = 0}$ o $\boldsymbol{b = 0}$ de forma tal que $3x - 4 = 0$ de donde $x = \frac{4}{3}$, $2x + 7 = 0$ donde $x = -\frac{7}{2}$, las soluciones son $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{7}{2}$
Ejemplo 6. Resolver la ecuación $x(2x-5) = 0$
El uso del teorema del producto nulo se usa en esta ecuación:
Si $\boldsymbol{(a)(b) = 0}$ entonces $\boldsymbol{a = 0}$ o $\boldsymbol{b = 0}$ de forma tal que $x = 0$, $2x - 5 = 0$ donde $x = \frac{5}{2}$, las soluciones son $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$

Ejercicios 1.2.1.: Resuelve las ecuaciones siguientes:

1. $x^2 - 49 = 0$	6. $(5x - 24)(3x + 15) = 0$
2. $6x^2 - 3x = 0$	7. $2x^2 - 24 = -4x^2$
3. $4x^2 - 36 = 0$	8. $3x - 4x^2 = -13x$
4. $25(3x - 4)^2 = 100$	9. $\left(\frac{2}{3}x + 5\right)\left(3 - \frac{1}{2}x\right) = 0$
5. $36 = 4(5 - 2x)^2$	10. $-3x = x(x - 4)$

Solución a los Ejercicios 1.2.1

1. $x_1 = 7$, $x_2 = -7$	***6.*** $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{24}{5}$
2. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$	***7.*** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
3. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$	***8.*** $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
4. $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$	***9.*** $x_1 = -\frac{15}{2}$, $x_2 = 6$
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$	***10.*** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

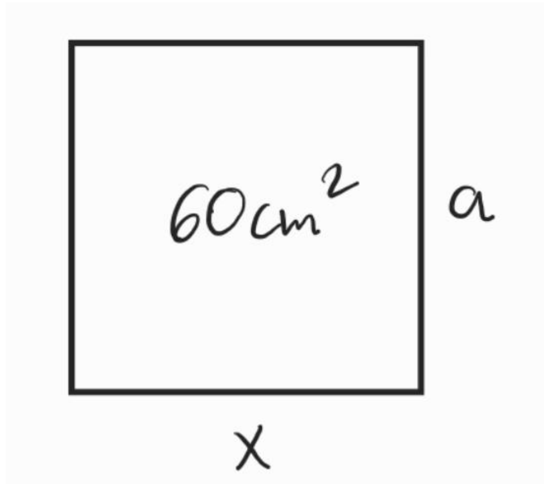
Aprendizaje:
Interpreta el significado de las soluciones de una ecuación cuadrática en el contexto del problema dado.

1.2.1. Interpretación en contexto de las soluciones de una ecuación cuadrática.

Una ecuación de segundo grado siempre tiene dos soluciones, como las ecuaciones del punto anterior. Para estas ecuaciones las soluciones siempre satisfacen la ecuación original, pero son ecuaciones sin contexto. En los casos donde las ecuaciones tienen un sentido contextual, es decir, se originan de problemas, ambas soluciones no siempre son útiles.

Plantea una ecuación que modele los siguientes problemas que se presentan, resuelve la ecuación obtenida e interpreta las soluciones respecto al contexto del problema.

Ejemplo 1. Susana delimitó un área rectangular en su jardín para dedicarla a plantar tomates. El largo es el doble del ancho y el área mide $60m^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?



Suponiendo que x es la medida del largo del rectángulo en metros y de acuerdo con el texto “el largo del terreno mide el doble que el ancho”, entonces el lado restante debe medir $\frac{x}{2}$. En consecuencia, retomando x, el área del terreno será:

$A = b \cdot h$ (*área de un rectángulo*)

$$A = x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{x^2}{2}$$

Como el área del terreno es igual a $60m^2$, entonces la ecuación será:

$\frac{x^2}{2} = 60 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 120 = 0$

esta es una ecuación cuadrática pura, de la forma $ax^2 + c = 0$. Para resolver esta ecuación es necesario despejar a x^2 y obtener su raíz cuadrada.

$$x^2 - 120 = 0$$

$x^2 = 120$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{120} \quad \Rightarrow \quad x \approx \pm 10.9544$$

$x_1 = 10.9544 \; y \; x_2 = -10.9544,$

Ahora interpretamos las soluciones con base al contexto del problema, se solicita conocer las dimensiones del jardín:

Para $x_1 = 10.9544$, se concluye que el jardín tiene un largo de 10.9544 m aproximadamente y como el largo del terreno mide el doble del ancho al dividir entre dos esta longitud tenemos que la longitud del ancho es $a = 5.4772 \; m$.

Para $x_2 = -10.9544$, se concluye que esta solución no tiene sentido bajo el contexto del problema ya que no se pueden considerar longitudes negativas.

Ejemplo 2. La edad de Luis hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Determinar la edad actual.

Sea b la edad de Luis hoy, hace 6 años será la edad que tiene hoy disminuida en 6, es decir, $b-6$.

En ese entonces su edad era el correspondiente a la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años, a partir del presente, es decir, $\sqrt{b+6}$, en consecuencia, la ecuación requerida es $b-6=\sqrt{b+6}$.

Para poder resolverla es necesario elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad $(b-6)^2=(\sqrt{b+6})^2$, desarrollando el binomio al cuadrado en el primer miembro de la ecuación queda $(b-6)^2=b^2-12b+36$ y elevando al cuadrado en el segundo miembro de la ecuación queda $(\sqrt{b+6})^2=b+6$, la ecuación queda como $b^2-12b+36=b+6$, igualando a cero y simplificando términos semejantes tenemos $b^2-12b-b+36-6=0$, $b^2-13b-b+30=0$

Esta es la ecuación que hay que resolver. La solución de la ecuación es: $b_1=10$ y $b_2=3$. Analizando las soluciones de forma contextual: el valor de la incógnita $b_1=10$ representa la edad que tiene Luis en el presente, es decir, Luis tiene 10 años y hace 6 años tenía 4 años y dentro de 6 años tendrá 16 años; la información se valida sin problemas.

En el caso donde $b_2=3$, significa que Luis tiene 3 años en el presente y hace 6 años tenía -3 años lo cual no es posible, en conclusión, el problema sólo tiene una solución válida en $b_1=10$.

Ejemplo 3. La fórmula para calcular la distancia, d en pies, necesaria para detener un automóvil específico sobre una superficie con nieve es $d=\frac{1}{6}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 150 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

En este caso, la ecuación ya está dada dentro del problema, es necesario sustituir en la fórmula que se proporciona el valor de la distancia $d=150\,pies$ dada, tenemos: $d=\frac{1}{6}x^2$ donde $150=\frac{1}{6}x^2$. Para resolver la ecuación es necesario multiplicar ambos miembros de la ecuación por 6, es decir, $(6)150=(6)\frac{1}{6}x^2$, $900=x^2$, donde $x=\pm\sqrt{900}$, esto es: $x_1=30\ y\ x_2=-30$. Analizando las soluciones, sólo $x_1=30$ es válida, el vehículo viajaba a 30 millas por hora antes pisar el freno y $x_2=-30$ no es válida porque el vehículo no puede desplazarse a una velocidad de -30 millas por hora.

Ejercicios 1.2.2.: Para cada uno de los siguientes problemas plantea una ecuación que lo modele, resuelve la ecuación y expresa la solución o soluciones al problema de acuerdo con el contexto.

1. Juan tiene el triple de la edad de Carlos y el producto de sus edades equivale a 48. ¿Cuáles son las edades de Carlos y Juan?
2. La longitud de un campo de fútbol mide el triple de su ancho. Si el área del campo es de 10800m^2 determina las dimensiones del campo.
3. Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?
4. Se deja caer una piedra desde una altura (h), es de 195 metros. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo si la aceleración de la gravedad (g) es $9.8\frac{m}{s^2}$?

   Considera que fórmula para la caída libre es: $h = \frac{gt^2}{2}$
5. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Determina la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24m^2.

Solución a los ejercicios 1.2.2

1. $3x^2 - 48 = 0$, Carlos tiene 4 años y Juan tiene 12 años.
2. $3x^2 - 10800 = 0$, las dimensiones son: largo de 180 m y ancho de 60 m.
3. $3x^2 - 147 = 0$, el lado del cuadrado mide 7 cm.
4. $4.9x^2 - 195 = 0$, la piedra tarda 6.3 s en llegar al suelo.
5. $12x^2 - 48 = 0$. las longitudes del triángulo son: 6 cm, 8 cm y 10 cm.

Aprendizajes:

- *Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.*
- *Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando el método de completar el TCP.*
- *Comprende que al aplicar el método de completar el TCP para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se obtiene la expresión general de las soluciones.*
- *Resuelve ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.*

1.3. Métodos algebraicos para obtener las soluciones de ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

Es importante recordar lo siguiente, la expresión "extrae raíz" significa extracción de la raíz cuadrada. La raíz cuadrada de un número positivo es otro número positivo, $\sqrt{9} = 3$. En el caso de las ecuaciones cuadradas existen dos valores que satisfacen la condición inicial, por ejemplo: $\sqrt{9} = 3$ porque $(3)^2 = 9$ y también $\sqrt{9} = -3$ porque $(-3)^2 = 9$. Debido a esto se considera que una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, porque existen dos valores que la satisfacen, lo que se indica de forma abreviada escribiendo $x = \pm\sqrt{9},\ \ x = \pm 3$.

1.3.1. Factorización cuando $a = 1$.

En la ecuación cuadrática $(ax^2 + bx + c = 0)$ se considera que $a \neq 0$, esto quiere decir que el valor del coeficiente a puede ser cualquiera menos el cero (0), esta condición genera dos casos particulares: cuando $a = 1$, se emplea la factorización de un trinomio cuadrático como el producto de dos binomios con un término común:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

En donde m y n son dos números que se eligen de tal manera que el producto de "m" por "n" sea igual al número c y la suma de dichos números "m" y "n" sea igual al número b y "x" es el término común.

Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

Ejemplo 1: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, porque los números 2 y 3 cumplen con las condiciones: $(2)(3) = 6$; $(2) + (3) = 5$. El proceso de solución continúa de la siguiente forma:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x + 2)(x + 3) = 0$$
$$x + 2 = 0 \ \ y \ \ x + 3 = 0$$
$$x_1 = -2 \ \ y \ \ x_2 = -3$$

Ejemplo 2: $a^2 + 19a + 60 = (a + 15)(a + 4)$, porque los números 15 y 4 cumplen con las condiciones: $(15)(4) = 60$; $(15) + (4) = 19$ El proceso de solución continúa de la siguiente forma:

$$a^2 + 19a + 60 = 0$$
$$(a + 15)(a + 4) = 0$$
$$a + 15 = 0 \ y \ a + 4 = 0$$
$$a_1 = -15 \ \ y \ a_2 = -4$$

Ejemplo 3: $p^2 + 2p - 99 = (p + 11)(p - 9)$, porque los números 11 y -9 cumplen con las condiciones: $(11)(-9) = -99$; $(11) + (-9) = 2$ El proceso de solución continúa de la siguiente forma:

$$p^2 + 19p + 60 = 0$$
$$(p + 11)(p - 9) = 0$$
$$p + 11 = 0 \text{ y } p - 9 = 0$$
$$p_1 = -11 \text{ y } p_2 = 9$$

Ejemplo 4: $t^2 - 25t + 156 = (t - 12)(t - 13)$, porque los números -12 y -13 cumplen con las condiciones: $(-12)(-13) = 156$; $(-12) + (-13) = -25$ El proceso de solución continúa de la siguiente forma:

$$t^2 - 25t + 156 = 0$$
$$(t - 12)(t - 13) = 0$$
$$t - 12 = 0 \text{ y } t - 13 = 0$$
$$t_1 = 12 \text{ y } t_2 = 13$$

Ejercicios 1.3.1 Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de factorización cuando el coeficiente del término cuadrático es 1.

1. $a^2 + 19a - 66 = 0$ 2. $b^2 - 27b + 72 = 0$ 3. $c^2 + 15c + 44 = 0$ 4. $d^2 - 66d + 360 = 0$ 5. $e^2 + 8e - 48 = 0$	6. $f^2 - 23f + 76 = 0$ 7. $g^2 + 5g - 104 = 0$ 8. $h^2 - 10h - 75 = 0$ 9. $i^2 - 24i + 128 = 0$ 10. $j^2 + j + \frac{1}{4} = 0$

Solución a los ejercicios 1.3.1

1. $a_1 = -22, a_2 = 3$ 2. $b_1 = 3, b_2 = 24$ 3. $c_1 = -11, c_2 = -4$ 4. $d_1 = 60, d_2 = 6$ 5. $e_1 = -12, e_2 = 4$	6. $f_1 = 19, f_2 = 4$ 7. $g_1 = -13, g_2 = 8$ 8. $h_1 = 15, h_2 = -5$ 9. $i_1 = 16, i_2 = 8$ 10. $j_1 = -\frac{1}{2}, j_2 = -\frac{1}{2}$

Factorización cuando $a \neq 1$

Cuando en la ecuación cuadrática se tiene que $a \neq 1$, se emplea el producto de dos binomios con un término común, veamos los siguientes ejemplos:
Ejemplo 1: Factorizar $2x^2 - x - 3 = 0$
Multiplicar por el coeficiente de x^2 toda la ecuación, en este caso por 2:

$$(2)2x^2 - (2)x - (2)3 = 0$$
$$4x^2 - 2x - 6 = 0$$

Por conveniencia, la multiplicación anterior se deja indicada de esta manera$(2x)^2 - 1(2x) - 6 = 0$; a fin de que se obtenga un término común de la factorización, $(2x)$ es el término común y se buscan dos números de forma que su producto sea (-6) y su suma algebraica sea igual a (-1), estos números son el 2 y -3:
su producto $(-3)(2) = -6$, su suma algebraica $(-3) + (2) = -1$
Acomodando en producto de binomios $(2x - 3)(2x + 2) = 0$
Cada factor se iguala a cero y se despeja la incógnita. El proceso quedaría:

$$2x^2 - x - 3 = 0$$
$$(2)2x^2 - (2)x - (2)3 = 0$$
$$(2x)^2 - 1(2x) - 6 = 0$$
$$(2x - 3)(2x + 2) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \;\; y \;\; 2x + 2 = 0$$
$$x_1 = \frac{3}{2} \;\; y \;\; x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Ejemplo 2: Factorizar $3x^2 - 5x - 2 = 0$
Multiplica por 3 la ecuación: $3(3x^2) - 3(5x) - 3(2) = 0$
Reacomodando: $(3x)^2 - 5(3x) - 6 = 0$
Dos números donde el producto sea -6 y su suma algebraica sea -5, estos son (1) y (-6).
su producto $(1)(-6) = -6$, su suma algebraica $(1) + (-6) = -5$
Por tanto, la factorización quedaría: $(3x - 6)(3x + 1) = 0$

$$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{6}{3} = 2$$
$$3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 3: Factorizar $-2x^2 + 3x + 5 = 0$
Multiplica por 3 la ecuación: $(-2)(-2x^2) + 3(-2x) + (-2)5 = 0$
Reacomodando: $(-2x)^2 + 3(-2x) - 10 = 0$
Dos números donde el producto sea -10 y su suma algebraica sea 3, estos son (5) y (-2).
su producto $(5)(-2) = -10$, su suma algebraica $(5) + (-2) = 3$
Por tanto, la factorización quedaría: $(-2x + 5)(-2x - 2) = 0$

$$-2x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{5}{2}$$
$$-2x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{2}{2}=-1$$

Nota: Puedes revisar en YouTube el método de la tijera (https://youtu.be/L4pvZkomiRg?si=FniClB9X_LTzCLCG)

Ejercicios 1.3.2 Resuelve las ecuaciones

1. $-4x^2-18x+10=0$ 2. $2x^2-5x-12=0$ 3. $2x^2-x-3=0$ 4. $3x^2+7x-20=0$ 5. $6x^2+x-2=0$	6. $6x^2+23x+20=0$ 7. $5x^2-19x+12=0$ 8. $10x^2+21x-10=0$ 9. $-2x^2+3x+5=0$ 10. $4x^2-12x+9=0$

Solución a los ejercicios 1.3.2

1. $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-5$ 2. $x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=4$ 3. $x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{2}$ 4. $x_1=-4,\ x_2=\frac{5}{3}$ 5. $x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=\frac{1}{2}$	***6.*** $x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{4}{3}$ ***7.*** $x_1=\frac{4}{5},\ x_2=3$ ***8.*** $x_1=\frac{2}{5},\ x_2=-\frac{5}{2}$ ***9.*** $x_1=\frac{5}{2},\ x_2=-1$ ***10.*** $x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{3}{2}$

1.4. Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

Todo binomio cuadrático de la forma x^2+bx se le puede agregar el término

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4},$$

para tener un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP), cuya factorización es

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2;$$

esto es:

$$x^2+bx+\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2.$$

1.4.1. Utilizando el método Completando el trinomio cuadrado perfecto resolver la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, cuando $a=1$.

***Ejemplo 1**:* $x^2+2x-3=0$

$x^2 + 2x = 3$ identificando $b = 2$, el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$ se agrega a ambos miembros de la ecuación:

$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$ Simplificando las operaciones y factorizando:

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 4$$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4$ factorizando el primer miembro de la ecuación

Extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{(x + 1)^2} = \pm\sqrt{4}$

$$x + 1 = \pm 2$$

$x = \pm 2 - 1$ despejando la incógnita

Primera raíz: $x_1 = 2 - 1 = 1$

Segunda raíz: $x_2 = -2 - 1 = -3$

Comprobación:

sustituyendo para $x_1 = 1$

$$(1)^2 + 2(1) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

sustituyendo para $x_2 = -3$

$$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 6 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

***Ejemplo 2**:* $x^2 + 6x - 7 = 0$

$x^2 + 6x = 7$ identificando $b = 6$, el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$ se agrega a ambos miembros de la ecuación:

$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 7 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$ Simplificando las operaciones y factorizando:

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = 16$$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow (x + 3)^2 = 16$ factorizando el primer miembro de la ecuación

Extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{(x + 3)^2} = \pm\sqrt{16}$

$$x + 3 = \pm 4$$

$x = \pm 4 - 3$ despejando la incógnita

Primera raíz: $x_1 = 4 - 3 = 1$

Segunda raíz: $x_2 = -4 - 3 = -7$

Comprobación:

sustituyendo para $x_1 = 1$

$$(1)^2 + 6(1) - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 6 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

sustituyendo para $x_2 = -7$

$$(-7)^2 + 6(-7) - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 49 - 42 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Ejemplo 3: $x^2 + 7x + 9 = 0$

$x^2 + 7x = -9$ identificando $b = 7$, el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$ se agrega a ambos miembros de la ecuación:

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -9 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$ Simplificando las operaciones y factorizando:

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = -9 + \frac{49}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = -\frac{36}{4} + \frac{49}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = \frac{13}{4}$$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ factorizando el primer miembro de la ecuación

Extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$x = \pm\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{7}{2}$ despejando la incógnita

Primera raíz: $x_1 = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{7}{2} = \frac{\sqrt{13}-7}{2} \approx -1.6972$

Segunda raíz: $x_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{7}{2} = \frac{-\sqrt{13}-7}{2} \approx -5.3027$

Comprobación:

sustituyendo para $x_1 = \frac{\sqrt{13}-7}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{13}-7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{\sqrt{13}-7}{2}\right) + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{13 - 14\sqrt{13} + 49}{4} + \left(\frac{7\sqrt{13} - 49}{2}\right) + 9 = 0$$

$$\frac{13 - 14\sqrt{13} + 49}{4} + \frac{14\sqrt{13} - 98}{4} + \frac{36}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-14\sqrt{13}}{4} + \frac{14\sqrt{13}}{4} + \frac{13 + 49}{4} + \frac{-98 + 36}{4} = 0$$

$$\frac{62}{4} - \frac{62}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

sustituyendo para $x_1 = \frac{-\sqrt{13}-7}{2}$

$$\left(\frac{-\sqrt{13}-7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{-\sqrt{13}-7}{2}\right) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{13 + 14\sqrt{13} + 49}{4} + \left(\frac{-7\sqrt{13} - 49}{2}\right) + 9 = 0$$

$$\frac{13 + 14\sqrt{13} + 49}{4} + \frac{-14\sqrt{13} - 98}{4} + \frac{36}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{14\sqrt{13}}{4} - \frac{14\sqrt{13}}{4} + \frac{13 + 49}{4} + \frac{-98 + 36}{4} = 0$$

$$\frac{62}{4} - \frac{62}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Ejemplo 4: $x^2 - 36x + 180 = 0$

$x^2 - 36x = -180$ identificando $b = -36$, el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-36}{2}\right)^2$ se agrega a ambos miembros de la ecuación:

$x^2 - 36x + \left(\frac{-36}{2}\right)^2 = -180 + \left(\frac{-36}{2}\right)^2$ Simplificando las operaciones y factorizando:

$$x^2 - 36x + 324 = -180 + 324 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 36x + 324 = 144$$

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow (x - 18)^2 = 144$ factorizando el primer miembro de la ecuación

Extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{(x-18)^2} = \pm\sqrt{144}$

$$x - 18 = \pm 12$$

$x = \pm 12 + 18$ despejando la incógnita

Primera raíz: $x_1 = 12 + 18 = 30$

Segunda raíz: $x_2 = -12 + 18 = 6$

Comprobación:

sustituyendo para $x_1 = 30$

$$(30)^2 - 36(30) + 324 = 0 \quad \Rightarrow \quad 900 - 1080 + 180 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

sustituyendo para $x_2 = 6$

$$(6)^2 - 36(6) + 180 = 0 \quad \Rightarrow \quad 36 - 216 + 180 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Ejercicios 1.4.1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas con $a = 1$ utilizando el método Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto.

1. $a^2 - 8a + 15 = 0$	6. $f^2 + 3f - 4 = 0$
2. $b^2 - 13b + 40 = 0$	7. $g^2 - 4g - 10 = 0$
3. $c^2 + c - 12 = 0$	8. $h^2 - 6h + 8 = 0$
4. $d^2 + 6d + 8 = 0$	9. $m^2 + 10m - 11 = 0$
5. $e^2 - 3e - 4 = 0$	10. $n^2 + 8n + 5 = 0$

Solución a los ejercicios 1.4.1

1. $a_1 = 3, a_2 = 5$	6. $f_1 = 1, f_2 = -4$
2. $b_1 = 5, b_2 = 8$	7. $g_1 = 2 + \sqrt{14}, g_2 = 2 - \sqrt{14}$
3. $c_1 = 3, c_2 = -4$	8. $h_1 = 4, h_2 = 2$
4. $d_1 = -2, d_2 = -4$	9. $m_1 = -1, m_2 = 7$
5. $e_1 = 4, e_2 = -1$	10. $n_1 = -4 + \sqrt{11}, n_2 = -4 + \sqrt{11}$

1.4.2. Utilizando el método Completando el trinomio cuadrado perfecto para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 1$.

Ejemplo 1. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Dividimos toda la ecuación por el valor del coeficiente del término cuadrático, en este caso $a = 2$

$\frac{2x^2}{2} + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

Acomodamos: $x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$ e identificamos el coeficiente $b = \frac{5}{2}$ donde $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

Completamos este término: $x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$

Factorizando y simplificando: $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$

Extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{\left(x + \frac{5}{4}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$

Simplifica y despeja a la incógnita: $x + \frac{5}{4} = \pm\frac{7}{4}$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

Ejemplo 2: $-x^2 + 3x + 40 = 0$

$$\frac{-x^2}{-1} + \frac{3x}{-1} + \frac{40}{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x = 40$$

Término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 40 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 40 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{169}{4}} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{3}{2} = \pm\frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{13}{6} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{13}{2} + \frac{3}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{13}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

Ejemplo 3: $3x^2 - 13x - 10 = 0$

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{13x}{3} - \frac{10}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{10}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{13}{3}x = \frac{10}{3}$$

Término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{13}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{169}{36}$

$$x^2-\frac{13}{3}x+\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{10}{3}+\left(\frac{13}{6}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{13}{6}\right)^2=\frac{289}{36}$$

$$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{169}{36}=\frac{10}{3}+\frac{169}{36} \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{13}{6}\right)^2=\frac{289}{36}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{13}{6}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{289}{36}} \quad \Rightarrow \quad x-\frac{13}{6}=\pm\frac{17}{6} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{17}{6}+\frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \; x_1=\frac{17}{6}+\frac{13}{6}=\frac{30}{6}=5$$

$$\Rightarrow \; x_2=-\frac{17}{6}+\frac{13}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Ejemplo 4: $2x^2-7x-4=0$

$$\frac{2x^2}{2}-\frac{7x}{2}-\frac{4}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{7}{2}x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{7}{2}x=2$$

Término $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\frac{-7}{2}}{2}\right)^2=\left(-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$

$$x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=2+\frac{49}{16} \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{81}{16}} \quad \Rightarrow \quad x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{9}{4}+\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \; x_1=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$\Rightarrow \; x_2=-\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Ejercicios 1.4.2 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas con $a\neq 1$ utilizando el método Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto.

1. $-x^2+3x+18=0$	6. $9x^2+3x-2=0$
2. $2x^2-x-3=0$	7. $4x^2-7x-2=0$
3. $3x^2+2x-8=0$	8. $-4x^2-14x-12=0$
4. $4x^2+x-5=0$	9. $7x^2+33x-10=0$
5. $5x^2+22x-15=0$	10. $100x^2+20x+1=0$

Solución a los ejercicios 1.4.2

1. $x_1 = -3, x_2 = 6$ 2. $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -1$ 3. $x_1 = -2, x_2 = \frac{4}{3}$ 4. $x_1 = -\frac{5}{4}, x_2 = 1$ 5. $x_1 = -5, x_2 = \frac{3}{5}$	6. $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$ 7. $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 2$ 8. $x_1 = -2, x_2 = -\frac{3}{2}$ 9. $x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = -5$ 10. $x_1 = -\frac{1}{10}, x_2 = -\frac{1}{10}$

1.5. Fórmula general.

1.5.1. La fórmula general para ecuaciones de segundo grado como solución general del método Completando el trinomio cuadrado perfecto

Sea $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, $a, b, c \ \epsilon \ \Re$, la forma general de una ecuación cuadrática.
Supongamos que $a > 0$ (si $a < 0$ multiplicamos toda la ecuación por -1)
El proceso que se va a realizar es el mismo que se empleó en la sección anterior al completar un TCP.
Dividimos entre a toda la ecuación: $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Identificando el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta es la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1.5.2 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando la Fórmula general

Utilizando la Fórmula general que se obtuvo en el apartado anterior, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

Ejemplo 1. $2x^2 - 4x = 0$
Identificamos los valores de a, b, c: $a = 2, b = -4, c = 0$ (no existe el término independiente)

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 0}}{4} = \frac{4 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{4 - 4}{4} = 0$$

Ejemplo 2. $2x^2 - 7x - 15 = 0$
Identificamos los valores: $a = 2, b = -7, c = -15$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + 13}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x_2 = \frac{7 - 13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Ejemplo 3. $-10x^2 - 3x = 0$
Identificamos los valores: $a = -10, b = -3, c = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-10)(0)}}{2(-10)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 0}}{-20} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{-20} = \frac{3 \pm 3}{-20}$$

$$x_1 = \frac{3 + 3}{-20} = \frac{6}{-20} = -\frac{3}{10}$$

$$x_2 = \frac{3 - 3}{-20} = \frac{0}{-20} = 0$$

Ejemplo 4. $x^2 - 9 = 0$
Identificamos los valores: $a = 1, b = 0, c = -9$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 36}}{2} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

Ejercicios 1.5.2 Resuelve las siguientes ecuaciones haciendo uso de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

1. $x^2 - 25 = 0$ 2. $2x^2 - 32 = 0$ 3. $-3x^2 + 243 = 0$ 4. $4x^2 - 32 = 0$ 5. $3x^2 - 2x - 21 = 0$	6. $-19x + 5x^2 - 4 = 0$ 7. $-35 + 23x + 4x^2 = 0$ 8. $\frac{1}{2}x^2 - 8x = 0$ 9. $-x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ 10. $-3x^2 + 21 = 0$

Solución a los ejercicios 1.5.2

1. $x_1 = 5, x_2 = -5$ 2. $x_1 = 4, x_2 = -4$ 3. $x_1 = 9, x_2 = -9$ 4. $x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}$ 5. $x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 3$	6. $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = 4$ 7. $x_1 = -7, x_2 = \frac{5}{4}$ 8. $x_1 = 0, x_2 = 16$ 9. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ 10. $x_1 = \sqrt{7}, x_2 = -\sqrt{7}$

Aprendizaje:

- Determina la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática, a partir del valor del discriminante.

1.5.2. Discriminante D de la ecuación cuadráticas: $D = b^2 - 4ac$

A la expresión que está dentro de la raíz cuadrada $b^2 - 4ac$, se le llama discriminante. Discriminar significa distinguir, y es precisamente lo que nos permite hacer esta expresión: el discriminante nos permite conocer la naturaleza de las soluciones de la ecuación, es decir, si las soluciones son reales iguales, reales diferentes o complejas.

Se tiene tres casos posibles:

Caso 1. Discriminante mayor que cero: $b^2 - 4ac > 0$, nos asegura que la ecuación tiene dos soluciones o raíces reales diferentes.

Caso 2. Discriminante igual que cero: $b^2 - 4ac = 0$, nos indica que la ecuación tiene dos soluciones o raíces reales repetidas.

Caso 3. Discriminante menor que cero: $b^2 - 4ac < 0$, señala que la ecuación no tiene una soluciones reales, pero sí dos soluciones que son complejas conjugadas o imaginarias.

Utiliza el discriminante de la ecuación cuadrática para determinar la naturaleza de las soluciones de las siguientes ecuaciones.

Caso 1. Soluciones reales y diferentes.

Ejemplo 1. $y^2 + 7y - 60 = 0$ donde $a = 1, b = 7, c = -60$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$: $(7)^2 - 4(1)(-60) = 49 + 240 = 289 > 0$
Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales diferentes.**
Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$y_1 = 5$; $y_2 = -12$ Raíces **reales diferentes.**

Ejemplo 2. $3z^2 - 27z = 0$ donde $a = 3, b = -27, c = 0$
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$: $(-27)^2 - 4(3)(0) = 49 - 0 = 729 > 0$
Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales diferentes.**
Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$z_1 = 0$; $z_2 = 9$ Raíces **reales diferentes.**

Ejemplo 3. $-4w^2 + 32 = 0$ donde $a = -4, b = 0, c = 32$
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$: $(0)^2 - 4(-4)(32) = 0 + 512 = 512 > 0$
Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales diferentes.**
Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$z_1 = 2\sqrt{2}$; $z_2 = -2\sqrt{2}$ Raíces **reales diferentes.**

Caso 2. Soluciones reales e iguales.

Ejemplo 1. $9x^2 + 12x + 4 = 0$ donde $a = 9, b = 12, c = 4$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

Como el valor del discriminante es igual que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales iguales.**
Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$, Raíces **reales iguales**

Ejemplo 2. $-3x^2 - 30x - 75 = 0$ donde $a = -3, b = -30, c = -75$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(-30)^2 - 4(-3)(-75) = 900 - 900 = 0$$

Como el valor del discriminante es igual que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales iguales.**

Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$x_1 = -5, x_2 = -5$, Raíces **reales iguales**
Ejemplo 3. $2x^2 - 8x + 8 = 0$ donde $a = 2, b = -8, c = 8$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(-8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0$$

Como el valor del discriminante es igual que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **reales iguales.**
Al resolver la ecuación las soluciones de la ecuación son:
$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$, Raíces **reales iguales**

Caso 3. Soluciones complejas

Ejemplo 1. $x^2 + 2x + 3 = 0$ donde $a = 1, b = 2, c = 3$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$$

Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **complejas.**
Ejemplo 2. $-6x^2 - 8 = 0$ donde $a = -6, b = 0, c = -8$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(0)^2 - 4(-6)(-8) = 0 - 12 = -192 < 0$$

Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **complejas.**
Ejemplo 3. $x^2 + x + 1 = 0$ donde $a = 1, b = 1, c = 1$.
Sustituimos los valores en el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$(1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

Como el valor del discriminante es mayor que cero, entonces la ecuación tiene dos soluciones **complejas.**

Ejercicios 1.5.3. Determina la naturaleza de las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2 + 3x + 4 = 0$	6. $-4x^2 - 2x = 0$
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$	7. $x^2 + 7 = 0$
3. $4x^2 - 12x + 9 = 0$	8. $x^2 - \frac{5}{2}x + 6 = 0$
4. $9x^2 + 30x + 25 = 0$	9. $x^2 - x + 0.25 = 0$
5. $2x^2 - x - 10 = 0$	10. $-7x^2 - \sqrt{3}x + 3 = 0$

Solución a los ejercicios 1.5.3.

1. Discriminante = - 23, hay dos raíces complejas. 2. Discriminante = - 4, hay dos raíces complejas. 3. Discriminante = 0, hay dos raíces reales iguales. 4. Discriminante = 0, hay dos raíces reales iguales. 5. Discriminante = 81, hay dos raíces reales diferentes.	6. Discriminante = 4, hay dos raíces reales diferentes. 7. Discriminante = - 28, hay dos raíces complejas. 8. Discriminante = $-\frac{71}{4}$, hay dos raíces complejas. 9. Discriminante = 0, hay dos raíces reales iguales. 10. Discriminante = 87, hay dos raíces reales diferentes.

1.6. Referencias

- Ángel, A. (2008). Álgebra intermedia (7.ª ed.). Pearson.
- Galdós, L. (1999). Matemáticas. Cultura.
- Difanis, P., Butts, T., & Shaughnessy, M. (1988). Álgebra con aplicaciones. Harla.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage.

2. Unidad II. Funciones cuadráticas

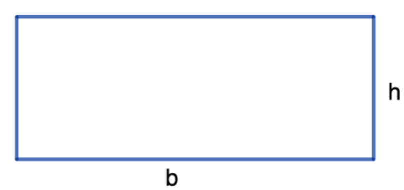
Propósitos de la unidad:
Al finalizar la unidad, el alumnado:
Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas e identificará las diferencias con la función lineal.
Este análisis considerará el comportamiento de los parámetros, las características y los elementos de la función cuadrática, con la finalidad de utilizar este modelo en la comprensión de su entorno y la solución de problemas.

Aprendizaje: Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.

2.1. Temática: Modelo de función cuadrática.

Para comenzar con el estudio de la función cuadrática, analizaremos algunos problemas:
Ejemplo 1. Entre todos los rectángulos que tienen perímetro de 60 centímetros, ¿cuál de ellos es el que tiene mayor área?

Solución:
Identificación de las variables



Recuerda que un rectángulo es una figura geométrica con dos pares de lados iguales: una base y una altura. Por ello, es útil realizar un dibujo que lo represente.
Ten en cuenta lo siguiente:

- El perímetro de un rectángulo se calcula como $P = 2b + 2h$ (donde b es la base y h es la altura).
- El área se determina mediante la fórmula $A = b \cdot h$.

Dado que el perímetro es de 60 cm, sustituimos este valor en la fórmula del perímetro:

$$60 = 2b + 2h$$

Dividimos la ecuación del perímetro entre 2 para simplificar:

$$30 = b + h$$

De aquí, despejamos h:

$$h = 30 - b$$

Expresión del área en función de una variable
Sustituimos $h = 30 - b$ en la fórmula del área:

$$A = b \cdot h = b \cdot (30 - b) = 30b - b^2$$

Esta es una **función cuadrática** que representa el área en función de la base b:

$$A(b) = -b^2 + 30b$$

Ejemplo 2. ¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto de dos números cuya resta es 40? Y ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Identificación de las variables

Sea x el primer número.

Dado que la resta de dos números es 40,

$x - y = 40$, despejando y el segundo número será: $x - 40$

Relación entre las variables

El producto de estos dos números se representa mediante el modelo algebraico:

$$P(x) = x \cdot (x - 40)$$
$$P(x) = x^2 - 40x$$

Por lo tanto, el modelo algebraico es:

$$P(x) = x^2 - 40x$$

Ejemplo 3. Una persona lanza una pelota hacia arriba en el aire con una velocidad inicial de $15\, m/s$. Plantea el modelo analítico que describe la trayectoria de la pelota.

Solución:

Para plantear el modelo analítico del problema, utilizamos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) considerando que la aceleración es la gravedad ($g = 9.8\, m/s^2$) y que la pelota es lanzada verticalmente hacia arriba.

Datos iniciales:

- Velocidad inicial: $v_0 = 15\, m/s$
- Aceleración: $a = -g = -9.8\, m/s^2$ (negativa porque la gravedad actúa hacia abajo)
- Altura inicial: $h_0 = 0\, m$

Modelo analítico para la posición (altura) de la pelota

La ecuación general para la posición es:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Sustituyendo los valores:

$$h(t) = 0 + 15t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$
$$h(t) = 15t - 4.9t^2$$

Ejercicios 2.1.1

1.- Gravedad en la Luna.

La gravedad en la Luna equivale más o menos a un sexto de la terrestre. Suponga que Neil Armstrong se encuentra en la Luna, parado sobre una colina de 60 pies de altura. Si salta hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo. Plantea el modelo analítico para la altura (posición) de Neil Armstrong.

2.- Calentamiento de un cubo metálico.
Un cubo de metal se expande cuando se calienta. Si cada lado aumenta 0.20 milímetros después de calentarse, plantea el modelo analítico del problema que relacione el cambio en el volumen con el aumento en las dimensiones del cubo.

3.- Números

¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto de dos números cuya suma es 50?

Soluciones a los Ejercicios 2.1.1

1. $h(t) = 60 + 40t - 2.665t^2$
2. $\Delta V = 0.60a^2 + 0.12a + 0.008$
3. $P(x) = -x^2 + 50x$

Aprendizaje: Identifica en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas.

2.2. Temática: Variación lineal y cuadrática.

La variación describe cómo cambian los valores de una variable dependiente (y) en función de otra variable independiente (x). Esta relación puede ser lineal, cuadrática u otro tipo. Analizar estos cambios permite entender el comportamiento de los datos y encontrar un modelo matemático que los represente.

Diferencias finitas

Las diferencias finitas son una herramienta para analizar cómo cambian los valores de una tabla en función de una variable independiente (x). Este método permite identificar si la relación es lineal, cuadrática u otra.

Primer orden (Δy)

Calculamos las diferencias entre valores consecutivos de la función (y):

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

- Si las diferencias de primer orden (Δy) son constantes, la variación es **lineal**.

Segundo orden ($\Delta^2 y$)

Calculamos las diferencias entre valores consecutivos de Δy:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

- Si las diferencias de segundo orden ($\Delta^2 y$) son constantes, la variación es **cuadrática**.

Ejemplo 1. Análisis de la relación entre tiempo y distancia recorrida

Un automóvil recorre diferentes distancias en ciertos intervalos de tiempo. La siguiente tabla muestra el tiempo t (en segundos) y la distancia recorrida d (en metros).

Tiempo (t)	1	2	3	4	5
Distancia (d)	2	8	18	32	50

Usa diferencias finitas para determinar si la variación entre tiempo y distancia es lineal o cuadrática.

Solución:

Calcular las diferencias finitas de primer orden

Las diferencias de primer orden (Δd) se obtienen restando las distancias consecutivas:

$\Delta d = d_{t+1} - d_t$	De donde:

$$si\ t = 1 \rightarrow \Delta d_1 = d_2 - d_1 = 8 - 2 = 6,$$
$$si\ t = 2 \rightarrow \Delta d_2 = d_3 - d_2 = 18 - 8 = 10,$$
$$si\ t = 3 \rightarrow \Delta d_3 = d_4 - d_3 = 32 - 18 = 14,$$
$$si\ t = 4 \rightarrow \Delta d_4 = d_5 - d_4 = 50 - 32 = 18\ m$$

Tiempo (t)	1	2	3	4	5
Distancia (d)	2	8	18	32	50
$\boldsymbol{\Delta d}$	6	10	14	18	

Calcular las diferencias finitas de segundo orden

Las diferencias de segundo orden ($\Delta^2 d$) se obtienen restando las diferencias consecutivas de primer orden:

$$\Delta^2 d = \Delta d_{t+1} - \Delta d_t$$

De donde:

$$\Delta^2 d_1 = \Delta d_2 - \Delta d_1 = 10 - 6 = 4,$$
$$\Delta^2 d_2 = \Delta d_3 - \Delta d_2 = 14 - 10 = 4,$$
$$\Delta^2 d_3 = \Delta d_4 - \Delta d_3 = 18 - 14 = 4$$

Tiempo (t)	1	2	3	4	5
Distancia (d)	2	8	18	32	50
$\boldsymbol{\Delta d}$	6	10	14	18	
$\boldsymbol{\Delta^2 d}$	4	4	4		

Las diferencias de segundo orden ($\Delta^2 d$) son constantes ($\Delta^2 d = 4$). Esto indica que la relación entre el tiempo (t) y la distancia (d) es cuadrática.

Ejemplo 2. Diseño de un parque de diversiones

En un parque de diversiones, los diseñadores quieren construir una atracción en forma de rampa parabólica para una pista de patinaje. La tabla muestra la altura (h, en metros) de la rampa en función de su distancia horizontal (x, en metros) desde el inicio de la rampa:

Distancia horizontal (x)	0	1	2	3	4
Altura (h)	0	2	6	12	20

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre la distancia horizontal y la altura de la rampa es cuadrática o lineal.

Solución:

Calcular las diferencias de primer orden (Δh)

Para calcular las diferencias de primer orden, restamos los valores consecutivos de h:

$$\Delta h = h_{x+1} - h_x$$

De donde:

$$si\ x = 1 \rightarrow \Delta h_1 = h_2 - h_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$si\ x = 2 \rightarrow \Delta h_2 = h_3 - h_2 = 6 - 2 = 4,$$
$$si\ x = 3 \rightarrow \Delta h_3 = h_4 - h_3 = 12 - 6 = 6,$$
$$si\ x = 4 \rightarrow \Delta h_4 = h_5 - h_4 = 20 - 12 = 8\ m$$

Distancia horizontal (x)	0	1	2	3	4
Altura (h)	0	2	6	12	20
$\boldsymbol{\Delta h}$	2	4	6	8	

Calcular las diferencias de segundo orden ($\Delta^2 h$)

Para calcular las diferencias de segundo orden, restamos los valores consecutivos de Δh:

$$\Delta^2 h = \Delta h_{x+1} - \Delta h_x$$

$$\Delta^2 h_1 = \Delta h_2 - \Delta h_1 = 4 - 2 = 2,$$
$$\Delta^2 h_2 = \Delta h_3 - \Delta h_2 = 6 - 4 = 2,$$
$$\Delta^2 h_3 = \Delta h_4 - \Delta h_3 = 8 - 6 = 2$$

De donde:

Distancia horizontal (x)	0	1	2	3	4
Altura (h)	0	2	6	12	20
$\boldsymbol{\Delta h}$	2	4	6	8	
$\boldsymbol{\Delta^2 h}$	2	2	2		

Las diferencias de segundo orden ($\Delta^2 h$) son constantes ($\Delta^2 h = 2$). Esto indica que la relación entre x y h es **cuadrática**.

Ejemplo 3. Relación entre el tiempo y la temperatura de un líquido

Un estudiante realiza un experimento para enfriar un líquido caliente en un laboratorio. La tabla muestra cómo la temperatura del líquido (T, en grados Celsius) disminuye de manera uniforme con el tiempo (t, en minutos):

Tempo (t)	0	2	4	6	8
Temperatura ($°C$)	100	90	80	70	60

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre el tiempo y la temperatura es lineal o cuadrática.

Solución:

Calcular las diferencias de primer orden (ΔT)

Para calcular las diferencias de primer orden, restamos los valores consecutivos de °C:

$$\Delta\,°C = °C_{t+1} - °C_t$$

$$si\ t = 1 \rightarrow \Delta\,°C_1 = °C_2 - °C_1 = 90 - 100 = -10,$$
$$si\ t = 2 \rightarrow \Delta\,°C_2 = °C_3 - °C_2 = 80 - 90 = -10,$$
$$si\ t = 3 \rightarrow \Delta\,°C_3 = °C_4 - °C_3 = 70 - 80 = -10,$$
$$si\ t = 4 \rightarrow \Delta\,°C_4 = °C_5 - °C_4 = 60 - 70 = -10\,°C$$

De donde:

Tempo (t)	0	2	4	6	8
Temperatura ($°C$)	100	90	80	70	60
$\boldsymbol{\Delta\,°C}$	-10	-10	-10	-10	-10

Las diferencias de primer orden (ΔT) son constantes ($\Delta T = -10$). Esto indica que la relación es **lineal**.

Ejercicios 2.2.1

1.- Crecimiento del ahorro de un joven
Un joven empieza a ahorrar dinero. Su ahorro crece de acuerdo con una relación no lineal, y cada día ahorra una cantidad mayor que el día anterior. A continuación, se presenta la tabla que muestra el ahorro en diferentes días:

Día	Ahorro
1	2
2	4
3	8
4	14
5	22
6	32

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre el día y el ahorro es cuadrática.

2.- Costos de una suscripción a un servicio
Un servicio de streaming cobra una tarifa que aumenta cada mes. Los costos de suscripción para varios meses se detallan en la siguiente tabla:

Mes	Costo (pesos)
1	10
2	16
3	24
4	34
5	46
6	60

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre el mes y costo es cuadrática.

3.- Tiempo de estudio y calificación en un examen
Un estudiante aumenta el tiempo que dedica al estudio cada semana. A continuación, se presentan los datos del tiempo de estudio y las calificaciones obtenidas:

Tiempo de estudio	Calificación (%)
2	50
4	60
6	70
8	80
10	90
12	100

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre el tiempo de estudio y la calificación es cuadrática o lineal.

4: Puntuación en un videojuego
Un jugador de videojuegos gana puntos a medida que avanza de nivel. Los puntos obtenidos en diferentes niveles están dados en la siguiente tabla:

Nivel	Puntos
10	15
11	18
12	23
13	30
14	39
15	50

Usa diferencias finitas para determinar si la relación entre el mes y costo es cuadrática.

Soluciones a los Ejercicios 2.2.1

1. La relación entre el día y el ahorro sigue una relación cuadrática.
2. La relación entre el mes y el costo sigue una relación cuadrática.
3. La relación entre el tiempo de estudio y la calificación es lineal.
4. La relación entre el nivel y los puntos sigue una relación cuadrática.

Aprendizaje: Reconoce las representaciones y los elementos de la función cuadrática.

2.3. Temática: Definición y representaciones de una función cuadrática y elementos de su gráfica.

Definición.- Una función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c $\in \Re$ con $a \neq 0$, es una función cuadrática. La gráfica de una función cuadrática es una parábola.
La expresión $f(x)$ puede reemplazarse por la letra y que representa a la variable dependiente de la función. Así la expresión anterior, también puede escribirse como: $y = ax^2 + bx + c$.

Trabajaremos diferentes representaciones:
Tabla.- Se muestra cómo los valores de entrada (x) se relacionan con los valores de salida ($f(x)$ o y) mediante una tabla de datos.
Modelo algebraico.- Es la expresión algebraica de la función cuadrática en forma de ecuación.
Gráfica.- Es la representación visual de la función cuadrática en un plano cartesiano.
Elementos de la Gráfica de una Función Cuadrática
La gráfica de una función cuadrática es una **parábola** que puede abrirse hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del coeficiente a:

- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (tiene un mínimo).
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (tiene un máximo).

Ceros de la Función.- Son los valores de x donde $y = 0$ (es decir, donde la parábola corta al eje x). Se encuentran resolviendo la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Por lo tanto, la función puede tener dos ceros reales, un cero real o no tener ceros reales.

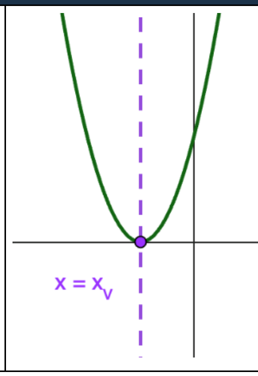
Vértice.- El vértice es el punto donde la parábola alcanza su valor máximo o mínimo. Se calcula con las fórmulas presentadas en la tabla 1.1:

Tabla 2.1 Ceros de $f(x) = ax^2 + bx + c$		
	Es el punto máximo	Es el punto mínimo

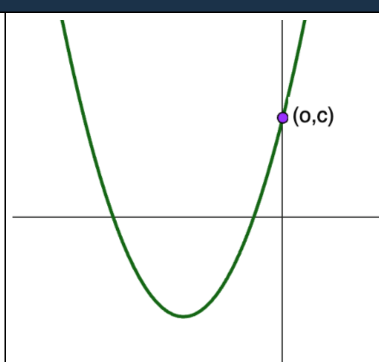
$$x_v = \frac{-b}{2a}, \qquad y_v = f(x_v)$$

El vértice tiene coordenadas (x_v, y_v).

Eje de Simetría.- Es una línea vertical que pasa por el vértice y divide la parábola en dos partes simétricas.

Tabla 2.2 Eje de simetría	
El eje de simetría es la recta vertical con ecuación $x = x_v$	

Ordenada al Origen.- Es el punto donde la parábola corta al eje "y" $(x = 0)$. Se calcula evaluando $x = 0$ en la función.

Tabla 2.3 Ordenada al origen	
$f(0) = c$ La ordenada al origen es el punto $(0, c)$.	

Ejemplo 1.- El **modelo algebraico** $A(x) = -x^2 + 30x$ representa el área en función de la base x de todos los rectángulos que tienen un perímetro de 60 centímetros.

a) Elabora una **representación tabular**.- Completa una tabla que muestre diferentes valores posibles para x y su correspondiente $A(x)$.

a) Presenta su **representación gráfica** e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

Solución

a) Planteamiento del modelo algebraico, como se vio previamente al inicio de esta unidad la **función cuadrática** que representa el área en función de la base x es:

$A(x) = -x^2 + 30x$, con x base del rectangulo.

b) Una tabla que representa la función cuadratica es:

x	$A(x)$
0	0
5	125
10	200
15	225
20	200
25	125

$$A(x) = -x^2 + 30x$$
$$A(0) = -(0)^2 + 30(0) = 0$$
$$A(5) = -(5)^2 + 30(5) = 125$$
$$A(10) = -(10)^2 + 30(10) = 200$$
$$A(15) = -(15)^2 + 30(15) = 225$$
$$A(20) = -(20)^2 + 30(20) = 200$$
$$A(25) = -(25)^2 + 30(25) = 125$$

c) Para la gráfica de $A(x) = -x^2 + 30x$

Ceros de la Función (intersecciones con el eje x).

Resolvemos la ecuación $-x^2 + 30x = 0$

Aplicando la formula general

$a = -1, \quad b = +30$ y $c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-1)(0)}}{2(-1)}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 0}}{-2} = \frac{-30 \pm \sqrt{900}}{-2} = \frac{-30 \pm 30}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-30 + 30}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$
$$x_2 = \frac{-30 - 30}{-2} = \frac{-60}{-2} = 30$$

Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 * (-1)} = \frac{-30}{-2} = 15$$
$$y_v = A(x_v) =$$
$$A(15) = -(15)^2 + 30(15)$$

El vértice tiene coordenadas
$(x_v, y_v) = (15\,, 225)$
y como a es negativo es un máximo

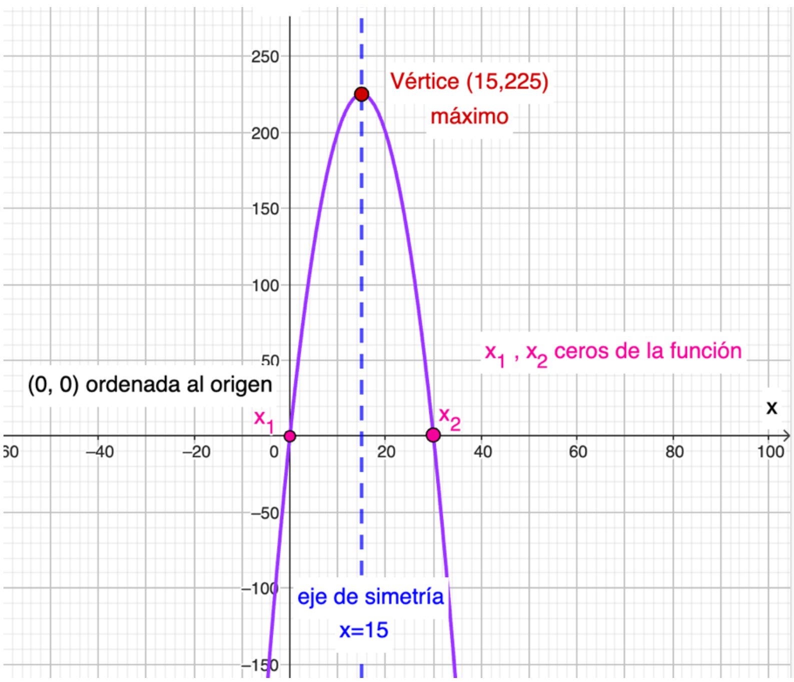
$$-225+450=225$$

Eje de simetría
Es la línea vertical con ecuación $x = x_v \rightarrow x = 15$

Ordenada al Origen (intersección con el eje "y" tomamos $x = 0$)

$$A(x) = -x^2 + 30x$$
$$A(0) = -0^2 + 30(0)$$
$$A(0) = 0$$

El punto es $(0,0)$.



Ejemplo 2.- El modelo $P(x) = x^2 - 40x$, representa la relación entre dos números cuya resta es 40 y su producto, con x el primer número.

b) Elabora una **representación tabular. -** Completa una tabla que muestre diferentes valores posibles para x y su correspondiente $p(x)$.

c) Presenta su **representación gráfica** e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

Solución

a) Una tabla que representa la función cuadrática es:

x	$P(x)$

$$P(x) = x^2 - 40x$$

-10	500
0	0
10	-300
20	-400
30	-300
40	0

$$P(-10) = (-10)^2 - 40(-10) = 500$$
$$P(0) = (0)^2 - 40(0) = 0$$
$$P(10) = (10)^2 - 40(10) = -300$$
$$P(20) = (20)^2 - 40(20) = -400$$
$$P(30) = (30)^2 - 40(30) = -300$$
$$P(40) = (40)^2 - 40(40) = 0$$

b) Para la gráfica de $P(x) = x^2 - 40x$

Ceros de la Función (intersecciones con el eje x).

Resolvemos la ecuación $x^2 - 40x = 0$ por factorización se tiene:

$$x^2 - 40x = 0$$
$$x(x - 40) = 0$$

de donde: $x = 0$ y $x - 40 = 0$

$x_1 = 0$ y $x_2 = 40$

Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2 * (1)} = \frac{+40}{2} = 20$$
$$y_v = P(x_v) =$$
$$P(20) = (20)^2 - 40(20) =$$
$$400 - 800 = -400$$

El vértice tiene coordenadas

$$(x_v, y_v) = (20\,, -400)$$

y como a es positivo es un mínimo

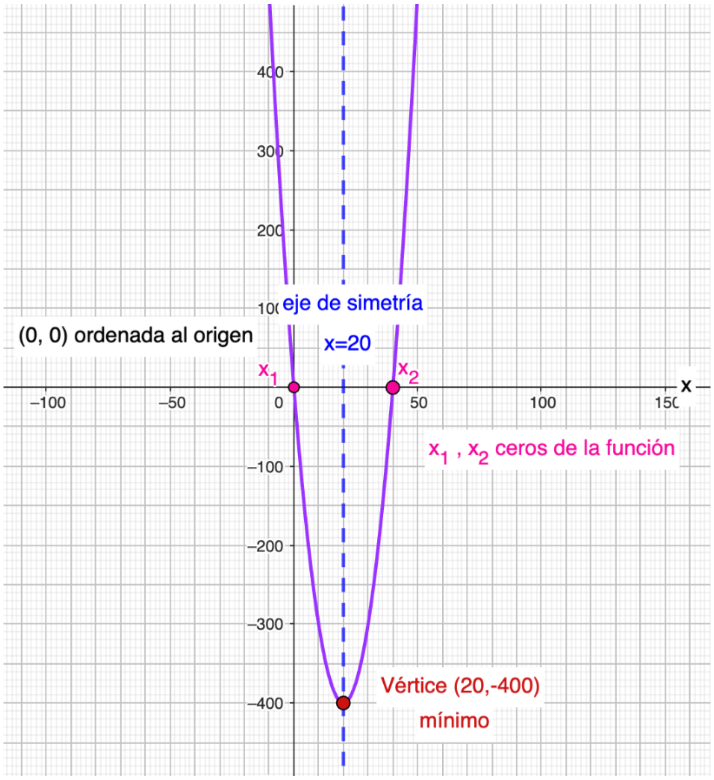
Eje de simetría

Es la línea vertical con ecuación $x = x_v \rightarrow x = 20$

Ordenada al Origen (intersección con el eje "y" $(x = 0)$.

$$P(x) = x^2 - 40x$$
$$P(0) = 0^2 - 40(0)$$
$$P(0) = 0$$

El punto es (0,0).



Ejemplo 3. Dada la función

$$f(x) = -5x^2 + 20x + 2$$

a) **Elabora una representación tabular. -** Completa una tabla que muestre diferentes valores posibles para x y $f(x)$ correspondiente

b) **Presenta su representación gráfica. -** Dibuja la gráfica de la función cuadrática e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

Solución

a) Una tabla que representa la función cuadrática es:

x	$f(x)$
-1	-23
0	2
1	17
2	22
3	17
4	2

$$f(x) = -5x^2 + 20x + 2$$
$$f(-1) = -5(-1)^2 + 20(-1) + 2 = -23$$
$$h(0) = -5(0)^2 + 20(0) + 2 = 2$$
$$h(1) = -5(1)^2 + 20(1) + 2 = 17$$
$$h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 2 = 22$$
$$h(3) = -5(3)^2 + 20(3) + 2 = 17$$
$$h(4) = -5(4)^2 + 20(4) + 2 = 2$$

b) Para la gráfica de $f(x) = -5x^2 + 20x + 2$,

Ceros de la Función (intersecciones con el eje x).

Resolvemos la ecuación $-5x^2+20x+2=0$
Aplicando la formula general tenemos

$a=-5,\quad b=20$ y $c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-20\pm\sqrt{(20)^2-4(-5)(2)}}{2(-5)}$$
$$=\frac{-20\pm\sqrt{400+40}}{-10}=\frac{-20\pm\sqrt{440}}{-10}=\frac{-20\pm2\sqrt{110}}{-10}$$

$$=\frac{-20}{-10}\pm\frac{2\sqrt{110}}{-10}=2\mp\frac{\sqrt{110}}{5}$$
$$x_1=2-\frac{\sqrt{110}}{5}\approx-0.1$$
$$x_2=2+\frac{\sqrt{110}}{5}\approx4.1$$

Vértice

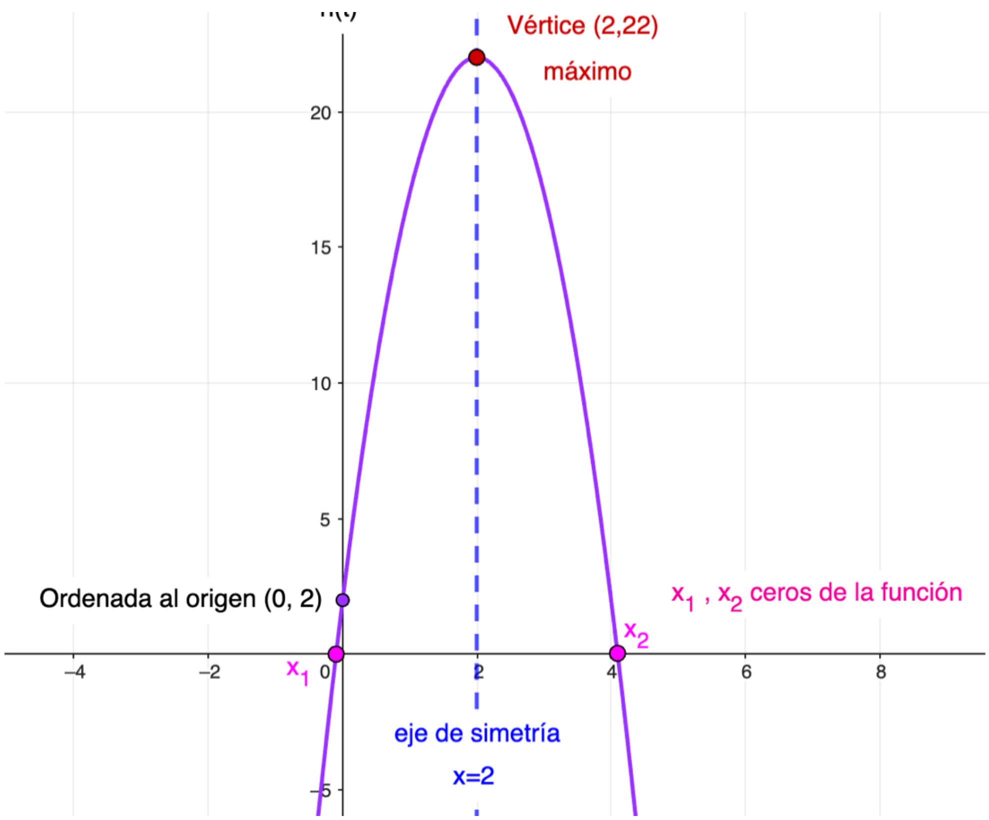
$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2*(-5)}=\frac{-20}{-10}=2$$
$$y_v=h(x_v)=$$
$$=-5(2)^2+20(2)+2=$$
$$=-20+40+2=22$$

El vértice tiene coordenadas
$(x_v,y_v)=(2\,,22)$
y como a es negativo es un máximo

Eje de simetría
Es la línea vertical con ecuación $x=x_v\to x=2$

Ordenada al Origen (intersección con el eje “y" $(t=0)$.

$$f(x)=-5x^2+20x+2$$
$$f(0)=-5(0)^2+20(0)+2=2$$
$$f(0)=2$$
El punto es $(0{,}2)$.



Ejercicios 2.3.1
1.- Dada la función

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

a) **Elabora una representación tabular. -** Completa una tabla que muestre diferentes valores posibles para x y $f(x)$ correspondiente
b) **Presenta su representación gráfica. -** Dibuja la gráfica de la función cuadrática e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

2.- Expectativa de vida
La función $N(x) = -0.00547x^2 - 1.46x + 95.11$ se utiliza para calcular el promedio de años de expectativa de vida de una persona en función de su edad actual x, donde $30 \leq x \leq 100$.

a) Elabora una **representación tabular.** Completa una tabla con diferentes valores para x y sus correspondientes expectativas de vida $N(x)$

b) Presenta su **representación gráfica** e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

3.- El delfín salta

Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie del mar. La trayectoria que describe su salto sigue la función $h(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x$, donde h es la distancia en metros hasta la superficie del mar y x el tiempo en segundos.

a) Elabora una **representación tabular.** Completa una tabla con diferentes valores para x y sus correspondientes distancias hasta la superficie del mar.

b) Presenta su **representación gráfica.** Dibuja la gráfica de la función cuadrática e identifica las características principales de la gráfica: eje de simetría, coordenadas del vértice, intersección con el eje y y los ceros de la función.

Solución a Ejercicios 2.3.1

1.

a) Tabla de valores

x	$f(x)$
-3	10
-2	4
-1	0
0	-2
1	-2

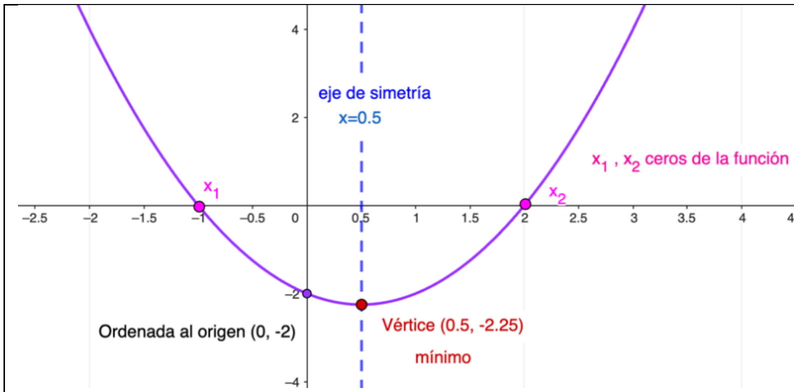
b) Eje de simetría: $x = 0.5$
Coordenadas del vértice: (0.5,−2.25) mínimo
Intersección con el eje y: $f(0) = -2$
Ceros de la función: $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

2.

a) **Tabla de valores** (puede variar dependiendo los valores de x)

x	$N(x)$
30	46.39
35	37.31
40	27.96
45	18.33
50	8.44

b) Eje de simetría: $x = -133.46$
Coordenadas del vértice: $(-133.46, 192.53)$ máximo
Intersección con el eje y: $N(0) = 95.11$
Ceros de la función: $x_1 = -321.07, x_2 = 54.16$



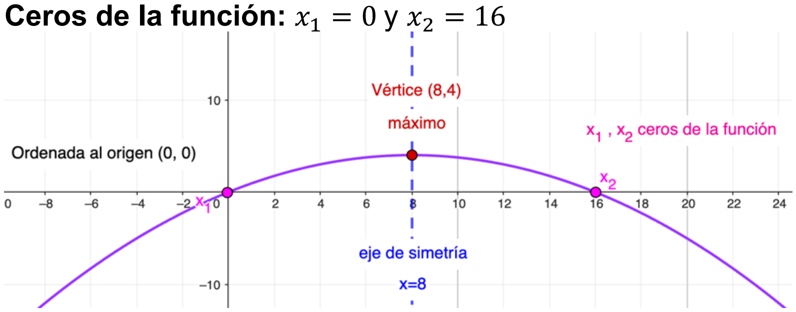
Respuesta:

a) **Tabla de valores** (puede variar dependiendo los valores de t)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{h(x)}$
0	**0**
2	**1.75**
4	**3**
6	**3.75**
8	**4**

b) **Ecuación del eje de simetría:** x= 8
Coordenadas del vértice: $(8,4)$, máximo
Intersección con el eje y: $(0,0)$

Ceros de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 16$



2.4. Aprendizaje: *Identifica cómo afectan a la gráfica los cambios de los parámetros en la función cuadrática.*

La función cuadrática se escribe generalmente en la forma estándar:

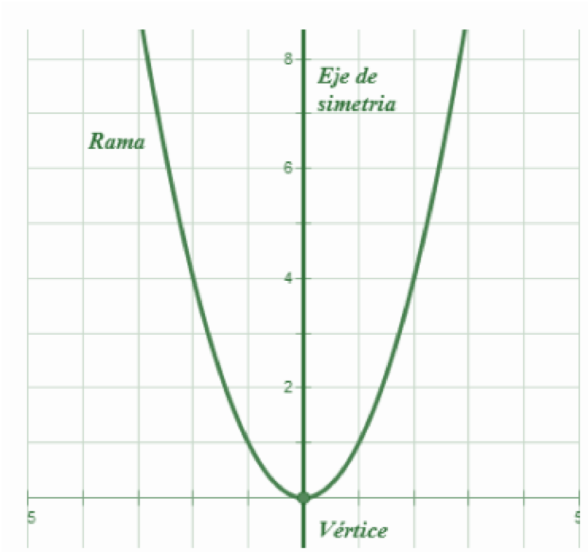
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales y a es diferente de cero. Esta forma de representar a una función cuadrática se le conoce como la forma general, Otra forma de representar a una función cuadrática es de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

La cual se conoce como la forma estándar u ordinaria de la función cuadrática y en la cual debe también cumplirse que a sea diferente de cero.

La gráfica resultante de una función cuadrática es una parábola, con eje de simetría vertical y cuenta con los elementos indicados en la siguiente gráfica:



Los cambios en los parámetros de una **función cuadrática** de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

afectan directamente a la forma y posición de su gráfica, que es una parábola. Veamos cómo influyen los parámetros $a, b\ y\ c$:

1. El parámetro a: Apertura y dirección de la parábola

- **Valor positivo ($a > 0$)**: La parábola abre hacia arriba.
- **Valor negativo ($a < 0$)**: La parábola abre hacia abajo.
- **Valor absoluto de a**:
  - Si $|a| > 1$: La parábola se estrecha (es más "puntiaguda").
  - Si $|a| < 1$: La parábola se ensancha (es más "aplanada").

2. El parámetro b: Desplazamiento horizontal y orientación

- El parámetro b afecta la posición del vértice y el eje de simetría de la parábola.
- Cambiar b provoca que la parábola se desplace lateralmente, lo que altera la ubicación del vértice en el eje X.

3. El parámetro c: Desplazamiento vertical

- c representa el **término independiente**, que indica el punto donde la parábola corta al eje Y (es decir, la intersección con el eje Y).
- Cambiar c desplaza toda la parábola hacia arriba (si c aumenta) o hacia abajo (si c disminuye), sin alterar su forma.

Resumen

- $\boldsymbol{a}$ controla la **apertura** y la **orientación** (hacia arriba o abajo).
- $\boldsymbol{b}$ controla la **posición horizontal** del vértice.
- $\boldsymbol{c}$ controla la **altura vertical** del punto de intersección con el eje Y.

En la forma ordinaria de la función cuadrática, los parámetros a, h y k.

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

- El parámetro a nos indica la concavidad de la parábola, si es positivo abre hacia arriba, si es negativo abre hacia abajo. Además de indicarnos si esta es delgada y alargada o ancha, dependiendo del valor que tenga.
- El parámetro h provoca un desplazamiento horizontal contrario al signo de éste.
- El parámetro k desplaza a la parábola verticalmente tantas unidades como lo indique el valor de éste.
- El vértice de la parábola se forma con los valores de los parámetros (h, k).
- Además, la ecuación que representa al eje de simetría es $x = h$.

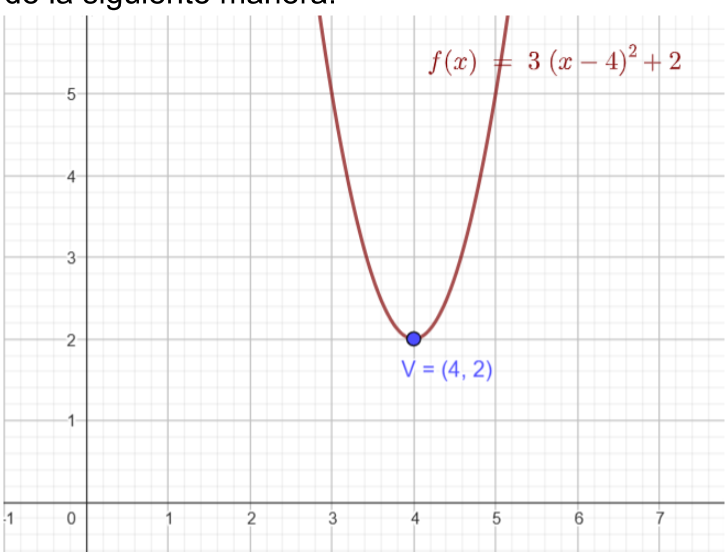
Ejemplo 1. Dada la siguiente función, identifica los parámetros a, h y k y bosqueja la gráfica.

$$f(x) = 3(x-4)^2 + 2$$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es identificar a cada uno de los parámetros: $a = 3$, lo que ocasiona que la parábola tenga concavidad positiva y sea alargada. $h = 4$, lo cual ocasiona un desplazamiento horizontal de cuatro unidades hacia la derecha. $k = 2$, lo cual ocasiona un desplazamiento hacia arriba de dos unidades.

Con los valores de h y k podemos identificar el vértice el cual se encuentra en el punto $V\ (4, 2)$. Ahora si, podemos realizar el bosquejo de la gráfica, el cual queda de la siguiente manera:

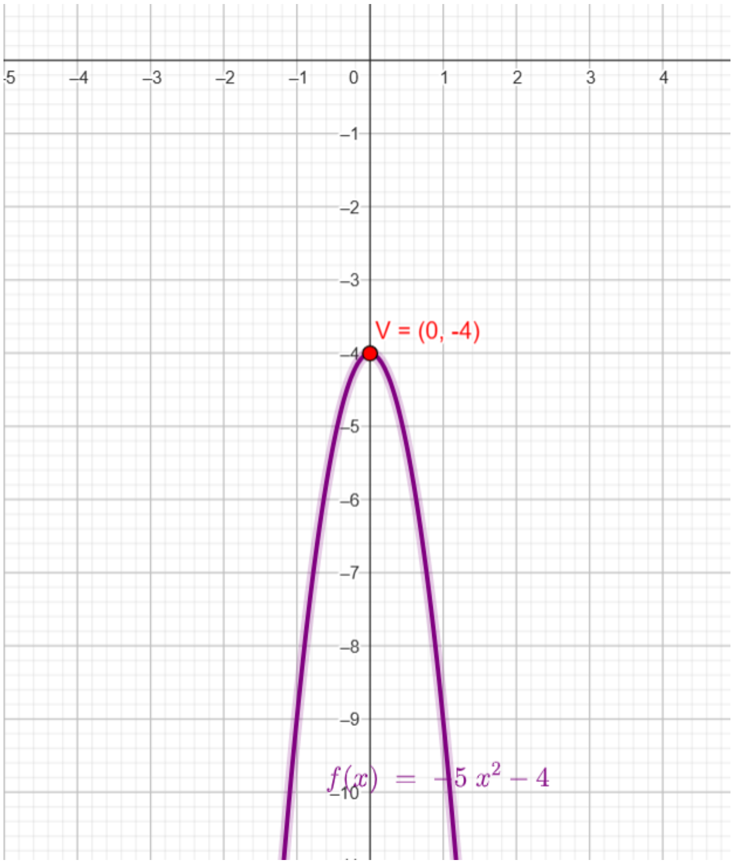


Ejemplo 2. Dada la siguiente función, identifica los parámetros a, h y k y bosqueja la gráfica.

$$f(x) = -5x^2 - 4$$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es identificar a cada uno de los parámetros: $a = -5$ lo que ocasiona que la parábola tenga concavidad negativa y sea alargada. $h = 0$, lo cual ocasiona un desplazamiento horizontal de cero unidades hacia la derecha. $k = -4$, lo cual ocasiona un desplazamiento hacia arriba de dos unidades.
Con los valores de h y k podemos identificar el vértice el cual se encuentra en el punto $V\ (0, -4)$. Ahora si, podemos realizar el bosquejo de la gráfica, el cual queda de la siguiente manera:



Ejercicios 2.4.1: Identifica los parámetros a, h y k de las siguientes funciones y bosqueja la gráfica de cada una.

1) $f(x) = 2(x + 7)^2 + 1$
2) $f(x) = (x + 2)^2 - 6$
3) $f(x) = 4(x - 3)^2$
4) $f(x) = -5(x + 1)^2 - 4$
5) $f(x) = -2(x - 5)^2 + 3$
6) $f(x) = 2x^2 - 8$
7) $f(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$

Aprendizaje:

- *Analiza las intersecciones de la gráfica de la función y el eje de las abscisas con la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática que resulta cuando f(x) = 0.*

La intersección de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el eje de las abscisas X corresponde a las soluciones de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$, es decir, $ax^2 + bx + c = 0$. Estas soluciones se encuentran utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Naturaleza de las raíces:

La naturaleza de las raíces depende del discriminante ($\Delta \backslash Delta$) de la ecuación cuadrática, definido como:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Casos:

1. **Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$:**
    - El discriminante es positivo.
    - Hay **dos raíces reales y distintas**.
    - La gráfica de la función cuadrática interseca el eje X en **dos puntos**.

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ tiene $\Delta = 1 > 0$, por lo que intersecta en $x = 2$ y $x = 3$.

2. $\boldsymbol{Si\ \Delta = 0}$**:**
    - El discriminante es cero.
    - Hay **una raíz real doble** (raíces iguales).
    - La gráfica de la función cuadrática toca el eje X en un **único punto** (vértice de la parábola).

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 4$ tiene $\Delta = 0$, y toca el eje X en $x = 2$.

3. **Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$:**
    - El discriminante es negativo.
    - No hay raíces reales (raíces complejas conjugadas).
    - La gráfica de la función cuadrática **no interseca** el eje X.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + x + 1$ tiene $\Delta = -3 < 0$, por lo que no hay intersecciones con el eje X.

Resumen gráfico:

- Las **intersecciones con el eje X** se relacionan directamente con la naturaleza de las raíces:
    - **Dos puntos de intersección** ↔ Dos raíces reales distintas ($\Delta > 0$).
    - **Un punto de intersección** ↔ Una raíz real doble ($\Delta = 0$).
    - **Ningún punto de intersección** ↔ Raíces complejas ($\Delta < 0$).

Este análisis muestra cómo las propiedades algebraicas de las raíces de la ecuación cuadrática se reflejan directamente en el comportamiento geométrico de su gráfica.

Ejemplo 1.
Determinar las intersecciones con el eje X de la función $y = 3x^2 + 6x$;
Solución:
Se iguala $y = 0$ y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $3x^2 + 6x = 0$

Los métodos para resolver una ecuación cuadrática son: Fórmula General. Utilizando la fórmula general para resolver la ecuación $3x^2 + 6x = 0$
Se tiene que: $a = 3, b = 6 , c = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(0)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 0}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{-6 \pm 6}{6}$$

Por lo tanto, las intersecciones de la parábola con el eje X son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

Ejemplo 2.
Determinar las intersecciones con el eje X de la función $y = x^2 + 2x - 15$;
Solución:
Se iguala $y = 0$ y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Los métodos para resolver una ecuación cuadrática son: Fórmula General. Utilizando la fórmula general para resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$
Se tiene que: $a = 1, b = 2, c = -15$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

Ejemplo 3.
Determinar las intersecciones con el eje X de la función $y = x^2 + x + 1$;

Solución:
Se iguala $y = 0$ y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + x + 1 = 0$

Los métodos para resolver una ecuación cuadrática son: Fórmula General. Utilizando la fórmula general para resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$
Se tiene que: $a = 1\ b = 1\ c = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

En este caso, las soluciones no son reales. Por lo tanto, las raíces son complejas y la gráfica no interseca al eje X.

Ejercicios 2.4.2: Identifica las intersecciones con el eje X, es decir las raíces de las siguientes funciones.

1) $y = x^2 - 6x + 10$
2) $y = 2x^2 - 8x + 8$
3) $y = -x^2 - 4x - 2$
4) $y = x^2 - 4x$
5) $y = 5x^2 - 100$
6) $y = 7x^2 - 35x$
7) $y = -x^2 + 4x - 10$

Aprendizaje:

- *Expresa la función $y = ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, usando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.*

Expresar la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ en su **forma estándar** $y = a(x-h)^2 + k$ implica reescribirla completando el trinomio cuadrado perfecto. Este es el procedimiento paso a paso:

1. Factorizar a del término cuadrático y lineal
Si $a \neq 1$, primero factorizamos a de los términos x^2 y bx:

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

2. Completar el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Dentro del paréntesis, agregamos y restamos un término para completar el cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$$

El término que se agrega es:

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Entonces, la expresión queda como:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

3. Reescribir como un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

El trinomio cuadrado perfecto $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ se escribe como:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Sustituimos esto en la ecuación:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

4. Simplificar la expresión

$$y = \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

4. **Identificar la forma estándar**

La forma estándar de la función es:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Donde:

- $h = -\frac{b}{2a}$
- $k = c - \frac{b^2}{4a}$

Por lo tanto, la expresión final es:

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Ejemplo 1:
Convertir $y = 2x^2 + 8x + 5$ a la forma estándar u ordinaria y determina las coordenadas del vértice.

Solución:
Paso 1: Factorizar el 2
$$y = 2(x^2 + 4x) + 5$$
Paso 2: Completar el TCP
$$y = 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5$$
Paso 3: Reescribimos el TCP
$$y = 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 5 = 2(x + 2)^2 - 3$$
Paso 4:la forma ordinaria de la ecuación es:
$$y = 2(x + 2)^2 - 3$$

Por lo tanto, el vértice es el punto $V(-2, -3)$

Ejemplo 2:
Convertir $y = -3x^2 + 6x + 2$ a la forma estándar u ordinaria y determina las coordenadas del vértice.
Solución:
Paso 1: Factorizar el -3
$$y = -3(x^2 - 2x) + 2$$
Paso 2: Completar el TCP
$$y = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2$$
Paso 3: Reescribimos el TCP
$$y = -3(x^2 - 2x + 1) + 3 + 2 = -3(x - 1)^2 + 5$$
Paso 4:la forma ordinaria de la ecuación es:
$$y = -3(x - 1)^2 + 5$$

Por lo tanto, el vértice es el punto $V(1,5)$

Ejercicios 2.4.3: Reduce a la forma estándar u ordinaria las siguientes ecuaciones y determina las coordenadas del vértice en cada caso.

1) $y = x^2 + 2x - 8$
2) $y = 2x^2 + 4x - 6$
3) $y = 4x^2 + 20x + 16$
4) $y = 2x^2 + 12x + 10$
5) $y = 3x^2 + 3x - 6$
6) $y = 12x - 2x^2$
7) $y = -x^2 - 12x + 3$

2.5. Aprendizaje: Resuelve problemas de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

En este apartado se platearán y resolverán problemas de máximos y mínimos usando las propiedades de la función cuadrática.

Ejemplo 1
Plantea el siguiente problema y responde las preguntas indicadas, además elabora una tabla de valores y la gráfica correspondiente.

El tiempo (en minutos) de reacción, $f(x)$ de una plaga de insectos al contacto con un plaguicida, está descrita por la función: $f(x) = 9x - x^2$, donde x es la cantidad de insecticida en mg/l ($0 < x < 9$, se debe usar menos de $9\, mg/l$ de insecticida debido a los costos).

a) ¿Con cuánta cantidad de plaguicida se obtiene el tiempo óptimo para la reacción?
b) ¿Cuál es el tiempo óptimo para la reacción?

Solución:
Como primer paso, hallaremos las coordenadas del vértice de la función, para determinar el valor del máximo o mínimo de la función.
Para encontrar el vértice, podemos llevar la ecuación a la forma ordinaria como vimos anteriormente, o bien utilizar la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$ para la obtención del valor de la abscisa del vértice, en este caso tendríamos que, si $a = -1\ y\ b = 9$

$$x = \frac{-9}{2(-1)} = \frac{-9}{-2} = 4.5$$

A partir del valor de $x = 4.5$, calcular $f(4.5)$,sustituyendo en la función:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(4.5)} &= \mathbf{9(4.5) - (4.5)^2} \\ &= \mathbf{40.5 - 20.25} \\ &= \mathbf{20.25} \end{aligned}$$

Con los valores obtenidos, podemos responder a las preguntas planteadas:

a) ¿Con cuánta cantidad de plaguicida se obtiene el tiempo óptimo para la reacción?

Respuesta: si $x = 4.5$, entonces la cantidad de plaguicida que provee el tiempo óptimo de rección es de $\boldsymbol{4.5\ mg/l.}$

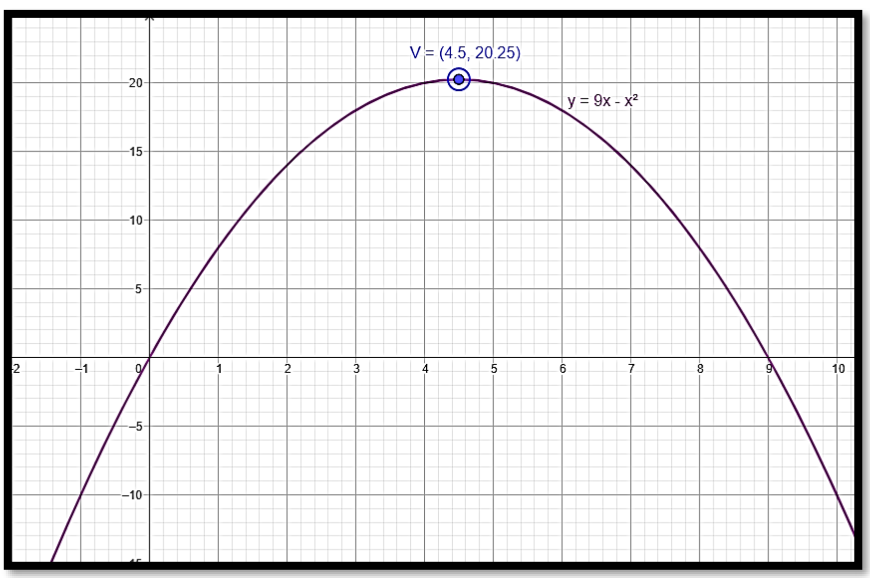
b) *¿Cuál es el tiempo óptimo para la reacción?*

Respuesta: El tiempo óptimo para la reacción es de $\mathbf{20.25}$ **minutos.**

1. Elaboraremos una tabla de valores pertinente, dónde el valor del vértice sea el punto central.

x	$f(x)$
0	0
1	8
2	14
3	18
4.5	**20.25**
5	20
6	18
7	14
8	8
9	0

2. A partir de la tabla de valores, elaboramos la gráfica correspondiente.



Ejemplo 2

Plantea el siguiente problema y responde las preguntas indicadas, además elabora una tabla de valores y la gráfica correspondiente.

Una compañía armadora de netbooks representa el costo anual, en pesos, por la función: $C\ (\ x\ )\ =\ 90.000\ +\ 500x\ +\ 0{,}01x^2$ y el ingreso anual, en pesos, por la función de venta:

$$V\ (\ x\ )\ =\ 1.000x\ -\ 0{,}04x^2$$

(x es la cantidad de netbooks producidos anualmente)

a) ¿Cómo se obtiene la función de ganancia a partir de las funciones de costos y de venta?
b) ¿Cuántos netbooks deben fabricarse para que la ganancia sea la máxima?
c) ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución:
Para resolver este problema, lo primero que debemos saber es que la función ganancia se expresa como $G\ (\ x\ )$ y se define como la diferencia entre la venta menos el costo: $G\ (\ x\ )\ =\ V\ (\ x\ )\ -\ C\ (\ x\ )$

Para encontrar esta función, usaremos que:

$$G\ (\ x\ )\ =\ V\ (\ x\ )\ -\ C\ (\ x\ )$$

$$G\ (\ x\ ) = 1{,}000x\ -\ 0.04x^2 - (90{,}000\ +\ 500x\ +\ 0.01x^2)$$

$$G(x) = 1{,}000x\ -\ 0.04x^2 - 90{,}000 -\ 500x -\ 0.01x^2$$

$$G(x) = -\ 0.05x^2 +\ 500x -\ 90{,}000$$

Utilizar la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$ para la obtención del valor de la abscisa, en este caso tendríamos que, si $a = -0.05\ y\ b = 500$

$$x = \frac{-500}{2(-0.05)} = \frac{-500}{-0.1} = 5{,}000$$

A partir del valor de $x = 5{,}000$, tendremos que calcular $G(5{,}000)$, sustituyendo en la función:

$$G(5000) = -\ 0.05(5000)^2 +\ 500(5000) -\ 90{,}000$$
$$= -1{,}250{,}000 + 2{,}500{,}000 - 90{,}000$$
$$= 1{,}160{,}000$$

Con los datos obtenidos podemos ahora responder a las preguntas propuestas:

a) ¿Cómo se obtiene la función de ganancia a partir de las funciones de costos y de venta?

Respuesta: La función de Ganancia está dada por:

$$G(x) = -\mathbf{0.05x^2} + \mathbf{500x} - \mathbf{90,000}$$

b) ¿Cuántos netbooks deben fabricarse para que la ganancia sea la máxima?

Respuesta: La cantidad de netbooks que se deben fabricar es de 5,000 unidades.

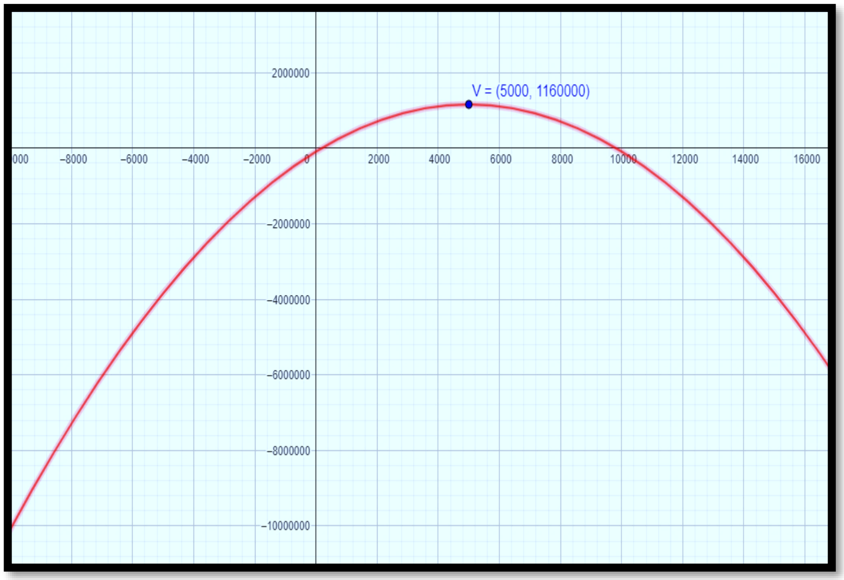
c) ¿Cuál es la ganancia máxima?

Respuesta: La ganancia máxima obtenida es de: $\mathbf{1,160,000\ pesos}$.

La tabla de valores pertinente es:

x	$f(x)$
0	-90000
2000	710000
4000	1110000
5000	**1160000**
6000	1110000
8000	710000
10000	-90000

A partir de la tabla de valores, elaborar la gráfica correspondiente.

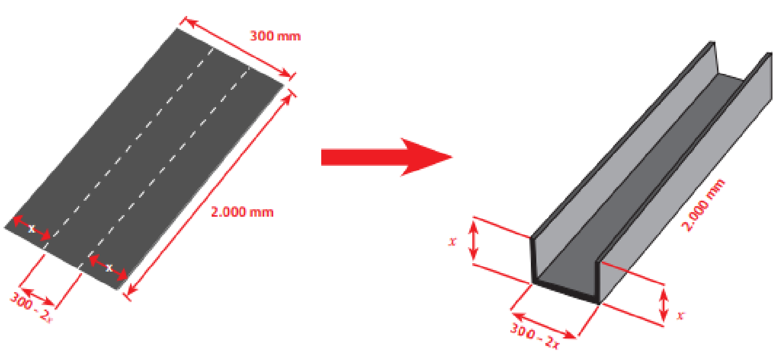


Ejercicios 2.5.1: Plantea y resuelve los siguientes problemas.

1) Si $h(t) = -4.9t^2 + 8t + 5$ representa la altura (h) en metros de Alejandro por encima del agua, *a los* t segundos después de saltar del trampolín.

   a) ¿Cuál es la altura inicial del trampolín?
   b) ¿En qué momento Alejandro alcanzó mayor altura?
   c) ¿Cuál fue la mayor altura que alcanzó Alejandro?
   d) ¿Cuánto tiempo estuvo Alejandro en el aire?

2) Para hacer una canaleta con un pedazo de placa de aluminio liso de 2000 mm de largo y 300 mm de ancho, se dobla hacia arriba algunos milímetros a cada lado, como muestra la figura:



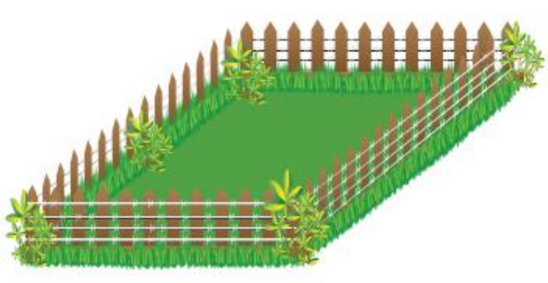
a) ¿Cuántos centímetros deben doblarse para que la canaleta de 300 mm de ancho tenga una capacidad máxima?
b) ¿Cuál es la máxima capacidad volumétrica?

3) Un arquero lanza una flecha en dirección vertical y hacia arriba, desde una posición de $2.5\ m$. La flecha sigue una trayectoria parabólica, cuya función tiene la siguiente expresión: $f(t) = -8t^2 + 8t + 2.5$, con t en s (segundos)
   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?
   b) ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?
   c) ¿Cuánto tiempo tarda en caer la flecha al piso?

4) La eficiencia de un sistema está modelada por la función $E(t) = -t^2 + 6t + 15$, donde t representa el tiempo en horas.
   a) ¿En qué momento se alcanza la máxima eficiencia?
   b) ¿Cuál es el valor de ésta?

5) El rendimiento de combustible de un automóvil se obtiene de acuerdo a la velocidad con la que se desplaza, si x es la velocidad medida en kilómetros por hora (km/h), el rendimiento está dado por la función: $R(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{7}{2}x$, para $0 < x < 120$.
   a) ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?
   b) ¿Cuál es el máximo rendimiento?

6) Un agricultor debe cercar en forma rectangular un pedazo de un potrero. Para ello compró 1.000 metros de alambre de púas que debe disponer en cuatro líneas como se muestra en la siguiente imagen:



Entonces el área del terreno, que es $largo \cdot ancho$, se expresa como:

$Área = f(x) = x \cdot (500 - x)$, es decir, $f(x) = -x^2 + 500x$

a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?
b) ¿Cuál es el valor del área máxima cercada?

7) Un delfín realiza un salto tal, que su trayectoria parabólica está dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t,\ 0 \leq t \leq 6$ donde t representa el tiempo en segundos y $f(t)$ la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

a) Calcula la altura que alcanza el delfín a los 2 segundos de haber saltado.
b) Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante.
c) ¿A partir de qué instante el delfín comienza a caer?
d) ¿Cuánto demora en caer desde que alcanza la altura máxima?

2.6. Referencias

- Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., & Carrillo, A. (2006). Álgebra. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Cuéllar, J. A. (2018). Matemáticas 1.
- Kaufmann, J., & Schwitters, K. (2015). Álgebra elemental.
- Strogatz, S. (2013). El placer de la X. Taurus.

3. Unidad III. Elementos básicos de geometría plana

Propósitos de la unidad:

Al finalizar la unidad, el alumnado:

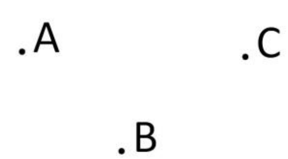
Comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

3.1 Construcciones y elementos básicos

Muchos de los conceptos geométricos se construyen a partir de algunas nociones básicas. Tales nociones no pueden definirse estrictamente ya que se puede terminar empantanado en redundancias ociosas. Sin embargo, muchas de estas nociones pueden captarse de forma intuitiva. Dentro de estas nociones se encuentran los conceptos de punto, línea y plano.

Punto: No tiene dimensiones, es decir, su longitud y anchura es nula, esto a pesar de que su representación sí posee dimensiones. Los puntos se denotan con una letra mayúscula al lado del punto y nos sirven para identificar una ubicación en el plano o espacio geométrico. Ver figura 3.1.

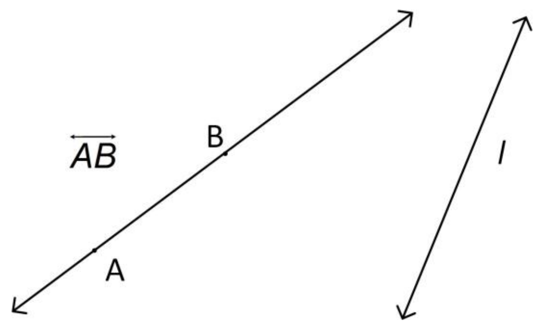
Figura 3.1. Representación de puntos en el plano



Fuente: Imagen propia

Línea recta: Podemos considerar a una línea como un conjunto indefinido de puntos continuos. Cuando hablamos de línea recta podemos considerar que, una vez establecida su dirección, esta no cambia. Sólo tiene extensión en una dimensión, su grosor es nulo. Se extiende indefinidamente, por lo que cuando la representamos, se suele acompañar de unas flechas que indican esta situación. Para identificarla podemos recurrir a señalar dos puntos que pertenecen a la misma, por ejemplo, si los puntos A y B pertenecen a la recta en cuestión, la podemos representar como $\overleftrightarrow{AB}$ o con una letra minúscula en itálica, por ejemplo, *recta a, b, c,* etc. Ver figura 3.2.

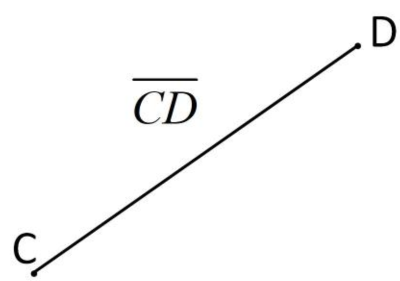
Figura 3.2 Representación de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y *l* en el plano



Fuente: Imagen propia

Segmento de recta: Podemos visualizarlo como una porción de una línea recta definida por los puntos en sus extremos. Para hacer referencia a un segmento que tiene como extremos los puntos C y D lo representamos como $\overline{CD}$. Ver figura 3.3.

Figura 3.3 Representación de un segmento $\overline{CD}$ en el plano

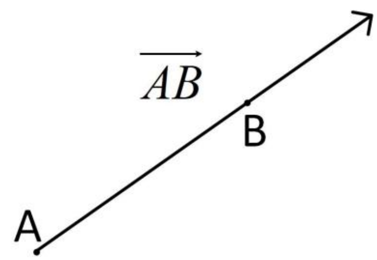


Fuente: Imagen propia

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuya longitud se puede representar como $|\overline{AB}|$ y $|\overline{CD}|$, siempre se cumple un principio llamado de tricotomía que se expresa por alguna de las tres relaciones: $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{AB}| < |\overline{CD}|$ o $|\overline{AB}| > |\overline{CD}|$. Cada una de estas relaciones excluye a las otras dos. En algunas ocasiones y por simplificación de notación se les pueden asignar también letras minúsculas *a, b, c*, etc.

Semirrecta (rayo): Se puede considerar como una porción de línea recta que tiene un punto en un extremo y que se extiende indefinidamente en el otro. También puede identificarse a partir de dos puntos que pertenezcan a esta, pero colocando primero el extremo definido por el punto y una flecha que señale hacia el punto sobre el cual se extiende indefinidamente, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$, ver figura 3.4.

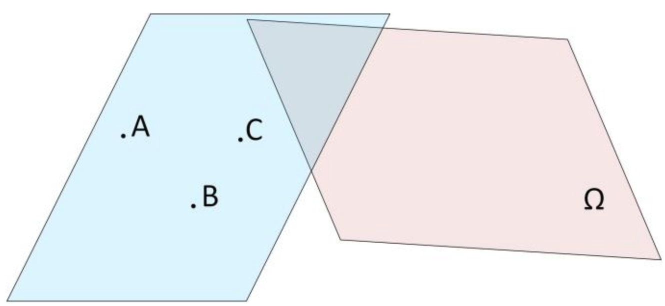
Figura 3.4 Representación de una semirrecta o rayo $\overrightarrow{AB}$ en el plano



Fuente: Imagen propia

Plano: Podríamos considerarlo como una superficie ilimitada y sin grosor, como si se tratara de una hoja infinitamente delgada. Para especificar un plano podemos señalar tres puntos que pertenezcan a ese plano o podemos utilizar una letra griega mayúscula. Ver figura 3.5.

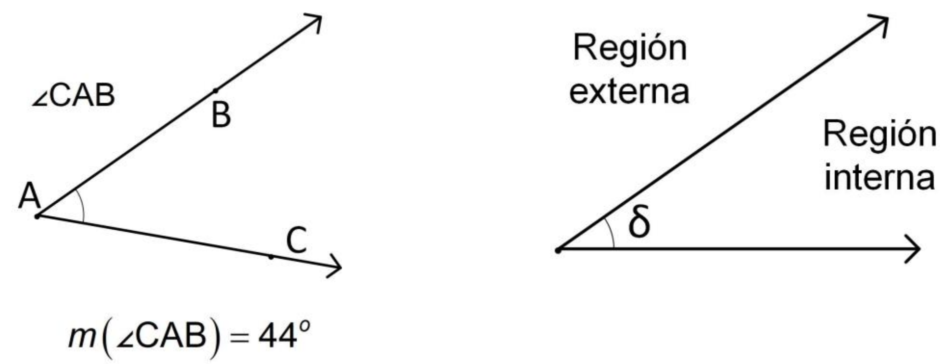
Figura 3.5 Representación de los planos *ABC y Ω*



Fuente: Imagen propia

Ángulo: Un ángulo es la región formada por dos semirrectas o rayos. Podemos pensar que las semirrectas dividen al plano en dos regiones, las cuales podemos identificar como región interna y región externa. Para identificar los ángulos se pueden señalar algunos de los puntos que pertenecen a las semirrectas junto con un punto en común que se llama vértice del ángulo. Por ejemplo, el ángulo que se forma de las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con vértice en el punto A queda representado como $\angle CAB$ (ver figura 3.6). Observa que el punto que funge como vértice queda indicado en la posición media de las tres letras que representan los puntos. Aunque el ángulo puede nombrarse también $\angle BAC$, optaremos por nombrar los ángulos partiendo de una semirrecta inicial en sentido antihorario hacia la otra semirrecta. En algunos casos podremos representar los ángulos con letras del alfabeto griego en minúsculas. En el caso de la medida o magnitud del ángulo se utilizará la nomenclatura de $m(\angle CAB)$, y se le asociará una cantidad numérica proporcional a la región interna con respecto a una circunferencia con centro en A y dividida en 360 partes o en 2π partes. La medida del ángulo dependerá únicamente de la separación entre las semirrectas o rayos y no de la longitud de estos.

Figura 3.6 Representación de ángulos en el plano y de su medida



Fuente: Imagen propia

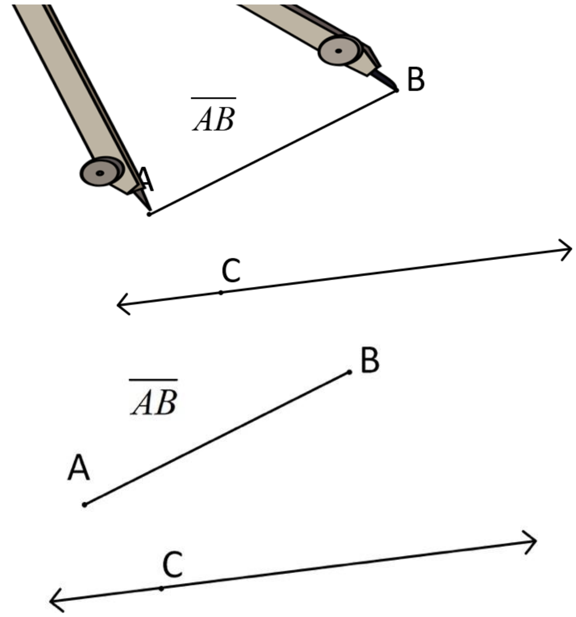
Estos conceptos pueden trabajarse a partir de la construcción que realicemos de ellos empleando dos instrumentos: la regla y el compás. El primero de ellos nos servirá para representar rectas, semirrectas o segmentos y el segundo para trasladar distancias (a diferencia de lo que sucede cuando medimos normalmente con una regla graduada para medir) ya que la abertura del compás nos garantiza la misma distancia entre dos puntos en cualquier dirección. Veamos unos ejemplos de construcción.

3.1.1. Segmentos congruentes

Partimos de un segmento dado $\overline{AB}$, lo que necesitamos es trazar un segmento que tenga el mismo tamaño, pero en otra posición. Como los dos segmentos tendrán el mismo tamaño se dice que son congruentes. Para ello trazamos un punto C y una recta sobre la que vamos a representar el segmento congruente a $\overline{AB}$ (ver Figura 3.7).

Cómo se había mencionado anteriormente, ahora emplearemos el compás para trasladar el segmento $\overline{AB}$. Para ello igualamos la apertura del compás con el tamaño del segmento (Ver figura 3.7).

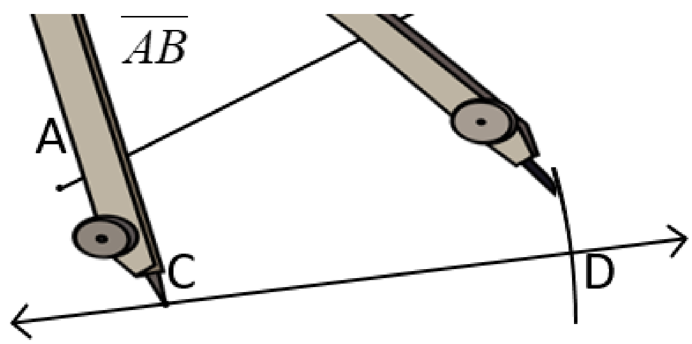
Figura 3.7 Segmento $\overline{AB}$ y recta donde se replicará y apertura del compás para replicar el segmento $\overline{AB}$



Fuente: Imagen propia

Como último paso trasladamos la distancia que representa el segmento $\overline{AB}$ hacia el punto C. Para ello, colocamos el pivote del compás en el punto C y trazamos un arco que interseque la recta sobre la cual replicaremos el segmento. Llamaremos D a este punto de intersección (Ver figura 3.8).

Figura 3.8 Traslado del segmento $\overline{AB}$ hacia la recta que corta C



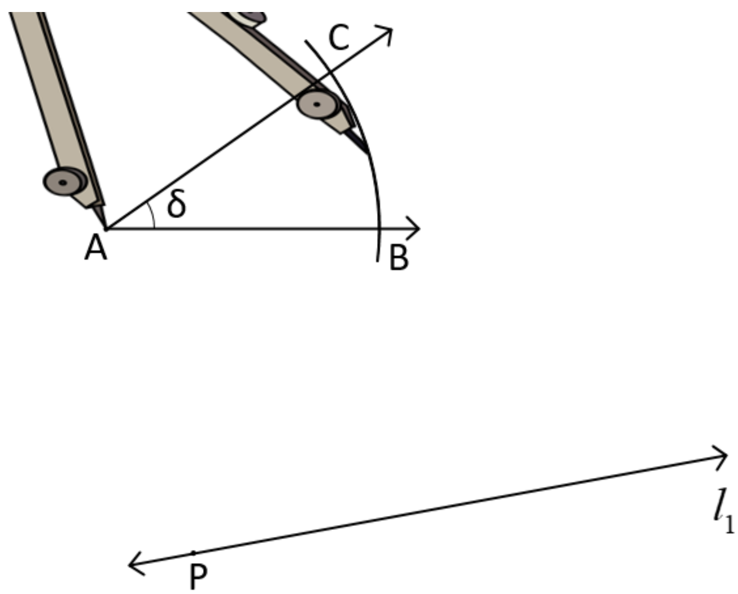
Fuente: Imagen propia

De esta forma, el segmento trazado $\overline{CD}$ es congruente con el segmento $\overline{AB}$. Para representar esto, escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, donde el símbolo $\cong$ representa esta condición de congruencia. También podemos decir que la longitud de los segmentos es igual $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. El término congruente no sólo aplica para segmentos, sino puede ampliarse también a los ángulos y otras construcciones, como se verá más adelante.

3.1.2. Ángulos congruentes

Ahora lo que buscamos es replicar un ángulo, el cual vamos a representar como el ángulo δ, que tiene como vértice el punto A y que vamos a representar en otra posición, digamos sobre la recta l_1. Lo primero que tenemos que hacer es trazar un punto sobre l_1, el cual llamaremos P. Este punto actuará como vértice del nuevo ángulo. Ahora lo que hacemos es trazar un arco con centro en A que garantice que corta ambas semirrectas del ángulo α, a las intersecciones de este arco con las semirrectas las nombraremos B y C (Ver figura 3.9).

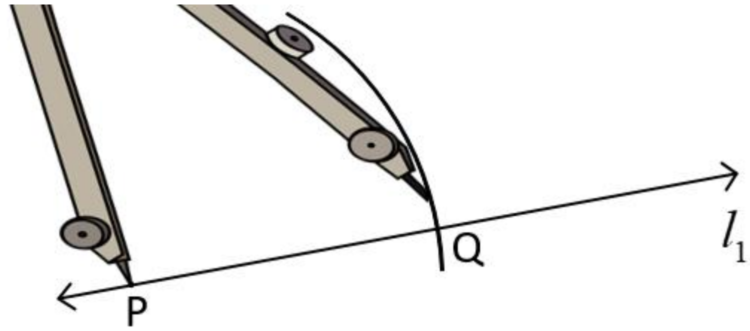
Figura 3.9 Trazado de un arco para obtener dos puntos de referencia



Fuente: Imagen propia

Conservando la apertura del compás, trazamos un arco con centro en el punto P y cuya longitud sea parecida al arco anterior, asegurándonos que corte a la recta l_1 en un punto que nombraremos Q *(*Ver figura 3.10).

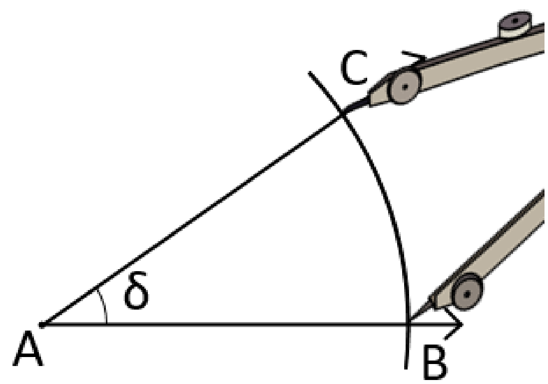
Figura 3.10 Trazado de un arco para obtener un punto de referencia



Fuente: Imagen propia

Una vez que trazamos el punto Q regresamos al arco $\widehat{AB}$ y abrimos el compás hasta que la abertura coincida con la distancia entre los puntos B y C que trazamos de referencia (Ver figura 3.11).

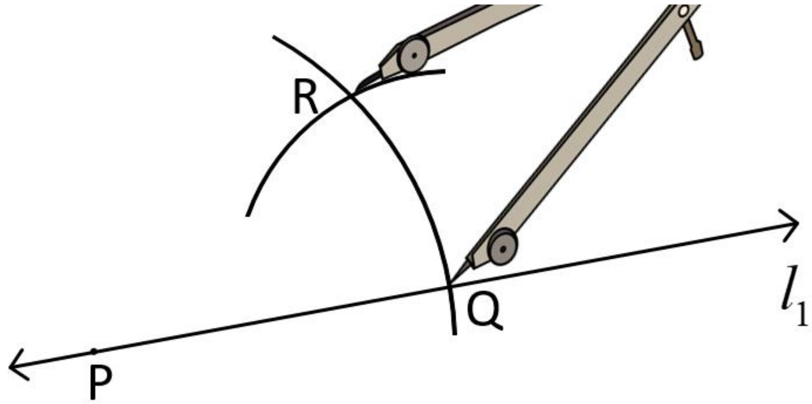
Figura 3.11 Apertura del compás para replicar la distancia entre B y C



Fuente: Imagen propia

Manteniendo la abertura trasladamos la distancia entre B y C de manera que coincida con el punto Q y trazamos un arco que corte al arco con centro en P (Ver figura 3.12). A este punto de intersección entre ambos arcos lo llamaremos R.

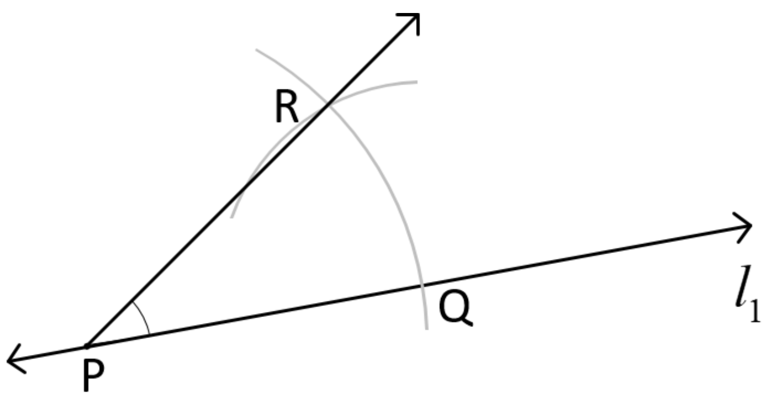
Figura 3.12 Traslado de la distancia entre B y C al punto Q



Fuente: Imagen propia

Trazamos la semirrecta $\overrightarrow{PR}$, de esta forma obtenemos el ángulo $\angle QPR$ el cual es congruente con el ángulo δ, Ver figura 3.13. Observa que lo hemos obtenido replicando distancias entre puntos con respecto al primer ángulo.

Figura 3.13 Trazado del ángulo $\angle \mathbf{QPR}$ congruente con el ángulo δ



Fuente: Imagen propia

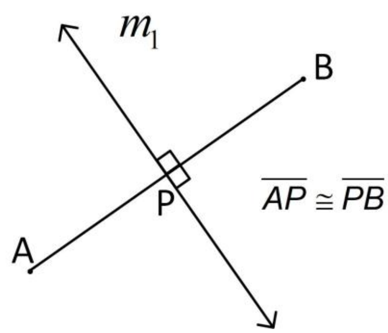
3.1.3. Mediatriz de un segmento

La mediatriz[1] es una recta que corta a un segmento perpendicularmente (formando un ángulo recto) de tal forma que divide al segmento en dos partes iguales. En la figura 3.14 se muestra la mediatriz *m_1 del segmento* $\overline{AB}$, observa que el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento que aparece señalado como punto P, está a la misma distancia del punto A que del punto B (esta condición también puede indicarse como: el punto P es equidistante a los puntos A y B) por lo que los

1 Algunos autores también lo conocen como bisector perpendicular

segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son congruentes. Al punto P se le conoce como punto medio del segmento $\overline{AB}$.

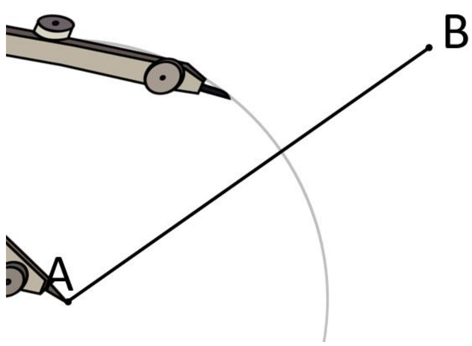
Figura 3.14 Representación de la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$



Fuente: Imagen propia

Para trazar la mediatriz de un segmento partimos de trazar un arco con centro en uno de los puntos extremos, en nuestro caso partimos del punto A.

Figura 3.15 Primer arco con centro en uno de los puntos extremos del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$

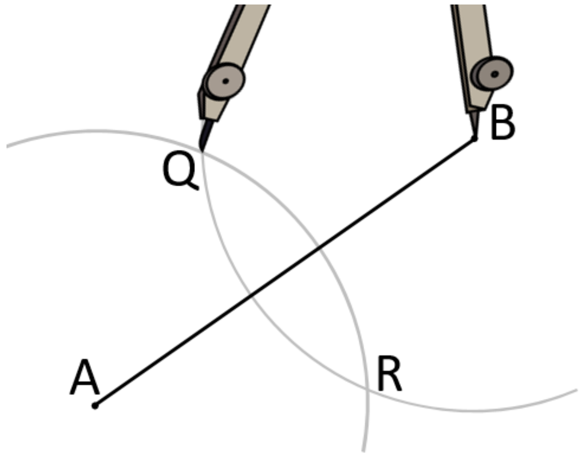


Fuente: Imagen propia

La abertura del compás debe ser tal, que estimemos que sobrepasa la mitad del segmento, la amplitud del arco debe ser casi de media circunferencia para poder completar la construcción (ver figura 3.15).

Sin modificar la abertura trazamos un arco con centro en B de tal forma que corte en dos puntos al primer arco. A estos puntos de intersección de los arcos los nombramos Q y R (ver figura 3.16).

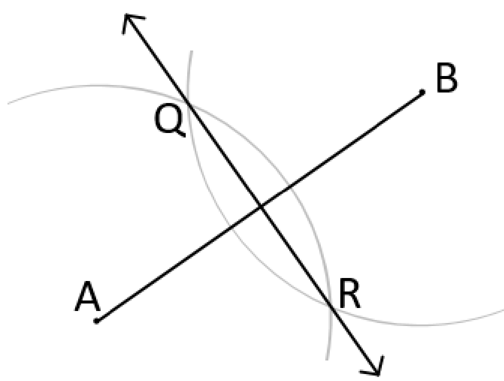
Figura 3.16 Segundo arco con centro en B sobre el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$



Fuente: Imagen propia

Una vez obtenidos los puntos Q y R trazamos una línea recta que pase por estos puntos. Tal recta es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Ver figura 3.17

Figura 3.17 Trazado de la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$

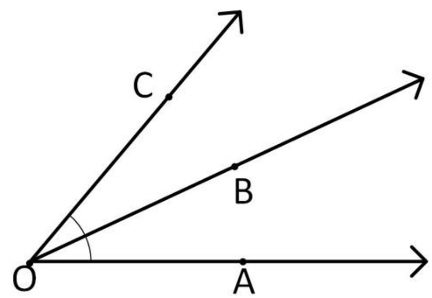


Fuente: Imagen propia

3.1.4. Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo se define como la semirrecta que divide la región interna de un ángulo en dos partes formando dos ángulos congruentes (otra forma de verlo es que divide al ángulo de manera que los ángulos resultantes tienen una medida igual a la mitad del ángulo original). En la figura 3.18 la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ es la bisectriz de $\angle AOC$ formando $\angle AOB \cong \angle BOC$.

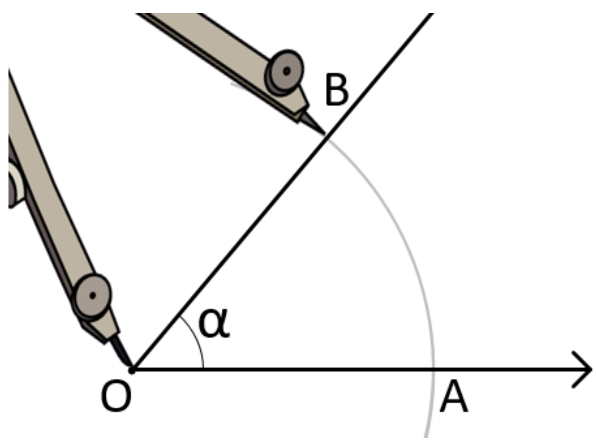
Figura 3.18 Bisectriz de un ángulo



Fuente: Imagen propia

Para trazar la bisectriz de un ángulo trazamos un arco con centro en el vértice de forma que corte a las semirrectas que forman el ángulo. A las intersecciones entre las semirrectas y el arco trazado las nombramos como A y B. Ver figura 3.19a.

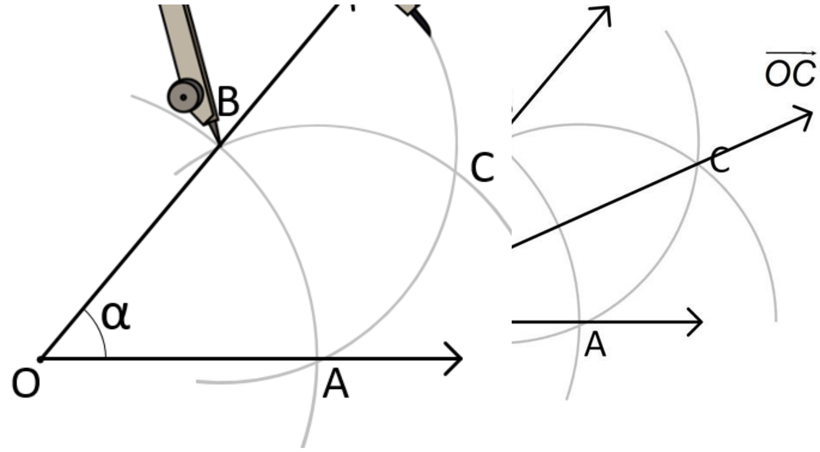
Figura 3.19a Trazado de un arco que corte a las semirrectas que forman el ángulo α.



Fuente: Imagen propia

Una vez que tenemos ubicados los puntos A y B, trazamos un arco con centro en B, orientado hacia la parte interna del ángulo y una abertura que coincida con la distancia entre los puntos A y B. Sin modificar la abertura trazamos un arco con centro en A que corte el arco con centro en B, a esta intersección la nombramos C. Ver figura 3.19b. Por último, trazamos la semirrecta con origen en el vértice O del ángulo hacia el punto C, esta semirrecta es la bisectriz del ángulo, ver figura 3.19b.

Figura 3.19b Trazado de dos arcos que se cortan en la región interna

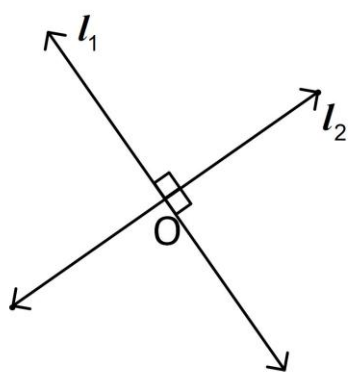


Fuente: Imagen propia

3.1.5. Perpendicular a una línea recta dada que pasa por un punto que pertenece a ella.

Cuando una línea recta corta a otra de forma perpendicular, el punto de intersección forma cuatro semirrectas, las cuales definen cuatros ángulos rectos. Este punto de intersección actúa como vértice de los ángulos. Ver figura 3.20.

Figura 3.20 Rectas perpendiculares entre si

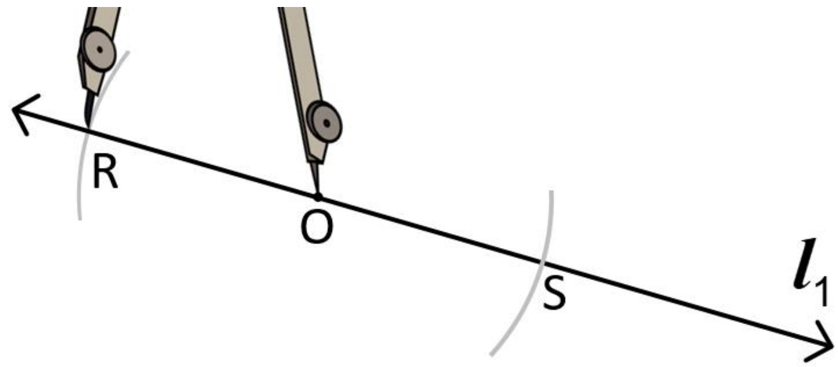


Fuente: Imagen propia

Podemos representar esta condición con el símbolo $\perp$, de esta forma, si queremos señalar que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares podemos escribir $l_1 \perp l_2$.

Para trazar una línea recta perpendicular a otra por un punto perteneciente a esta última empleando regla y compás, partimos de ubicar el punto sobre la recta a la que vamos a trazar la perpendicular. En nuestro caso, para ejemplificar el proceso, llamemos a la línea recta l_1 y sobre esta al punto O por el que va a pasar la perpendicular. Para comenzar, aprovecharemos una construcción previa que consiste en trazar la mediatriz de un segmento. Para ello trazamos dos arcos con centro en O y la misma abertura de compás, de forma que corten a la recta en dos puntos los cuales llamaremos R y S. Con ello hemos indicado un segmento $\overline{RS}$ sobre la recta l_1, ver figura 3.21.

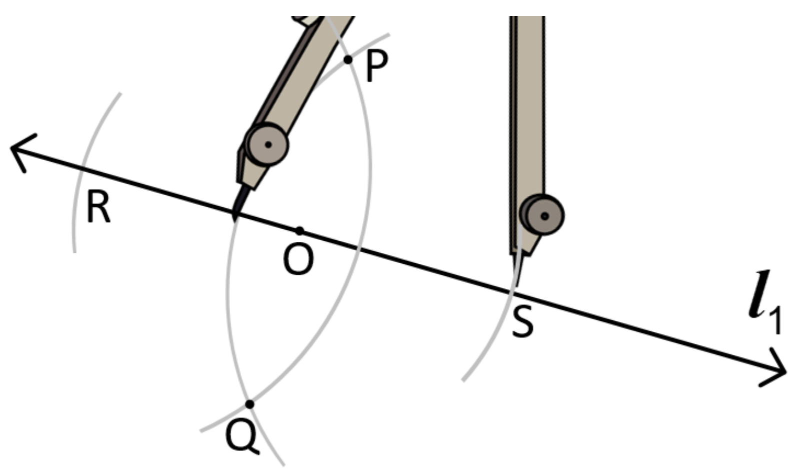
Figura 3.21 Trazado de un segmento $\overline{\mathrm{RS}}$ sobre la recta l_1



Fuente: Imagen propia

A partir de este paso, el proceso consiste en obtener la mediatriz del segmento $\overline{RS}$ el cual divide al segmento a la mitad y es perpendicular a este. El siguiente paso es trazar dos arcos con centros en R y S y una abertura que garantice que se corten en dos puntos a ambos lados de la recta l_1 a estos puntos los llamaremos P y Q. Ver figura 3.22.

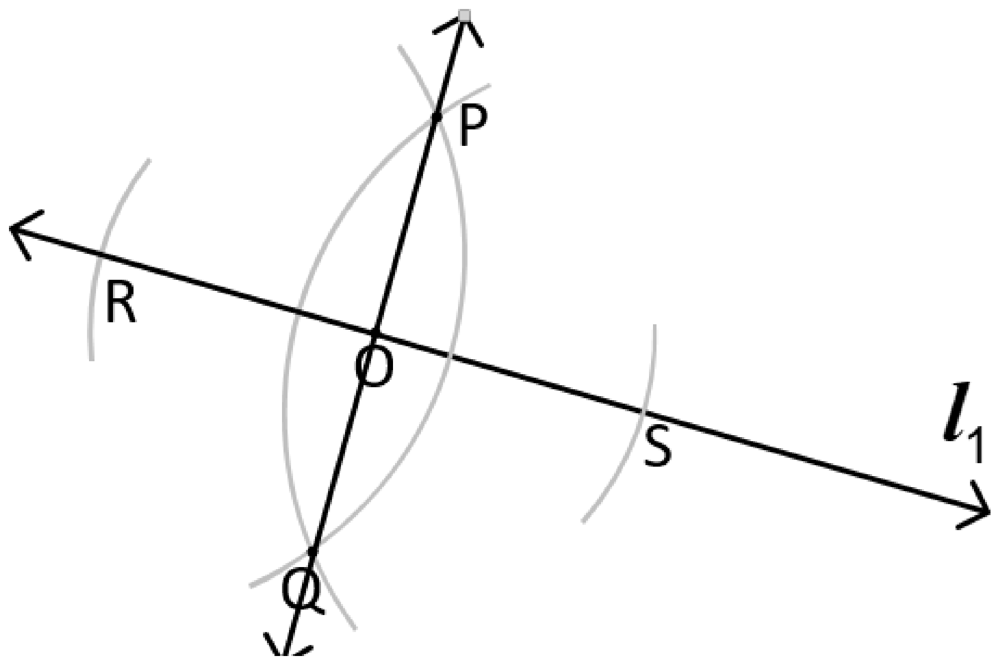
Figura 3.22 Trazado de dos puntos referencia



Fuente: Imagen propia

Por último, unimos P y Q con una línea recta con ayuda de la regla. Ver figura 3.23. Esta línea recta es la perpendicular buscada.

Figura 3.23 Trazado de una línea recta perpendicular a otra que corta un punto sobre esta

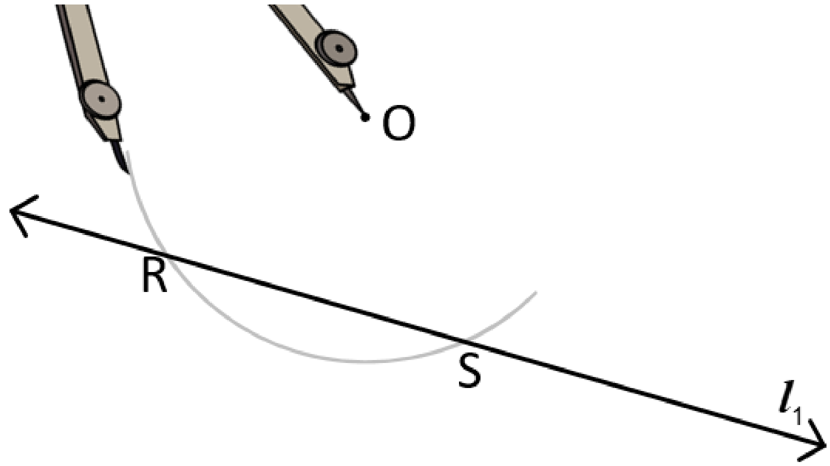


Fuente: Imagen propia

3.1.6. Perpendicular a una línea recta dada que pasa por un punto fuera de ella.

Para esta construcción necesitamos trazar una línea recta perpendicular a otra, pero que pasa por un punto externo a esta última. En nuestro ejemplo, necesitamos trazar la línea recta perpendicular a la línea recta l_1 que corta por el punto O, el cual no pertenece a l_1. Comenzamos por trazar un arco con centro en O y una abertura que garantice que corte a la línea recta l_1 en dos puntos, los cuales llamaremos R y S. Lo que hemos obtenido en este paso es un segmento $\overline{RS}$ que pertenece a la línea recta l_1, ver figura 3.24.

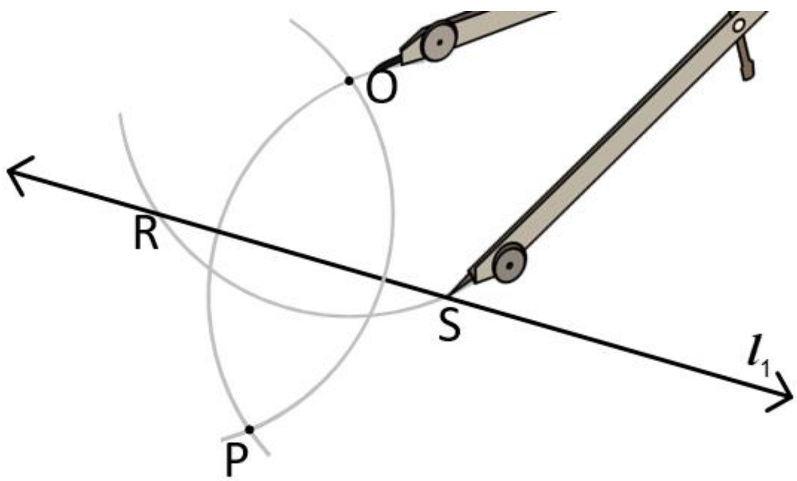
Figura 3.24 Trazado de un segmento auxiliar $\overline{\mathrm{RS}}$ sobre la recta l_1



Fuente: Imagen propia

A partir de este paso se obtiene la mediatriz del segmento $\overline{RS}$ trazando dos arcos con centros en R y S y manteniendo la abertura que se empleó en el paso anterior. Estos arcos se cortarán en dos puntos, el punto O y otro punto que nombraremos P. Ver figura 3.25.

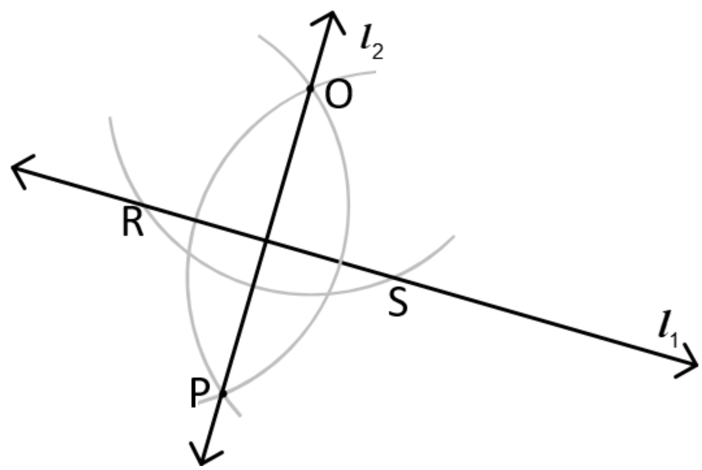
Figura 3.25 Trazado de los arcos auxiliares para trazar la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{RS}}$



Fuente: Imagen propia

Como último paso trazamos la línea recta que corta los puntos O y P la cual es la línea recta l_2, perpendicular a la línea recta l_1 que corta un punto O externo a esta. Ver figura 3.26.

Figura 3.26 Trazado de la línea recta perpendicular a otra que corta un punto externo a esta

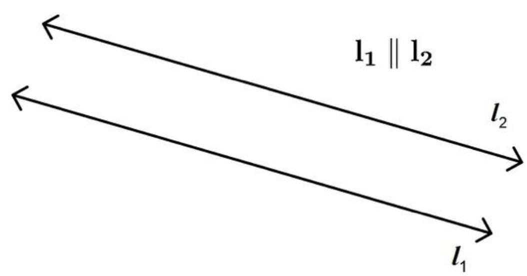


Fuente: Imagen propia

3.1.7. Recta paralela a otra que pasa por un punto externo dado

La palabra paralelo describe una relación entre líneas rectas en un plano. Podemos decir que las líneas rectas son paralelas si no se cortan o intersecan, es decir, si no se cortan en algún punto (también podemos decir que no tienen un punto en común). Para representar esta situación se emplea el símbolo $\|$. En la figura 3.27 se muestra que las rectas l1 y l2 son paralelas $\mathbf{l_1} \parallel \mathbf{l_2}$.

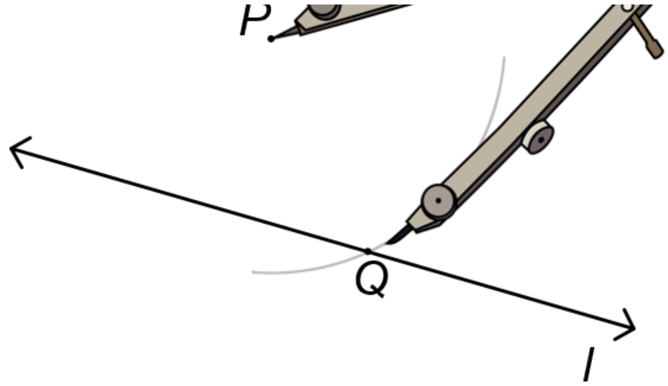
Figura 3.27 Rectas paralelas en un plano



Fuente: Imagen propia

Por un punto externo a una línea recta pasa a lo sumo una recta paralela a la primera. Esta afirmación se considera un postulado, es decir, una afirmación que se toma como verdadera y no se demuestra. Veamos ahora como trazar una recta paralela a otra que corta por un punto externo a esta última empleando regla y compás. Partimos de una línea recta *l* y un punto P externo a esta (ver figura 3.28) y trazamos un arco con centro en P que corte a la línea recta *l* en Q.

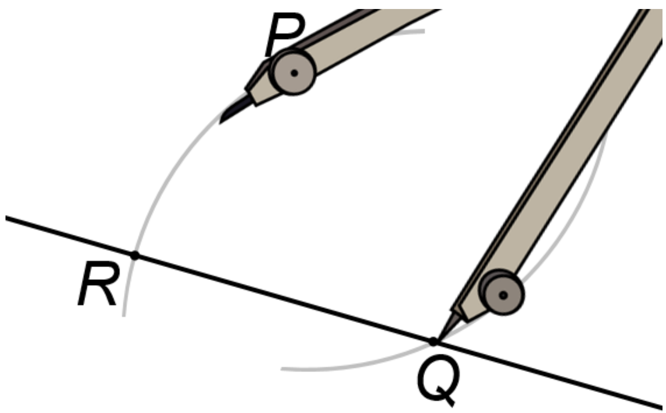
Figura 3.28 Trazado de un punto de referencia Q sobre la recta *l*



Fuente: Imagen propia

Manteniendo la abertura de la distancia entre P y Q trazamos un arco con centro en Q que corte a la línea recta en R. Ver figura 3.29.

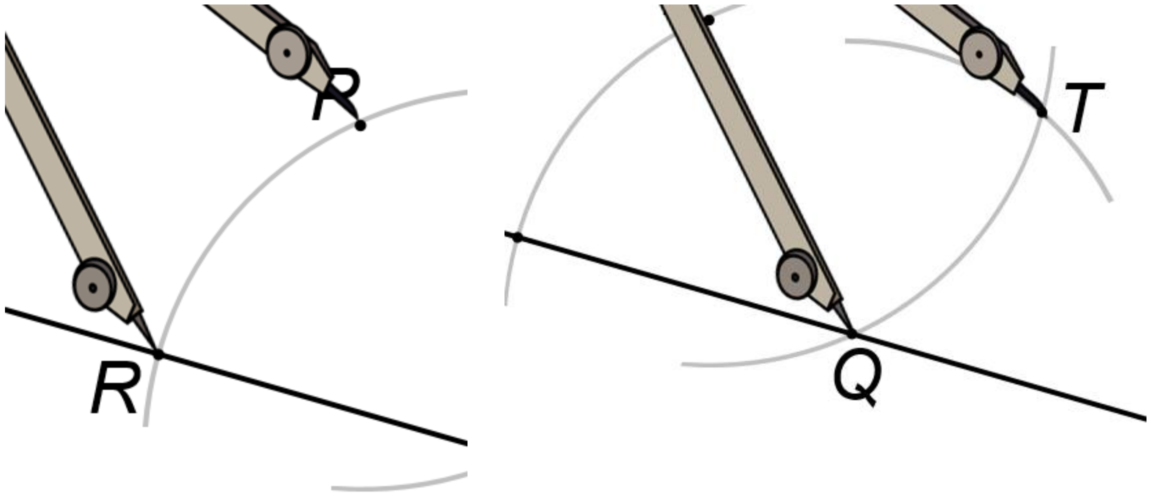
Figura 3.29 Trazado de un segundo punto de referencia R sobre la recta *l*



Fuente: Imagen propia

El siguiente paso es trazar un arco con una abertura igual a la distancia entre los puntos R y P, con centro en Q, de manera que corte al primer arco que trazamos en T. Ver figura 3.30.

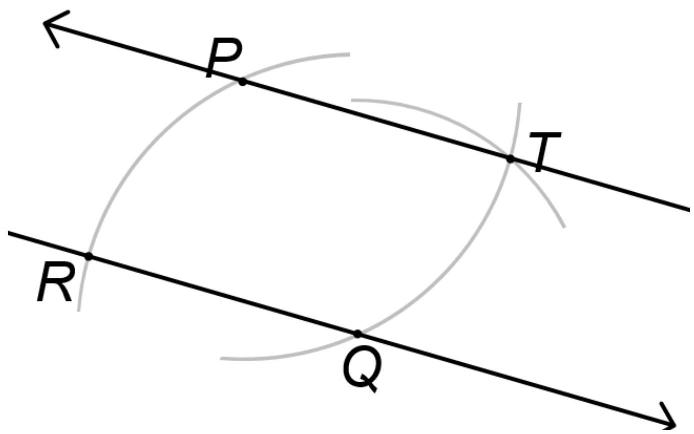
Figura 3.30 Trazado de un tercer arco que corte al primero en T



Fuente: Imagen propia

Por último, unimos P con T por medio de la regla y con ello hemos obtenido una línea recta paralela a *l* que corta un punto P externos a esta. Ver figura 3.31.

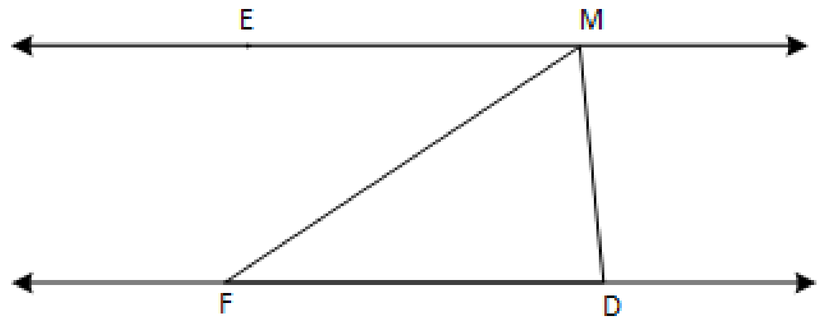
Figura 3.31 Trazado de una línea paralela a *l* que corta al punto P



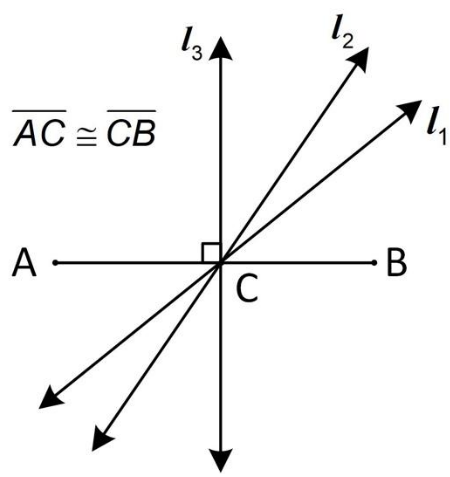
Fuente: Imagen propia

Ejercicios 3.1

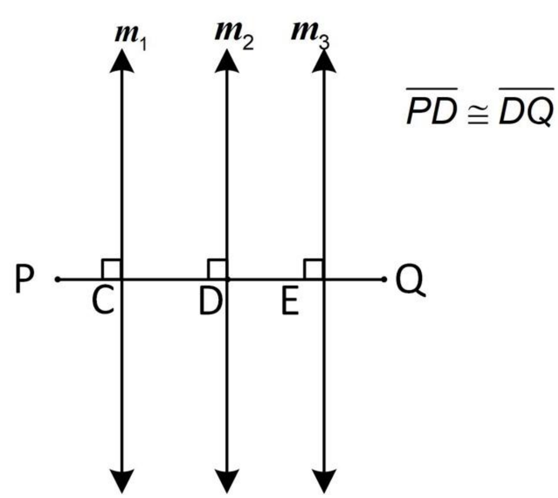
1. Nombra todas las rectas, semirrectas, segmentos y ángulos con los puntos que aparecen en la siguiente figura:



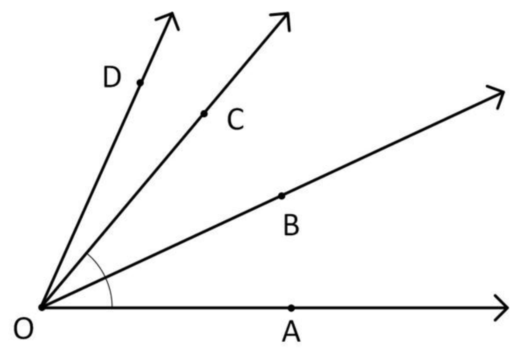
2. En la siguiente figura, identifica cuál de las rectas puede representar la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si todas cortan el punto C.



3. Identifica, en la siguiente figura, qué recta puede representar la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$



4. Determine cuales de las afirmaciones son verdaderas o falsas, escribiendo una x en la columna respectiva, además se sabe que $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ no son colineales y $\overrightarrow{OB}$ es la bisectriz de $\angle AOC$. Apóyate de la siguiente figura.



	Verdadero	Falso
a) $\angle AOC \cong \angle AOB$	( )	( )
b) $\angle BOC \cong \angle AOB$	( )	( )
c) $\angle BOC \cong \angle BOD$	( )	( )
d) $\angle AOB \cong \angle BOC$	( )	( )

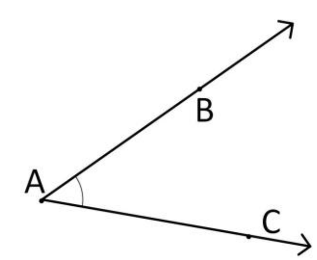
Respuestas a los Ejercicios 3.1

1. **Rectas:** $\overleftrightarrow{EM}, \overleftrightarrow{FD}$ **; Semirrectas:** $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{DF}$**; Segmentos:** $\overline{EM}, \overline{FD}, \overline{MD}, \overline{MF}$**; Ángulos** $\angle EMF, \angle DFM, \angle FMD, \angle MDF, \angle EMD$
2. **La recta *l_3*, ya que si bien todas cortan al punto medio solo *l_3* es perpendicular.**
3. **La recta *m_2* ya que si bien todas son perpendiculares solo *m_2* corta el punto medio del segmento.**
4. **a) Falso; b) Verdadero; c) Falso; d) Verdadero**

3.2. Clasificación de ángulos por su medida

Ángulo agudo: Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0º pero menor a 90º también podemos decir que es menor a un ángulo recto.

Figura 3.32 Representación de un ángulo agudo

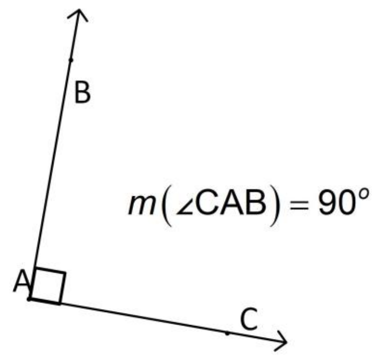


$$0^o < m(\angle CAB) < 90^o$$

Fuente: Imagen propia

Ángulo recto: Es aquel ángulo cuya medida es de 90°, también podemos decir que los rayos que conforman el ángulo son perpendiculares entre sí. Ver figura 3.33

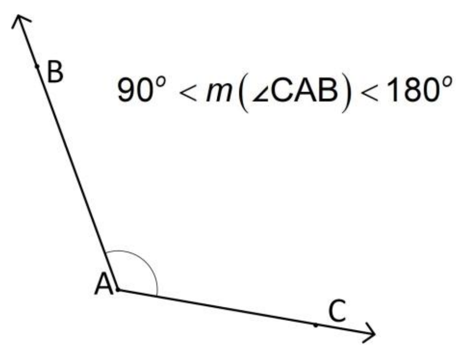
Figura 3.33 Representación de un ángulo recto



Fuente: Imagen propia

Ángulo obtuso: Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 90° pero menor que 180°. Ver figura 3.34

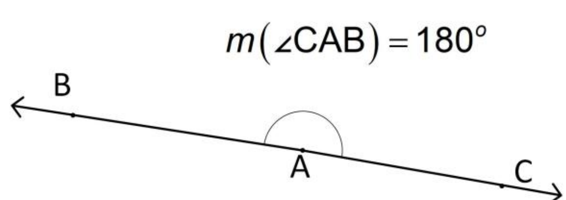
Figura 3.34 Representación de un ángulo obtuso



Fuente: Imagen propia

Ángulo llano: Es aquel ángulo cuya medida es igual a 180°. Ver figura 3.35

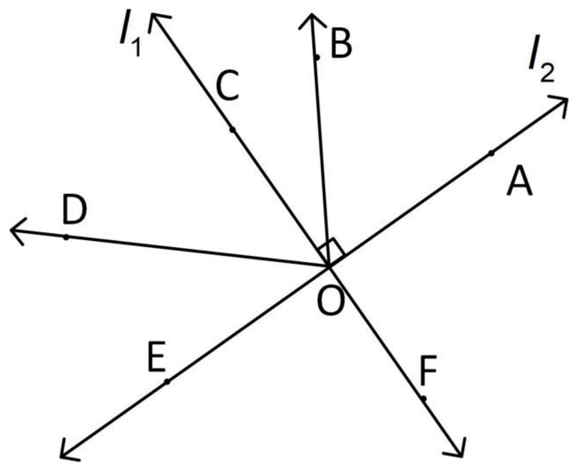
Figura 3.35 Representación de un ángulo llano



Fuente: Imagen propia

Ejercicios 3.2

1. Identifica todos los ángulos de los que podemos afirmar que son: agudos, rectos, obtusos y llanos que aparecen en la siguiente figura, si $l_1 \perp l_2$



2. Clasifica los siguientes ángulos por su medida: $m(\angle DEF) = 90^o$ $m(\angle ABC) = 30^o$, $m(\angle BCD) = 161^o$, $m(\angle COD) = 89^o$, $m(\angle HFG) = 100^o$, $m(\angle MNO) = 45^o$, $m(\angle PQR) = 10^o$, $m(\angle TUV) = 179^o$

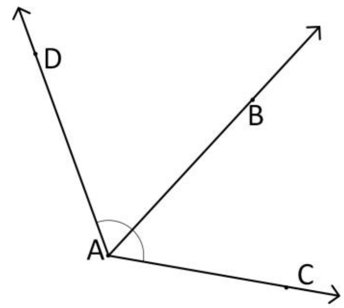
Respuestas ejercicios 3.2

1. **Ángulos agudos:** $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$**; ángulos rectos:** $\angle AOC, \angle COE, \angle EOF, \angle FOA$**; ángulos obtusos:** $\angle AOD, \angle DOF, \angle FOB$**: ángulos llanos:** $\angle AOE, \angle FOC$
2. **Ángulos agudos:** $\angle ABC, \angle COD, \angle MNO, \angle PQR$**; ángulos rectos:** $\angle DEF$ **; ángulos obtusos:** $\angle BCD, \angle HFG, \angle TUV$

3.3. Clasificación de ángulos por su relación con otros ángulos

Ángulos adyacentes. Son dos (y solamente dos) ángulos que comparten un mismo vértice y un rayo en común, con la particularidad de que el rayo común se encuentra entre los otros dos rayos. En la figura 3.37 se muestra que el $\angle CAB$ es adyacente al $\angle BAD$ y viceversa, el $\angle BAD$ es adyacente al ángulo $\angle CAB$. Puede observarse que comparten el vértice A y comparten a la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ como lado común.

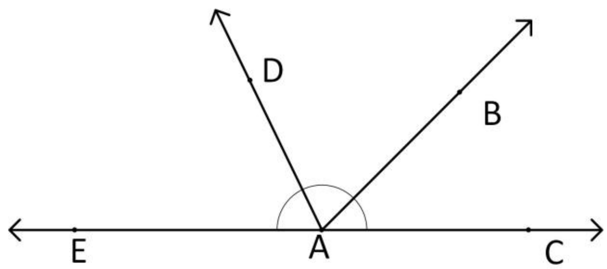
Figura 3.37 Representación de ángulos adyacentes



Fuente: Imagen propia

Ángulos consecutivos. Son tres o más ángulos que comparten un vértice en común. Cada pareja de ángulos comparte un rayo en común. En la figura 3.38 los ángulos $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle DAE$ son consecutivos con vértice común A.

Figura 3.38 Representación de ángulos consecutivos

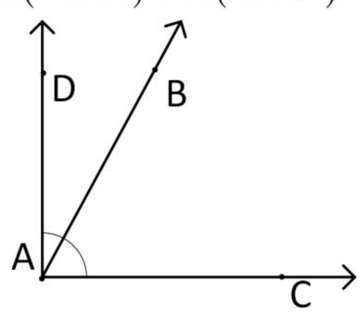


Fuente: Imagen propia

Ángulos complementarios. Si la suma de las medidas de dos ángulos es un ángulo recto (90°), se dice que son complementarios. En la figura 3.39 los ángulos $\angle CAB$ y $\angle BAD$ son complementarios. También puede indicarse que $\angle BAD$ es complemento de $\angle CAB$ y viceversa.

Figura 3.39 Representación de ángulos adyacentes y complementarios

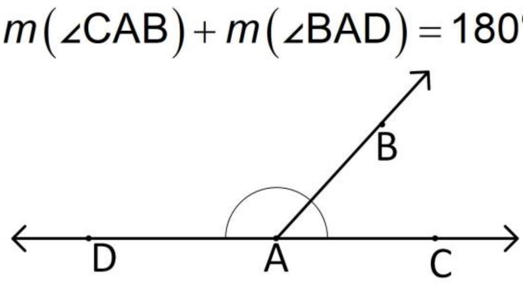
$$m(\angle CAB) + m(\angle BAD) = 90^o$$



Fuente: Imagen propia

Ángulos suplementarios. Si la suma de las medidas de dos ángulos es un ángulo llano (180°), se dice que son suplementarios. En la figura 3.40 los ángulos $\angle CAB$ y $\angle BAD$ son suplementarios. También puede indicarse que $\angle BAD$ es suplemento de $\angle CAB$ y viceversa.

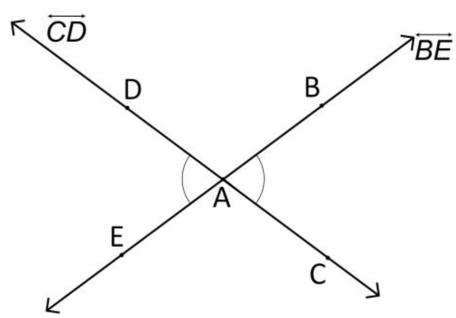
Figura 3.40 Representación de ángulos adyacentes y suplementarios



Fuente: Imagen propia

Ángulos opuestos por el vértice. Son dos ángulos formados de tal manera que cada semirrecta de cada uno de los ángulos pertenece a la misma recta que la semirrecta de otro de los ángulos. En la figura 3.41 se muestra que $\angle CAB$ es opuesto a $\angle DAE$, puede observarse que el rayo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AE}$ pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{BE}$ y el rayo $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AC}$ pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{CD}$. También se puede observar que el $\angle BAD$ es opuesto a $\angle EAC$.

Figura 3.41 Representación de ángulos opuestos por el vértice



Fuente: Imagen propia

De acuerdo con las definiciones anteriores, puede observarse que los ángulos $\angle CAB$ y $\angle BAD$ son suplementarios, de la misma forma que $\angle BAD$ y $\angle DAE$, por lo que tenemos:

$m(\angle CAB) + m(\angle BAD) = 180^o$

$m(\angle DAE) + m(\angle BAD) = 180^o$

$m(\angle CAB) + m(\angle BAD) = m(\angle DAE) + m(\angle BAD)$

Lo anterior implica que $m(\angle CAB) = m(\angle DAE)$.

Es decir, la medida de los ángulos opuestos por el vértice es igual, podemos afirmar que los ángulos son congruentes $\angle CAB \cong \angle DAE$. Observa que la igualdad $m(\angle CAB) = m(\angle DAE)$ y la congruencia $\angle CAB \cong \angle DAE$ son expresiones equivalentes, pues significan los mismo. Se puede llevar el mismo razonamiento para los ángulos $\angle BAD$ y $\angle EAC$ y concluir que son congruentes $\angle BAD \cong \angle EAC$.

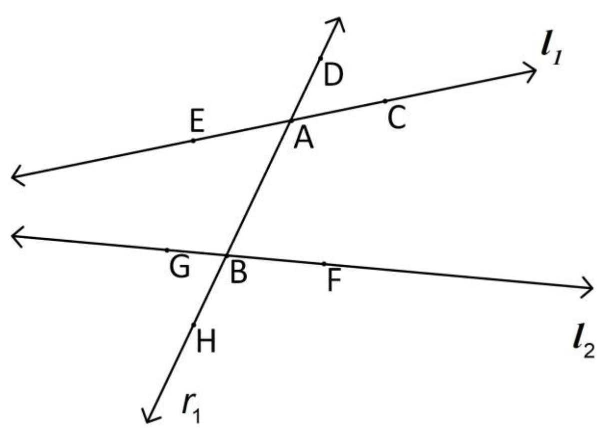
3.4. Ángulos formados por dos líneas rectas intersecadas por una línea recta transversal.

Si partimos de dos líneas l_1 y l_2 cortadas por otra línea recta r_1 se formas seis regiones y ocho ángulos. Ver figura 3.42 si tomamos en cuenta las dos regiones entre las líneas rectas l_1 y l_2 y los identificamos como regiones internas podemos definir por contrapartida las otras cuatro regiones como externas. De manera similar podemos considerar 3 regiones a cada lado de la línea recta r_1, a partir de esto podemos definir los ángulos formados.

Ángulos alternos internos. Son las parejas de ángulos que se encuentran en la región interna y en diferente lado de la línea recta transversal. En la figura 3.42 las parejas de ángulos $\angle BAC$, $\angle ABG$ y $\angle EAB$, $\angle FBA$ corresponden a ángulos alternos internos.

Ángulos alternos externos. Son las parejas de ángulos que se encuentran en las regiones externas y en diferente lado de la línea recta transversal. En la figura 3.42 las parejas de ángulos $\angle CAD$, $\angle GBH$ y $\angle DAE$, $\angle HBF$ corresponden a ángulos alternos externos.

Figura 3.42 Representación de ángulos formados por dos dos líneas rectas cortadas por una tercera línea recta transversal.



Fuente: Imagen propia

Ángulos correspondientes. Son las parejas de ángulos no adyacentes que se encuentran en el mismo lado de la línea recta transversal, pero en diferente región, uno está en la región interna y otro en la externa. En la figura 3.42 las parejas de ángulos $\angle CAD$, $\angle FBA$, $\angle BAC$, $\angle HBF$, $\angle DAE$, $\angle ABG$, y $\angle EAB$, $\angle GBH$ representan ángulos correspondientes.

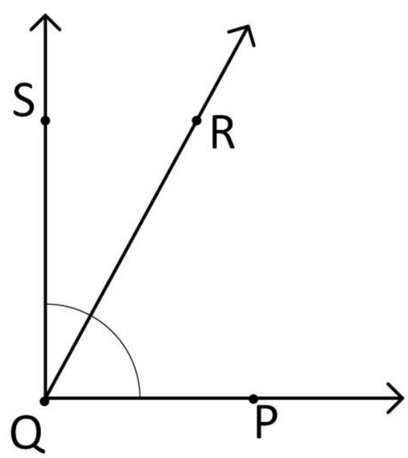
Ángulos colaterales[2] internos. Son parejas de ángulos que se encuentran en la región interna y en el mismo lado de la línea recta transversal. En la figura 3.42 las parejas de ángulos conjugados internos son $\angle CAB$, $\angle FBA$ y $\angle EAB$, $\angle ABG$.

Ángulos colaterales externos. Son parejas de ángulos que se encuentran en la región externa y en el mismo lado de la línea recta transversal. En la figura 3.42 se muestra que las parejas de ángulos conjugados externos son $\angle CAD$, $\angle HBF$ y $\angle DAE$ y $\angle GBH$.

Ejercicios 3.3

1. Empleando la figura 3.43 y sabiendo que $\overrightarrow{QS} \perp \overrightarrow{QP}$ determine el valor de la medida de los ángulos solicitados para cada caso:

Figura 3.43 Ejercicio 3.3.1



a) $m(\angle PQR) = 35^o$; $m(\angle RQS) = ?$

b) $m(\angle RQS) = 5^o$; $m(\angle PQR) = ?$

c) $m(\angle PQR) = \dfrac{m(\angle RQS)}{2}$
$m(\angle PQR) = ?$; $m(\angle RQS) = ?$

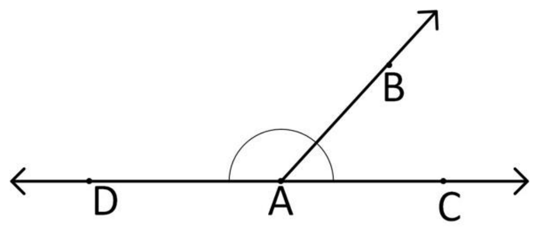
d) $m(\angle RQS) = (5)m(\angle PQR)$
$m(\angle PQR) = ?$; $m(\angle RQS) = ?$

Fuente: Imagen propia

2. Empleando la figura 3.44 y sabiendo que D, A y C son colineales, determine el valor de la medida de los ángulos solicitados para cada caso:

Figura 3.44 Ejercicio 3.3.2

2 También se puede encontrar en algunos textos como ángulos conjugados internos.



e) $m(\angle BAD) = 100^o$; $m(\angle CAB) = ?$

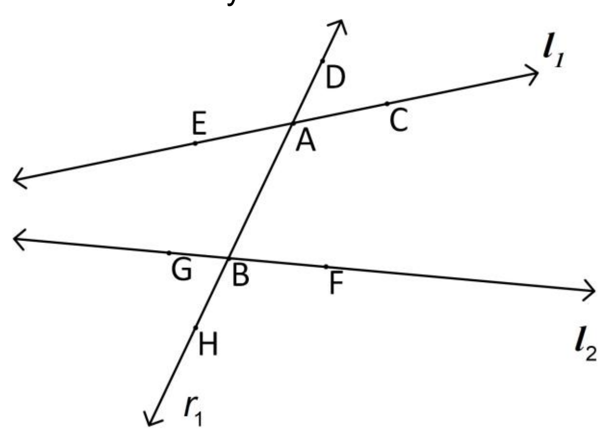
f) $m(\angle CAB) = 65^o$; $m(\angle BAD) = ?$

g) $m(\angle CAB) = \dfrac{m(\angle BAD)}{3}$
$m(\angle CAB) = ?$; $m(\angle BAD) = ?$

h) $m(\angle CAB) = (2)m(\angle BAD)$
$m(\angle CAB) = ?$; $m(\angle BAD) = ?$

Fuente: Imagen propia

3. Empleando la siguiente figura determine la medida de los ángulos alternos internos si $m(\angle CAD) = 50^o$ y $m(\angle HBF) = 92^o$



Respuestas Ejercicios 3.3

1. a) $\mathbf{m(\angle RQS) = 55^o}$; **b)** $\mathbf{m(\angle PQR) = 85^o}$; **c)** $\mathbf{m(\angle PQR) = 30^o}$, $\mathbf{m(\angle RQS) = 60^o}$; **d)** $\mathbf{m(\angle PQR) = 15^o}$, $\mathbf{m(\angle RQS) = 75^o}$.

2. a) $\mathbf{m(\angle CAB) = 80^o}$; **b)** $\mathbf{m(\angle BAD) = 115^o}$; **c)** $\mathbf{m(\angle CAB) = 45^o}$, $\mathbf{m(\angle BAD) = 135^o}$; **d)** $\mathbf{m(\angle CAB) = 120^o}$, $\mathbf{m(\angle BAD) = 30^o}$.

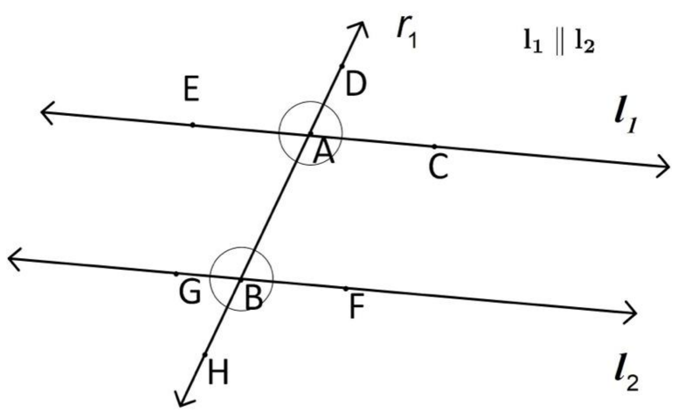
3. $\mathbf{m(\angle BAC) = 130^o}$, $\mathbf{m(\angle ABG) = 92^o}$ **y** $\mathbf{m(\angle EAB) = 50^o}$, $\mathbf{m(\angle FBA) = 88^o}$

3.5. Teorema de las rectas paralelas

El término teorema se refiere a una afirmación cuya veracidad debe demostrarse por medio de una cadena de razonamientos lógicos. Esta manera de proceder es lo que provee de una certidumbre a la geometría y a la matemática en general, que no tienen otras ciencias. Ya anteriormente se había mencionado el término de postulado cuando se trabajó el caso de las rectas paralelas (ver apartado 3.1.5) se mencionó que los postulados son afirmaciones que no se demuestran y se toman como verdaderas. Veamos ahora otro postulado que nos ayudara a deducir el teorema de las rectas paralelas. El postulado afirma que "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes".

Derivado de esto veamos que implicaciones tiene, vamos a apoyarnos de la figura 3.45. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas, de acuerdo al postulado anterior se tienen las siguientes relaciones $\angle CAD \cong \angle FBA$, $\angle BAC \cong \angle HBF$, $\angle DAE \cong \angle ABG$, y $\angle EAB \cong \angle GBH$. Derivado de esto tenemos podemos deducir la siguiente afirmación "Dos rectas cortadas por un transversal son paralelas si y solo si, dos ángulos alternos internos son congruentes" esta afirmación es el **teorema de rectas paralelas**. Veamos ahora como podemos deducir esta afirmación.

Figura 3.45 Representación de ángulos formados por dos líneas rectas paralelas cortadas por una tercera línea recta transversal.



Fuente: Imagen propia

Observemos que de la construcción mostrada en la figura 3.45 tenemos las relaciones:

$m(\angle BAC) + m(\angle EAB) = 180$

$m(\angle HBF) + m(\angle FBA) = 180$

ya que son ángulos suplementarios. Esto nos permite establecer la siguiente igualdad:

$m(\angle BAC) + m(\angle EAB) = m(\angle HBF) + m(\angle FBA)$.

Pero de acuerdo con el postulado de las paralelas $\angle BAC \cong \angle HBF$, por lo que sus medidas son iguales $m(\angle BAC) = m(\angle HBF)$ y podemos sustituir una por la otra $m(\angle BAC) + m(\angle EAB) = m(\angle BAC) + m(\angle FBA)$ esto implica que

$m(\angle EAB) = m(\angle FBA)$ y, por lo tanto $\angle EAB \cong \angle FBA$, que es lo que afirma el teorema.

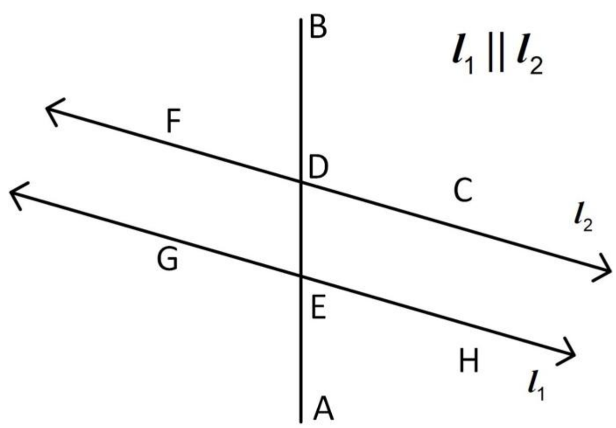
Si bien hay demostraciones más rigurosas podemos apreciar las implicaciones del postulado. De la misma forma podemos hablar de un teorema reciproco “Si una línea recta transversal forma con dos rectas ángulos alternos internos congruentes, dichas rectas son paralelas”. Esta afirmación puede usarse como un criterio para afirmar que dos rectas son paralelas si los ángulos alternos internos son congruentes.

Como consecuencia de estos resultados podemos afirmar también que, si las rectas son paralelas los ángulos alternos externos son congruentes, esto lo podemos deducir fácilmente ya que los ángulos alternos externos $\angle CAD$ y $\angle GBH$ son congruentes con $\angle EAB$; $\angle FBA$ respectivamente dado que son opuestos por el vértice. (Ver figura 3.45)

Ejercicios 3.4

1. Empleando la Figura 3.46, determine la medida de los ángulos alternos externos, si $m(\angle EDC) = 70^o$.
2. Empleando la figura 3.46 determine el valor de la medida de los ángulos colaterales internos si $m(\angle BDF) = \dfrac{m(\angle CDB)}{2}$
3. Empleando la figura 3.46 determine el valor de la medida de los ángulos alternos internos y alternos externos si los ángulos colaterales internos son congruentes entre sí.

Figura 3.46 Ejercicios de la sección 3.4



Fuente: Imagen propia

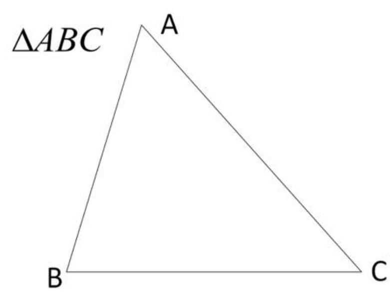
Respuestas Ejercicios 3.4

1. $\mathbf{m(\angle CDB) = 130^o}$, $\mathbf{m(\angle GEA) = 130^o}$ **y** $\mathbf{m(\angle BDF) = 50^o}$, $\mathbf{m(\angle AEH) = 50^o}$
2. $\mathbf{m(\angle EDC) = 60^o}$, $\mathbf{m(\angle HED) = 120^o}$ **y** $\mathbf{m(\angle FDE) = 120^o}$, $\mathbf{m(\angle DEG) = 60^o}$
3. **Todas las medidas de los ángulos alternos internos y alternos externos son de 90°.**

3.6. El triángulo

Si tres puntos sobre un mismo plano no son colineales (pertenecen a la misma línea recta) conforman tres segmentos los cuales en conjunto conforman un triángulo. Los puntos en cuestión reciben el nombre vértices del triángulo. En la figura 3.47, se representa un triángulo con vértices en los puntos A, B y C, los segmentos $\overline{BC}$,$\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se llaman lados del triángulo. Podemos denotar un triángulo con el símbolo $\triangle$ seguido de los tres puntos que fungen como vértices, así un triángulo con vértices A, B y C lo podemos representar como $\triangle ABC$.

Figura 3.47 Representación de un triángulo con vértices A, B y C



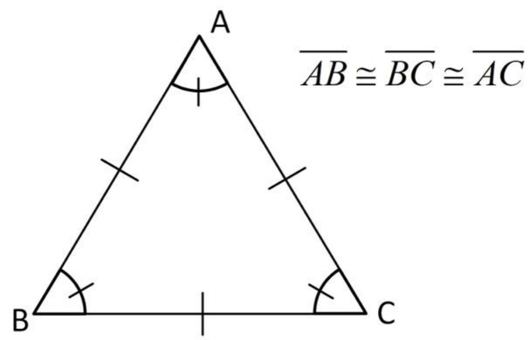
Fuente: Imagen propia

Los triángulos se pueden clasificar por la relación en cuanto a la longitud de sus lados.

3.6.1. Clasificación de los triángulos por sus lados

Triángulo equilátero. Es un triángulo cuyos tres lados son congruentes entre sí, es decir, la longitud de cada uno de sus lados es igual. En la figura 3.48 se representa un triángulo equilátero. Observa que en los lados aparecen unas marcas iguales, esto indica que lados son congruentes. Todos los triángulos equiláteros también son equiángulos, esto es, sus tres ángulos internos son congruentes, pueden también marcarse los ángulos congruentes.

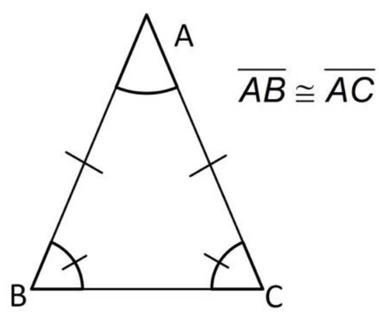
Figura 3.48 Representación de un triángulo equilátero



Fuente: Imagen propia

Triángulo isósceles. Es un triángulo que posee únicamente dos lados congruentes. Al lado que no es congruente con los otros se le llama base. Los triángulos isósceles tienen dos ángulos congruentes y se llaman ángulos de la base dada su relación con la base como lado común. Al ángulo opuesto (enfrente de) a la base se le llama ángulo en el vértice. Ver figura 3.49.

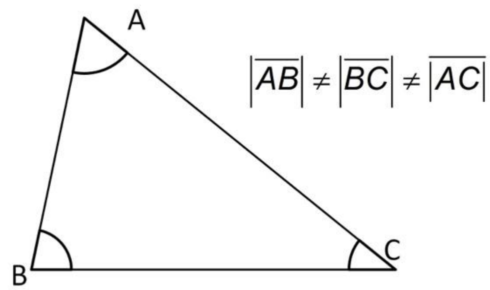
Figura 3.49 Representación de un triángulo isósceles



Fuente: Imagen propia

Triángulo escaleno. Es un triángulo en donde ninguno de sus lados es congruente con los otros dos, esto es, las longitudes de sus tres lados son diferentes. En este tipo de triángulos la medida de sus tres ángulos internos también es distinta. Ver figura 3.50.

Figura 3.50 Representación de un triángulo escaleno



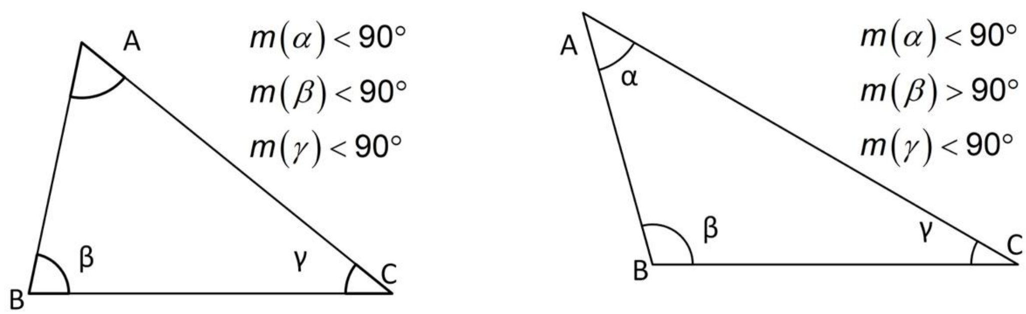
Fuente: Imagen propia

3.6.2. Clasificación de triángulos por sus ángulos

Triángulo oblicuángulo. Es aquel ángulo en el que ninguno de sus ángulos internos es un ángulo recto. A su vez, los triángulos oblicuángulos se pueden clasificar en triángulos acutángulo y obtusángulo. Ver figura 3.51.

Triángulo acutángulo. Es aquel triángulo en el que todos sus ángulos internos son ángulos agudos. En la figura 3.51 es el triángulo de la izquierda.

Figura 3.51 Representación de triángulos oblicuángulos

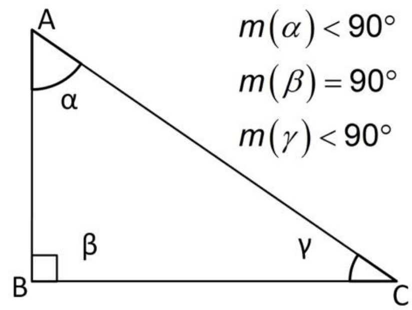


Fuente: Imagen propia

Triángulo obtusángulo. Es aquel triángulo en el que uno de sus ángulos internos es un ángulo obtuso. En la figura 3.51 es el triángulo de la derecha.

Triángulo rectángulo. Es aquel triángulo en el que uno de sus ángulos internos es un ángulo recto. Ver figura 3.52.

Figura 3.52 Representación de un triángulo rectángulo



Fuente: Imagen propia

Ejercicios 3.5

1. Partiendo de un triángulo $\triangle ABC$, determina para cada caso con la información proporcionada, de qué tipo de triángulo se trata.

a) $|\overline{AB}| = 10\ cm, |\overline{BC}| = 11\ cm, |\overline{AC}| = 12\ cm$

b) $m(\angle CBA) = 90^o, |\overline{AB}| = 1\ m, |\overline{BC}| = 3\ m$

c) $|\overline{AB}| = 1.2\ m, |\overline{BC}| = 1.2\ m, |\overline{AC}| = 1.2\ cm$

d) $m(\angle BAC) = 116^o, |\overline{AC}| = 6.9\ cm, |\overline{BC}| = 11.6\ cm$

e) $m(\angle CBA) = 90^o, |\overline{AB}| = 20\ cm, |\overline{BC}| = 20\ cm$

f) $m(\angle CBA) = 80^o, m(\angle BAC) = 70^o, m(\angle ACB) = 30^o$

g) $m(\angle CBA) = 80^o, |\overline{BC}| = 12\ cm, m(\angle ACB) = 80^o$

h) $|\overline{AB}| = 6\ cm, |\overline{BC}| = 6\ cm, |\overline{AC}| = 6\ cm$

Respuestas Ejercicios 3.5

1. **a) triángulo escaleno; b) triángulo rectángulo; c) triángulo isósceles; d) triángulo obtusángulo; e) triángulo rectángulo e isósceles; f) triángulo acutángulo; g) triángulo isósceles; h) triángulo equilátero e isósceles.**

3.7. Teorema de la desigualdad del triángulo

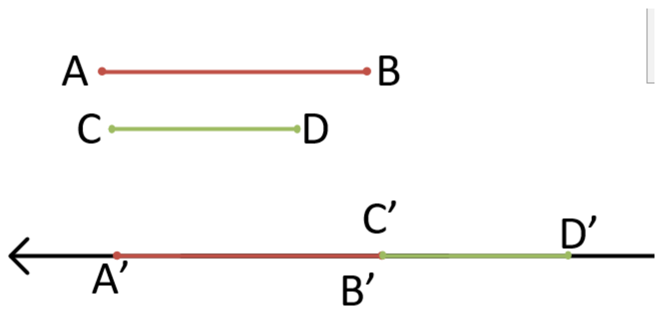
El teorema de la desigualdad del triángulo afirma que: “La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado”. Esto es, si tenemos un $\triangle ABC$ se cumplen las siguientes desigualdades:
$|\overline{BC}| < |\overline{AB}| + |\overline{AC}|$; $|\overline{AB}| < |\overline{AC}| + |\overline{BC}|$ y $|\overline{AC}| < |\overline{BC}| + |\overline{AB}|$.

No realizaremos una demostración rigurosa, pero podemos ver de manera intuitiva a que se refiere este teorema. Para ello partamos de tres segmentos con longitudes diferentes, los nombraremos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, también identificamos a uno de ellos como el de mayor longitud por ejemplo $\overline{EF}$ esto con la finalidad de generalizar el resultado. Tenemos entonces tres posibilidades: que la suma de longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sea menor, igual o mayor que la longitud del segmento $\overline{EF}$. Analicemos los tres casos posibles.

Caso 1: $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| < |\overline{EF}|$

Para poder visualizar este caso aprovechemos una construcción con regla y compás. Supongamos que tenemos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y quisiéramos representar su suma. Para ello tenemos los dos segmentos en posiciones diferentes, empleando la construcción para obtener segmentos congruentes (Apartado 3.1.1) reproducimos los segmentos sobre una misma recta indicados como $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$, de manera que el punto B' coincida con el punto C' como se muestra en la figura 3.53. Observa que el segmento resultante lo podemos identificar como el segmento $\overline{A'D'}$, esto quiere decir que, para sumar dos segmentos, estos deben de estar alineados sobre una misma línea recta.

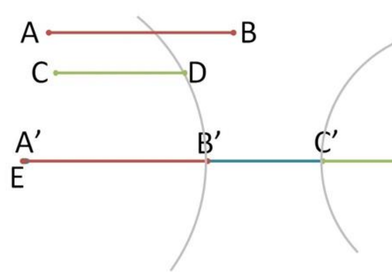
Figura 3.53 Representación de la suma de dos segmentos



Fuente: Imagen propia

Ahora bien, comparemos la suma de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre otro segmento mayor $\overline{EF}$ aplicando el mismo procedimiento anterior, solo que ahora reproduciremos los segmentos de manera que uno de los puntos extremos de cada segmento $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ coincida con uno de los extremos de $\overline{EF}$ como se muestra en la figura 3.54. Si con el compás trazamos dos arcos con centros en A' y D' y aberturas iguales a las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ veremos que estos arcos no se cortan, por lo que no es posible que estos tres segmentos puedan formar un triángulo.

Figura 3.54 Construcción del caso 1 $|\overline{\mathbf{AB}}| + |\overline{\mathbf{CD}}| < |\overline{\mathbf{EF}}|$

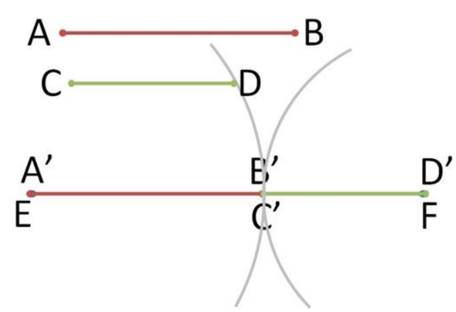


Fuente: Imagen propia

Caso 2: $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| = |\overline{EF}|$

Veamos ahora qué sucede si la suma de los segmentos es igual a un tercer segmento. De manera similar al caso anterior reproducimos dos segmentos congruentes con $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre el segmento $\overline{EF}$, lo que se representa en la figura 3.55. Observa que los arcos se encuentran en un punto que corresponde con la intersección con el segmento $\overline{EF}$. Se observa que no se forma un triángulo ya que los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ quedan encima del segmento $\overline{EF}$.

Figura 3.55 Construcción del caso 2 $|\mathbf{\overline{AB}}| + |\mathbf{\overline{CD}}| = |\mathbf{\overline{EF}}|$

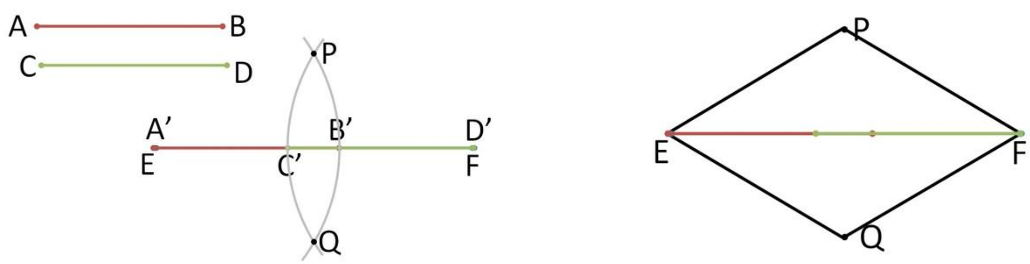


Fuente: Imagen propia

Caso 3: $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| > |\overline{EF}|$

Para este último caso al reproducir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre el segmento $\overline{EF}$ los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ quedan traslapados, por lo que al trazar los arcos se cortan en dos puntos P y Q. Ver figura 3.56. Se observa que ahora sí se forman dos triángulos $\triangle EPF$ y $\triangle FQE$. A diferencia de los casos anteriores, este es el único caso en el que la construcción sí forma un triángulo. Considerando esto, podemos afirmar que, para poder construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera, la longitud de cada segmento debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Figura 3.56 Construcción del caso 3 $|\mathbf{\overline{AB}}| + |\mathbf{\overline{CD}}| > |\mathbf{\overline{EF}}|$



Fuente: Imagen propia

Ejemplos:

1. Supongamos que tenemos tres segmentos con las siguientes longitudes $|\overline{AC}| = 8\ m$, $|\overline{CD}| = 13\ m, |\overline{EF}| = 7\ m,$ comprobaremos si es posible trazar un triángulo con estos segmentos por lado. Planteamos la desigualdades $8\ m < 13\ m + 7\ m$; $13\ m < 8\ m + 7\ m$ y $7\ m < 8\ m + 13\ m$, observa que en todos los casos se cumplen que cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.
2. Ahora comprobaremos qué sucede con los siguientes segmentos si sus longitudes son $|\overline{PQ}| = 11\ m$, $|\overline{ST}| = 8\ m, |\overline{MN}| = 2\ m$ .Planteamos las desigualdades $8\ m < 11\ m + 2\ m$, $2\ m < 11\ m + 8\ m$, $11\ m > 2\ m + 8\ m$. Observemos que la última implica que un segmento es mayor que la suma de los otros dos, por lo que no es posible trazar un triángulo cuyos lados correspondan con las longitudes de estos segmentos.

Ejercicios 3.6

1. Considera las siguientes ternas de segmentos y determina si es posible trazar un triángulo cuyos lados correspondan con los segmentos.

a) $|\overline{AB}| = 10\ cm, |\overline{CD}| = 11\ cm, |\overline{EF}| = 12\ cm$

b) $|\overline{AB}| = 20\ cm, |\overline{CD}| = 21\ cm, |\overline{EF}| = 40\ cm$

c) $|\overline{AB}| = 1\ m, |\overline{CD}| = 2\ m, |\overline{EF}| = 3\ m$

d) $|\overline{AB}| = 1.5\ m, |\overline{CD}| = 2.5\ m, |\overline{EF}| = 4.5\ m$

e) $|\overline{AB}| = 120\ m, |\overline{CD}| = 45\ m, |\overline{EF}| = 85\ m$

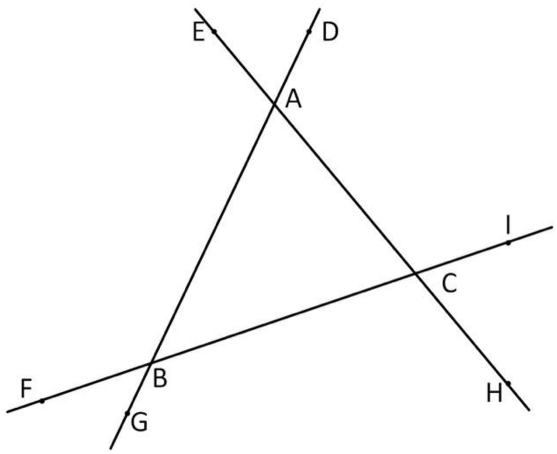
Respuestas Ejercicios 3.6

1. a) Sí es posible; b) Sí es posible; c) No es posible $\mathbf{3\ m = 2\ m + 1\ m}$; d) No es posible $\mathbf{4.5\ m > 1.5\ m + 2.5\ m}$; e) Si es posible.

3.8. Ángulos de un triángulo

De acuerdo con la definición del ángulo que se revisó en el apartado 3.1, en donde se considera que cada ángulo tiene una región interna y externa, podemos decir que, en un triángulo, el solapamiento de las regiones internas de sus tres ángulos conforma la región interna del triángulo. Por lo anterior, a estos ángulos se les conoce como ángulos internos. El ángulo que forma la prolongación de un lado del triángulo con el lado adyacente se conoce como ángulo externo. Bajo esta definición, se pueden formar seis ángulos externos, dos para cada vértice. Sin embargo, los dos ángulos externos que se forman en cada vértice son congruentes al ser opuestos por el vértice. Por lo tanto, se reduce el número a sólo tres ángulos externos, tomando sólo uno para cada vértice. Ver figura 3.57.

Figura 3.57 Ángulos internos y externos del triángulo $\triangle \mathbf{ABC}$



Ángulos internos

$\angle \mathbf{BAC}$, $\angle \mathbf{ACB}$, $\angle \mathbf{CBA}$

Ángulos externos

$\angle \mathbf{EAB} \cong \angle \mathbf{CAD}$

$\angle \mathbf{ICA} \cong \angle \mathbf{BCH}$

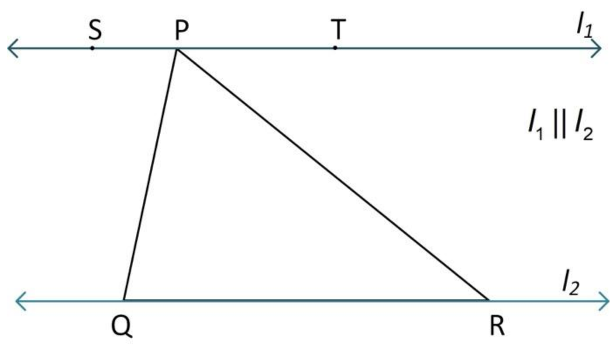
$\angle \mathbf{GBC} \cong \angle \mathbf{ABF}$

Fuente: Imagen propia

3.8.1. Suma de los ángulos internos de un triángulo

Vamos a deducir el valor de la suma de los ángulos interiores. Para ello nos apoyamos de la construcción que se muestra en la figura 3.58. Partimos de un triángulo cualquiera que nombramos $\triangle PQR$ con ángulos internos $\angle QPR$, $\angle PRQ$ y $\angle RQP$. Trazamos dos líneas auxiliares, una línea recta auxiliar *l₁* y dos puntos sobre esta, S y T. Esta línea recta es paralela a la línea recta *l₂* que contiene a la base $\overline{QR}$.

Figura 3.58 Deducción de la suma de ángulos internos de un triángulo



Fuente: Imagen propia

De acuerdo con lo trabajado en el apartado 3.3 y 3.4 dado que $l_1 \parallel l_2$ y los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ actúan como transversales se tiene que, $\angle RQP \cong \angle SPQ$ y $\angle RPT \cong \angle PRQ$, por ser ángulos alternos internos ahora bien observemos también que los ángulos

$\angle SPQ$, $\angle QPR$ y $\angle RPT$ son consecutivos con el punto P como vértice común y que la suma de los tres es congruente con un ángulo llano, podemos expresar esto de la siguiente forma:

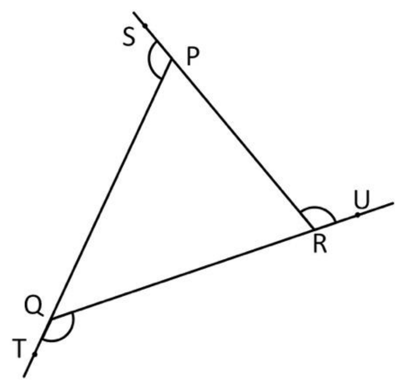
$m(\angle SPQ) + m(\angle QPR) + m(\angle RPT) = 180^o$

sustituyendo $\angle SPQ$ y $\angle RPT$ por los ángulos congruentes correspondientes tenemos que $m(\angle RQP) + m(\angle QPR) + m(\angle PRQ) = 180^o$. Es decir, la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es congruente con un ángulo llano y da como resultado 180°. De esta forma si conocemos la medida de dos ángulos internos de cualquier triángulo podemos determinar la medida del tercero.

3.8.2. Suma de los ángulos externos de un triángulo

Para poder generalizar el resultado de sumar los ángulos externos de un triángulo vamos a apoyarnos de la construcción que se muestra en la figura 3.59.

Figura 3.59 Ángulos externos del triángulo



Fuente: Imagen propia

En esta podemos identificar al triángulo $\triangle PQR$ y sus ángulos externos como $\angle SPQ$, $\angle TQR$ y $\angle URP$. Observa que, para cada ángulo externo, tenemos un ángulo interno adyacente. Observa también que los ángulos son suplementarios por lo que:

$m(\angle SPQ) + m(\angle QPR) = 180^o$

$m(\angle TQR) + m(\angle RQP) = 180^o$

$m(\angle URP) + m(\angle PRQ) = 180^o$

Si sumamos las tres parejas tenemos

$m(\angle SPQ) + m(\angle QPR) + m(\angle TQR) + m(\angle RQP) + m(\angle URP) + m(\angle PRQ) = 3(180^o)$

reordenando tenemos

$m(\angle SPQ) + m(\angle URP) + m(\angle TQR) + m(\angle RQP) + m(\angle QPR) + m(\angle PRQ) = 3(180^o)$

pero del apartado anterior sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180° esto es $m(\angle RQP) + m(\angle QPR) + m(\angle PRQ) = 180^o$ por lo que sustituyendo tenemos

$m(\angle SPQ) + m(\angle URP) + m(\angle TQR) + 180^o = 3(180^o)$

simplificando tenemos
$m\left(\angle SPQ\right)+m\left(\angle URP\right)+m\left(\angle TQR\right)=2\left(180^{o}\right)$
lo que nos indica que la suma de las medidas de los ángulos externos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos llanos o 360°.

3.8.3. Relación entre el ángulo externo y los dos ángulos internos no adyacentes

En la sección anterior establecimos que cada ángulo externo del triángulo rectángulo tiene asociado un ángulo interno del cual es suplementario. Revisemos ahora cual es la relación entre cada ángulo externo y los otros dos ángulos internos no adyacentes. Utilizando la figura 3.59 tomemos de referencia el ángulo $\angle SPQ$, el cual es suplemento del ángulo $\angle QPR$, por lo que podemos establecer la siguiente igualdad:
$m\left(\angle SPQ\right)+m\left(\angle QPR\right)=180^{o}$
ahora bien, sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es también de 180° por lo que tenemos:
$m\left(\angle RQP\right)+m\left(\angle QPR\right)+m\left(\angle PRQ\right)=m\left(\angle SPQ\right)+m\left(\angle QPR\right)$
simplificando tenemos
$m\left(\angle RQP\right)+m\left(\angle PRQ\right)=m\left(\angle SPQ\right)$.
Esto significa que la medida del ángulo externo es igual a la suma de la medida de dos ángulos internos no adyacentes. Algo similar podemos aplicar para los otros dos ángulos externos.

Ejemplos:

1. Determine la medida de $\angle RQP$ de la figura 3.59 si $m(\angle QPR)=50^{o}$ y $m(\angle URP)=95^{o}$.
$m(\angle URP)=m(\angle QPR)+m(\angle RQP)$ por la relación entre un ángulo externo y los ángulos externos no adyacentes. Despejando $m(\angle RQP)$ tenemos
$m(\angle RQP)=m(\angle URP)-m(\angle QPR)$ sustituyendo tenemos
$m(\angle RQP)=95^{o}-50^{o}=45^{o}$
2. Determine la medida de los ángulos externos de $\triangle PQR$ de la figura 3.59 si $m(\angle RQP)=40^{o}$ y $\angle QPR\cong\angle PRQ$.
Del teorema de la suma de ángulos internos tenemos
$m(\angle RQP)+m(\angle QPR)+m(\angle PRQ)=180^{o}$
pero dado que $\angle QPR\cong\angle PRQ$ implica que $m(\angle QPR)=m(\angle PRQ)$ por lo que podemos simplificar
$m(\angle RQP)+2m(\angle QPR)=180^{o}$
despejando $m(\angle QPR)$

$m(\angle QPR)=\dfrac{180^o-m(\angle RQP)}{2}$ sustituyendo $m(\angle RQP)$

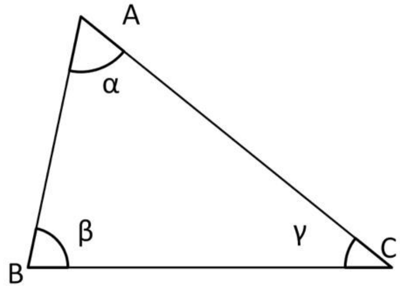
$m(\angle QPR)=\dfrac{180^o-40^o}{2}=\dfrac{140^o}{2}=70^o$ por lo que también $m(\angle PRQ)=70^o$

Dado que los ángulos externos son suplementos de los internos tenemos
$m(\angle URP)=110^o; m(\angle SPQ)=110^o; m(\angle TQR)=140^o$

Ejercicios 3.7

1. Determina el valor de la medida del ángulo β que se muestra en la figura 3.60 si m(α)=30° y m(γ)=80°

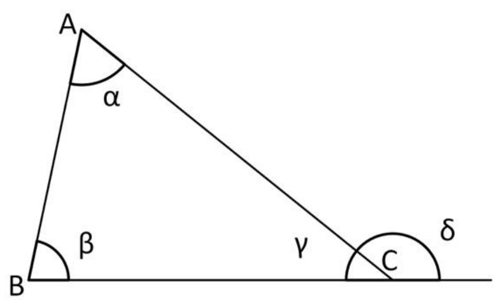
Figura 3.60 Ejercicio 3.7.1



Fuente: Imagen propia

2. Determina el valor de la medida del ángulo δ que se muestra en la figura 3.61 si m(α)=63° y m(β)=52°

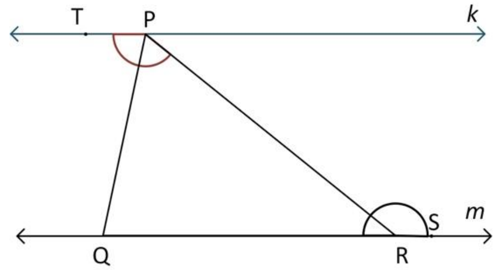
Figura 3.61 Ejercicio 3.7.2



Fuente: Imagen propia

3. Determina el valor de las medidas de $\angle QPR$ y $\angle PRQ$ que se muestra en la figura 3.62 si $m(\angle SRP)=132^o$, $m(\angle TPQ)=42^o$ y $k \parallel m$

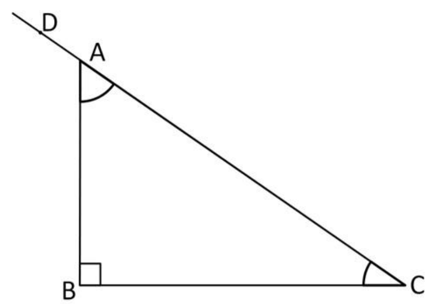
Figura 3.62 Ejercicio 3.7.3



Fuente: Imagen propia

4. Empleando la figura 3.63 y sabiendo que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $m(\angle DAB) = 130^o$ determine el valor de la medida de $\angle ACB$

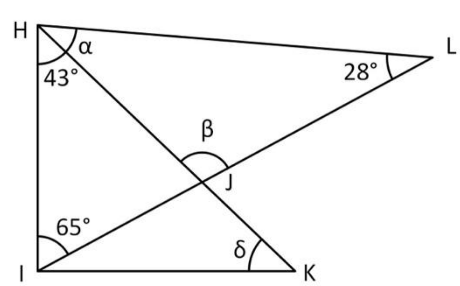
Figura 3.63 Ejercicio 3.7.4



Fuente: Imagen propia

5. Empleando la figura 3.64, determine las medidas de los ángulos α, β y δ si $\overline{HI} \perp \overline{IK}$

Figura 3.64 Ejercicio 3.7.5



Fuente: Imagen propia

Respuestas Ejercicios 3.7

1. **m(β)=70°**

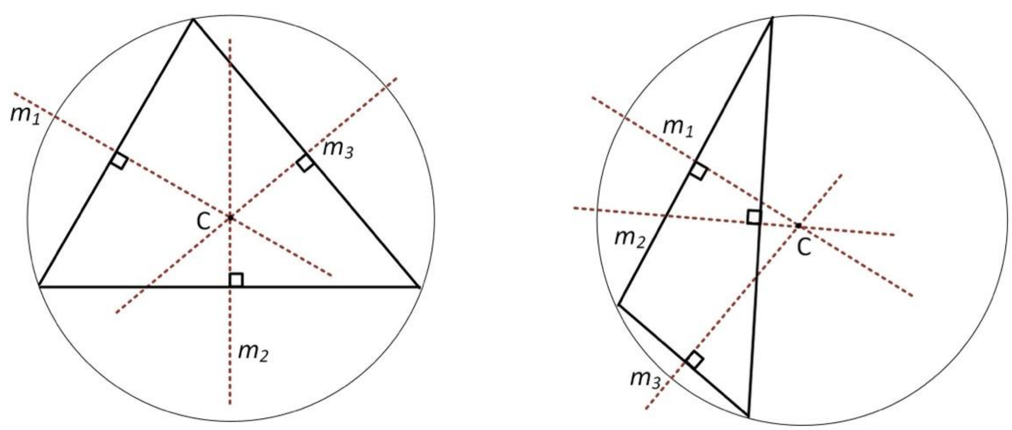
2. **m(δ)=115°**
3. $\mathbf{m(\angle QPR) = 90^o}$ **y** $\mathbf{m(\angle PRQ) = 48^o}$
4. $\mathbf{\angle ACB = 40^o}$
5. **m(α)=44°, m(β)=108°, m(δ)=47°**

3.9. Rectas y puntos notables del triángulo

En un triángulo de manera general existen cuatro tipos de rectas notables que, a su vez, dan paso a cuatro puntos notables. A continuación, definimos cada una de ellas y los puntos que generan.

Mediatrices y circuncentro de un triángulo. Ya en el apartado 3.1.3 habíamos definido la mediatriz de un segmento como una recta que lo corta perpendicularmente justo por la mitad (punto medio). Los lados del triángulo son tres segmentos y a cada segmento se le puede asociar una mediatriz. Las tres mediatrices que pueden trazarse para un triángulo son concurrentes, esto significa que se intersecan en un mismo punto. Este punto se llama **circuncentro.** El nombre obedece a que, con centro en este punto, podemos trazar una circunferencia *circunscrita* al triángulo que pase por los tres vértices.
En la figura 3.65 se muestran las tres mediatrices m_1, m_2, m_3 y el circuncentro C para dos de los tres casos posibles donde es posible hallar el circuncentro en la región interna o externa del triángulo. También es posible que el circuncentro quede sobre uno de los lados del triángulo.

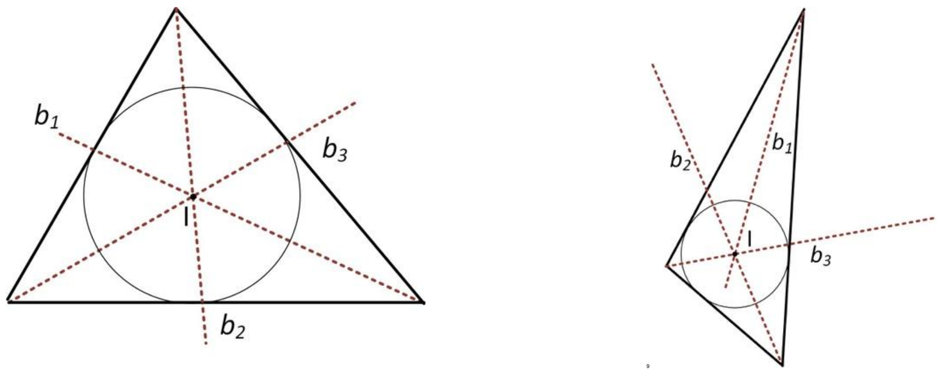
Figura 3.65 Mediatrices m_1, m_2, m_3, y circuncentro C de un triángulo.



Fuente: Imagen propia

Bisectrices e incentro de un triángulo. De acuerdo a lo revisado en el apartado 3.1.4 la bisectriz es una semirrecta que divide un ángulo en dos partes iguales, decimos lo biseca, dado que el triángulo tiene tres ángulos interiores y cada uno tiene su bisectriz asociada, tenemos tres bisectrices concurrentes en la región interna del triángulo. Al punto de intersección de las tres bisectrices se le conoce como **incentro**, debido a que este punto es el centro de una circulo inscrito del triángulo. A diferencia del circuncentro el incentro siempre queda en la región interna del triángulo. Ver figura 3.66.

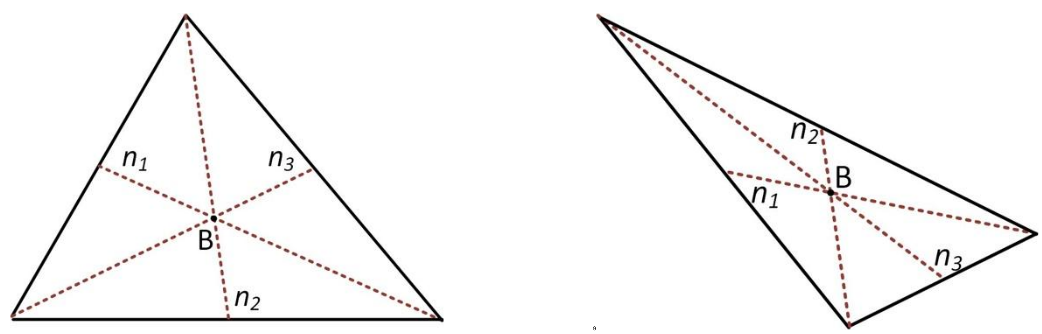
Figura 3.66 Bisectrices b_1, b_2, b_3, e incentro I de un triángulo.



Fuente: Imagen propia

Medianas y baricentro de un triángulo. Propiamente las medianas no líneas recta o semirrectas pero se agrupan dentro de las rectas notables. La mediana es un segmento que se encuentra en la región interna del triángulo y corta un vértice del mismo y el punto medio del lado opuesto al vértice. De esta forma un triángulo tiene tres medianas asociadas y estas son concurrentes. Al punto donde concurren las tres medianas se le llama baricentro[3].

Figura 3.67 Medianas n_1, n_2, n_3, y Baricentro B de un triángulo.



Fuente: Imagen propia

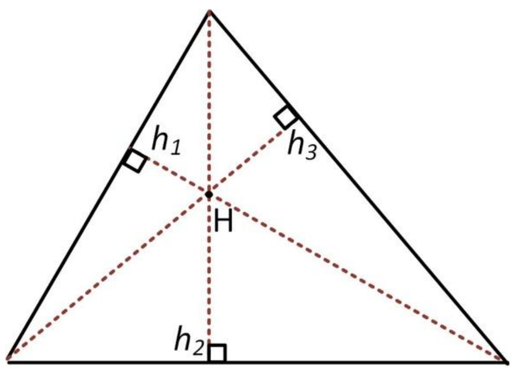
El baricentro al igual que el incentro queda siempre en la región interna del triángulo. En la figura 3.67 se muestran dos ejemplos.

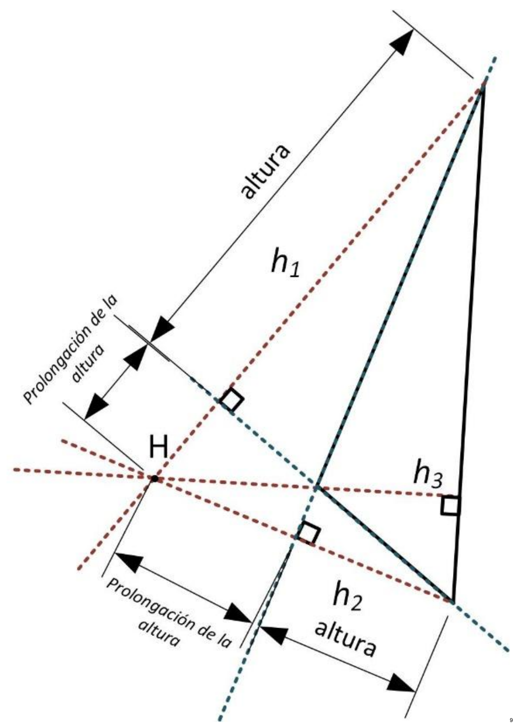
Alturas y ortocentro de un triángulo. Una altura del triángulo es el segmento que une un vértice del triángulo con una recta que contiene al lado opuesto a este.

3 En algunos textos también puede aparecer como centroide o *centro de gravedad*.

Además, este segmento es perpendicular al lado que corta, al lado se le considera la base con respecto a esa altura. Esta definición implica que el segmento no necesariamente corta al lado del triángulo, pero sí a una prolongación de este. Los triángulos tienen tres alturas, estas o sus prolongaciones siempre son concurrentes. Eso último significa que los segmentos se pueden cortar en la región interna del triángulo o sus prolongaciones se pueden cortar en una región externa al triángulo, en la figura 3.68 se muestran estos dos casos, puede observarse que si el triángulo es acutángulo el ortocentro queda en la región interna del triángulo. Si el triángulo es obtusángulo el ortocentro queda en la región externa, observa que en este caso es la prolongación de las alturas la que es concurrente. También se puede dar el caso que quede sobre uno de los vértices del triángulo.

Figura 3.68 Alturas *h₁, h₂, h₃,* y ortocentro H de un triángulo.





Fuente: Imagen propia

Ejercicios 3.8

1. Relacione ambas columnas escribiendo en el apartado correspondientes la letra que corresponda a cada inciso de acuerdo con el concepto y su definición

1. Altura ( )	**a.** Es la línea recta que corta perpendicularmente a un segmento por el punto medio de este.
2. Mediana ( )	**b.** Es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes.

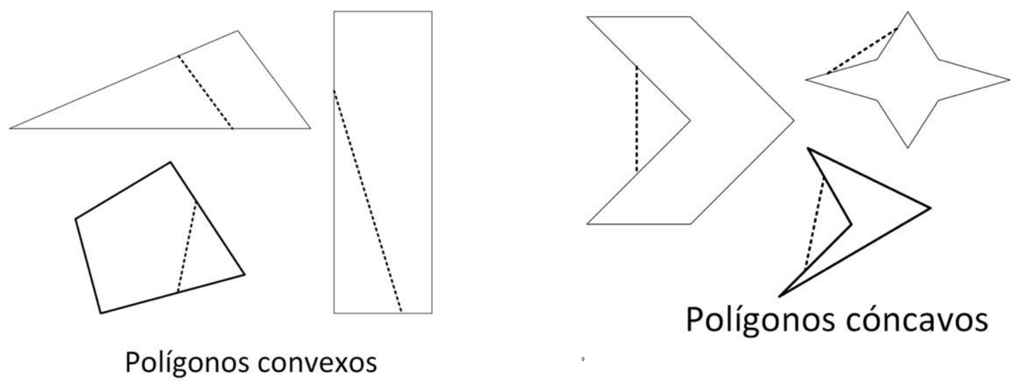
3. Mediatriz ( )	**c.** Es el punto de concurrencia de las alturas.
4. Punto Medio ( )	**d.** Es el punto de concurrencia de las medianas.
5. Bisectriz ( )	**e.** Es el segmento que siempre une el vértice de un triángulo, con el punto medio del lado opuesto.
6. Ortocentro ( )	**f.** Es el segmento que siempre une perpendicularmente un vértice con la recta que contiene al lado opuesto de un triángulo.
7. Baricentro ( )	**g.** Es el punto sobre un segmento que es equidistante a los puntos extremos de este.
8. Incentro ( )	**h.** Condición que describe cuando una figura geométrica se encuentra completamente dentro de otra.
9. Circuncentro ( )	**i.** Es el punto donde se intersecan las tres mediatrices de los lados de un triángulo.
10. Inscrito ( )	**j.** Punto donde se encuentra el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

Respuestas Ejercicios 3.8
1.(f); 2.(e); 3.(a); 4(g); 5.(b); 6.(c); 7.(d); 8.(j); 9.(i); 10.(h)

3.10. Polígonos

Un polígono es una figura geométrica plana y cerrada cuyos lados se forman por al menos tres segmentos de recta que se cortan en los puntos extremos llamados vértices del polígono. Existen dos tipos de polígonos: los polígonos convexos que son polígonos cuyos ángulos internos tienen medias entre 0° y 180°, también podemos identificarlos ya que si traza un segmento de recta que una dos puntos (que no sean vértices) sobre lados consecutivos del segmento queda en la región interna esta región se le llama región poligonal. Por otro lado, los polígonos cóncavos tienen la característica de que si trazamos un segmento que los una en dos puntos en cuando menos dos pares de lados consecutivos el segmento queda en la región externa. Otra forma de verlo es que cuando menos la medida de algún ángulo internos es mayor a 180°. En la figura 3.69 se muestran ejemplos de estos ángulos.

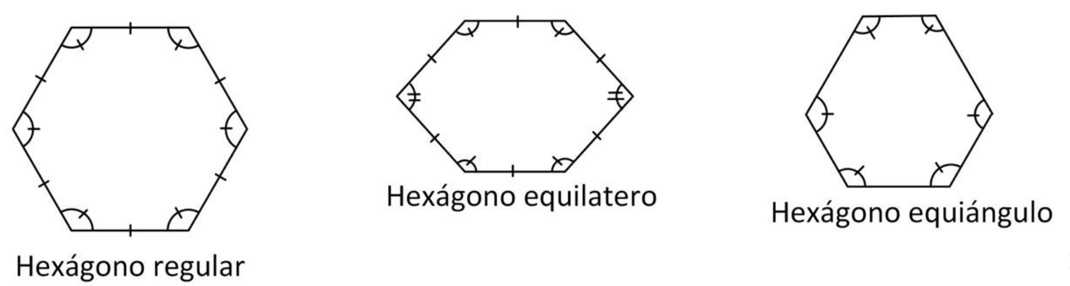
Figura 3.69 Polígonos convexos y cóncavos



Fuente: Imagen propia

Dentro de los polígonos convexos tenemos a los polígonos regulares que son polígonos cuyos lados y ángulos internos son congruentes entre sí, en la figura 3.63 se muestra un hexágono (seis lados) regular, las marcas señalan la congruencia de lados y ángulos internos. En caso de no cumplir con ambas características se les llama polígonos irregulares, en la figura 3.70 se muestran dos ejemplos de polígonos irregulares; uno es un hexágono equilátero (tienes sus seis lados congruentes, pero no es equiángulo ya que dos de los ángulos no son congruentes con los otros cuatro) y el otro es un hexágono equiángulo (todos sus ángulos internos son congruentes, pero no todos los ángulos son congruentes entre sí).

Figura 3.70 Ejemplo de un polígono regular y dos polígonos irregulares

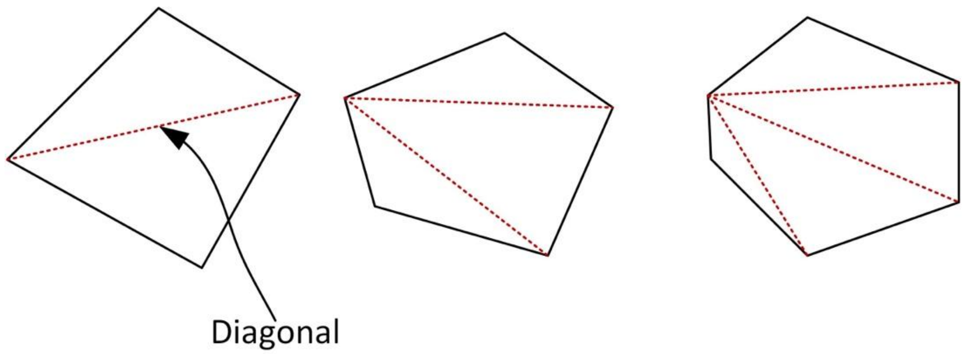


Fuente: Imagen propia

3.10.1. Suma de ángulo internos de un polígono

Partiremos de tres polígonos convexos para poder ilustrar el proceso de obtención de la suma de ángulos internos y facilitar el conjeturar para polígonos regulares o de más lados. Lo primero que haremos será trazar segmentos internos que partan de un vértice y se unan con vértices no consecutivos a este como se muestra en la figura 3.71. A estos segmentos se le llama diagonales del polígono. Puede observarse que conforme aumenta el número de lados aumenta el número de diagonales que se pueden trazar con respecto a un vértice.

Figura 3.71 Diagonales de un polígono



Fuente: Imagen propia

Cabe señalar que no se muestran todas las diagonales del polígono solo las que cortan un vértice en específico. Se puede observarse también que aparece un patrón el cual puede visualizarse más fácil en la Tabla 3.1 .

Tabla 3.1 Relación entre el número de lados de un polígono, diagonales que cortan un vértice y triángulos en los que se descompone

Numero de lados del polígono	Número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice	Número mínimo de triángulos en los que se puede descomponer el polígono
4	1	2
5	2	3
6	3	4
n	n-3	n-2

Con ayuda de la tabla podemos ver que, para obtener las diagonales que cortan un vértice en específico, basta con restar tres unidades al número de lados del polígono. Apoyándonos de la figura 3.71, observa que al trazar las diagonales podemos descomponer la región poligonal en regiones más pequeñas que corresponden a regiones triangulares, esto es, podemos dividir cualquier polígono en un número mínimo de triángulos, tal número equivale a restar dos unidades al número de polígonos. Ver tabla 3.1. Para determinar la suma de ángulos interiores de cualquier polígono vamos a aprovechar un teorema previo que habíamos deducido en el apartado 3.7.1 referente a la suma de los ángulos internos de un triángulo. Cómo se había afirmado en tal apartado la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es de 180°. Ahora bien, como cualquier polígono se puede descomponer en un número mínimo de triángulos la suma de los ángulos internos de cualquier polígono es equivalente al número mínimo de triángulos en los que se puede descomponer multiplicado por 180°, esto lo podemos expresar simbólicamente como $S = 180^0\,(n-2)$ donde *S* representa la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono y *n r*epresenta el número de lados del polígono. En el caso de un polígono equiángulo o regular, dado que todos los ángulos son congruentes podemos determinar cuál es el valor de la medida de los ángulos internos obteniendo el cociente $\frac{S}{n}$.

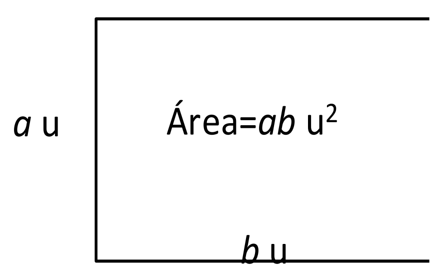
3.10.2. Perímetro de un polígono

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. Para el caso de un polígono equilátero o regular dado que los lados son congruentes la suma puede simplificarse a $P_n = nL$ donde P_n es el perímetro, n es el número de lados del polígono y L es la longitud del lado. Es importante considerar las unidades que se utilicen de referencia ya que para poder calcular el perímetro todas las longitudes deben establecerse con la misma unidad. No olvides expresar tu resultado incluyendo las unidades empleadas de referencia.

3.10.3. Área de un polígono

Cuando hacemos referencia al área, nos referimos a la asignación de un número real positivo a la región poligonal, esto es podemos medir su superficie con respecto a una superficie de referencia. Para el caso de un rectángulo que es un polígono equiángulo con ángulos internos cuya medida es de 90°, el área viene definida por el producto de dos de sus lados. Por ejemplo, si tenemos rectángulo que tiene lados de longitud a unidades y b unidades el área de este es ab unidades cuadradas. Ver figura 3.72

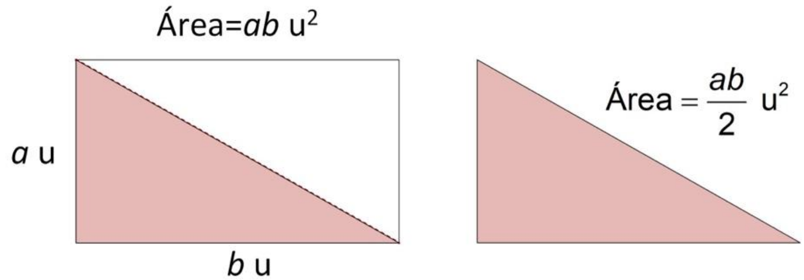
Figura 3.72 Área de un rectángulo



Fuente: Imagen propia

Partiendo de esta definición podemos determinar el área de un triángulo que podemos obtener de la diagonal del rectángulo anterior. Ver figura 3.73.

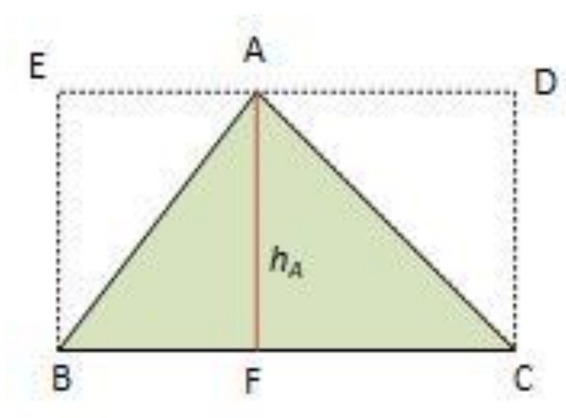
Figura 3.73 Área de un triángulo



Fuente: Imagen propia

Aunque no haremos una demostración rigurosa en este momento puede observar que se forman dos triángulos rectángulos congruentes (sus lados y ángulos correspondientes son congruentes), es fácil concluir que entonces el triángulo tiene la mitad del área del rectángulo original. Observemos que en el caso de triángulo rectángulo los lados *a* y *b* corresponden a dos lados perpendiculares entre si, aprovechando la definición de altura del apartado 3.8 asignamos a *a* la altura y a *b* la base del triángulo en cuestión por lo que obtenemos la famosa fórmula para calcular el área de un triángulo. Lo interesante de esto es que la fórmula funciona para cualquier triángulo no sólo para triángulos rectángulo. Supongamos que tenemos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ como el que se muestra en la figura 3.74 y que trazamos su altura h_A.

Figura 3.74 Área de un triángulo acutángulo $\triangle \mathbf{ABC}$



Fuente: Imagen propia

Si trazamos algunos segmentos auxiliares $\overline{BE}$, $\overline{CD}$ perpendiculares a la base $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$ paralelo a la base $\overline{BC}$ y que corta el punto A, se construyen los rectángulos, $\square BCDE$, $\square AEBF$ y $\square AFCD$, observa que el área del triángulo $\triangle ABC$ lo podemos expresar como:

$\acute{a}rea(\triangle ABC) = \acute{a}rea(\triangle ABF) + \acute{a}rea(\triangle AFC)$

pero las áreas de los triángulos $\triangle ABF$ y $\triangle AFC$ los podemos expresar en términos del área de los rectángulos $\square AEBF$ y $\square AFCD$

$\acute{a}rea(\triangle ABF) = \dfrac{\acute{a}rea(\square AEBF)}{2}$ y $\acute{a}rea(\triangle AFC) = \dfrac{\acute{a}rea(\square AFCD)}{2}$

sustituyendo en el $\acute{a}rea(\triangle ABC)$ tenemos

$$\acute{a}rea(\triangle ABC) = \frac{\acute{a}rea(\square AEBF)}{2} + \frac{\acute{a}rea(\square AFCD)}{2}$$

simplificando tenemos

$$\acute{a}rea(\triangle ABC) = \frac{\acute{a}rea(\square AEBF) + \acute{a}rea(\square AFCD)}{2}$$

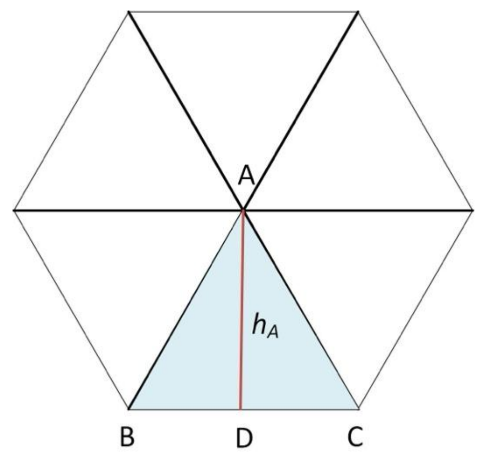
pero de acuerdo con la construcción mostrada en figura 3.74 $\acute{a}rea(\square AEBF) + \acute{a}rea(\square AFCD) = \acute{a}rea(\square BCDE)$ sustituyendo tenemos

$$\acute{a}rea(\triangle ABC) = \frac{\acute{a}rea(\square BCDE)}{2}$$

de esta manera el área del triángulo es igual a la mitad del área de un rectángulo con lados iguales a la base y la altura del rectángulo, es decir el área del triángulo es igual al producto de la longitud de su altura por la longitud de su base dividido entre dos.

Podemos ahora aplicar este resultado para obtener el área de polígonos regulares, para ello partiremos de un polígono de seis lados (hexágono) pero el proceso puede generalizarse para cualquier polígono regular. En la figura 3.75 se muestra la descomposición del hexágono en 6 triángulos con vértice común en el centro del hexágono punto A. Ahora bien, si consideramos que el punto A es el centro geométrico y que este se encuentra a la misma distancia de los seis vértices del hexágono los triángulos que se forman son triángulos isósceles. Al tratarse de un polígono regular los lados que corresponden a las bases de los triángulos isósceles son también congruentes entre sí, por lo que todos los triángulos en la región poligonal son congruentes bajo estas condiciones. Se ha sombreado uno de los triángulos y se ha trazado su altura h_A y la longitud de su base $\overline{BC}$ la representamos como *l* ,de acuerdo a lo que se ha obtenido anteriormente el área de triángulo es igual al producto de su base *l* por la altura h_A divido entre dos, por lo que para calcular el área del hexágono multiplicamos por seis el área del triángulo sombreado ya que todos los triángulos tienen el mismo valor de área.

Figura 3.75 Descomposición de un polígono regular en triángulo congruentes



Fuente: Imagen propia

El área entonces queda

$S_6 = 6\left(\frac{h_A l}{2}\right)$ donde S_6 es el área del hexágono, n es el número de lados.

Ahora bien si se tratará de un polígono de *n* lados entonces queda

$$S_n = n\left(\frac{h_a l}{2}\right)$$

En muchos textos la altura h_A recibe el nombre de *apotema* que se define como el segmento de un polígono regular que uno el centro del polígono con el punto medio de cualquiera de los lados. Reordenando los elementos tenemos

$S_n = \frac{nlh_a}{2}$ pero al ser un polígono regular el producto *nl* es igual al perímetro del polígono P_n por lo que también podemos expresar el área del polígono como:

$S_n = \frac{P_n h_A}{2}$ que es la famosa fórmula perímetro por apotema sobre dos.

Las expresiones que acabamos de obtener pueden aplicarse siempre y cuando se trate de un polígono regular. Para el caso de un polígono irregular el proceso consiste en descomponer el polígono en el número mínimos de triángulos y sumar al final el área de cada triángulo obtenido. Ver figura 3.71. Muchas veces no se conoce el dato de la altura de todos los triángulos, pero si conocemos sus lados. Para calcular el área de un triángulo conociendo la longitud de sus lados empleamos la fórmula de Herón que se expresa de la siguiente forma:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde S es el área del triángulo, a, b y c son las longitudes de sus lados y p es el semiperímetro del triángulo es cual representa la mitad del perímetro del triángulo por lo que se calcula de la siguiente forma:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Veamos un ejemplo:
Calcular el área de un triángulo cuyas longitudes de los lados son a =7 cm, b= 8 cm y c = 11 cm. Primero calculamos el semiperímetro de este triángulo.

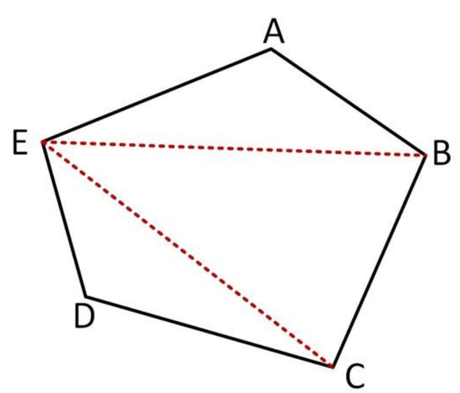
$$p=\frac{(7+8+11)cm}{2}=\frac{26cm}{2}=13cm$$

sustituimos ahora en la fórmula de Herón

$$S=\sqrt{13cm(13-7)cm(13-8)(13-11)cm}=\sqrt{13cm(6cm)(5cm)(2cm)}=\sqrt{780cm^4}\approx 27.9cm^2$$

observa que las unidades se manejan como si se tratará de literales algebraicas.
Ahora calculemos el área del polígono que aparece en la figura 3.76 si se conocen el dato de los lados del polígono y algunas diagonales.
Observa que el área del polígono ABCDE es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ y $\triangle ECD$, como sólo tenemos los datos correspondientes a los lados aplicamos la fórmula de Herón.

Figura 3.76 Descomposición de un polígono irregular en triángulos



$$\left|\overline{AB}\right|=15\ u;\left|\overline{BC}\right|=18.6\ u$$
$$\left|\overline{CD}\right|=20.8\ u;\left|\overline{DE}\right|=13\ u$$
$$\left|\overline{EA}\right|=20\ u\left|\overline{EB}\right|=31\ u;$$
$$\left|\overline{EC}\right|=29.7\ u;$$

Fuente: Imagen propia

Para $\triangle ABE$ tenemos

$$p=\frac{(15+31+20)u}{2}=\frac{66u}{2}=33u$$

$$\acute{a}rea(\triangle ABE)=\sqrt{33u(33-15)u(33-31)u(33-20)u}=\sqrt{15444u^4}\approx 124.3u^2$$

Para $\triangle BCE$ tenemos

$$p=\frac{(18.6+29.7+31)u}{2}=\frac{79.3u}{2}=39.65u$$

$$\acute{a}rea(\triangle BCE)=\sqrt{39.65u(39.65-18.6)u(39.65-29.7)u(33-31)u}\approx\sqrt{71834.73u^4}\approx 268u^2$$

Para $\triangle ECD$ tenemos

$$p=\frac{(29.7+20.8+13)u}{2}=\frac{63.5u}{2}=31.75u$$

$$\acute{a}rea(\triangle ABE)=\sqrt{31.75u(31.75-29.7)u(31.75-20.8)u(31.75-13)u}\approx\sqrt{13363.27u^4}\approx 115.6u^2$$

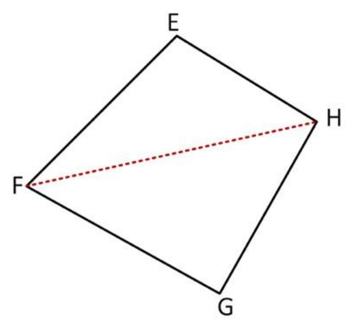
por lo tanto el área del polígono es:

$$S\approx(124.3+268+115.6)u^2\approx 508u^2$$

Ejercicios 3.9

1. Determina el valor de la medida de los ángulos internos de un heptágono regular y un octágono regular.
2. Si un polígono regular tiene como valor de la medida de sus ángulos internos 165.5°. ¿Cuantos lados tiene el polígono?
3. ¿Cuál es el valor de la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono regular si la medida de sus ángulos internos es de 156°?
4. Determine el perímetro y el área de un endecágono regular si la longitud de su lado es de 12 cm y su apotema es de 20.4 cm.
5. Si el área de un pentágono regular es de aproximadamente 172 u² y su apotema es de 6.9 u. Determine la longitud de su lado.
6. Determine el área del polígono irregular de la figura 3.77 si se descompone en triángulos y se conocen los lados de estos.

Figura 3.77 Ejercicio 3.9.6

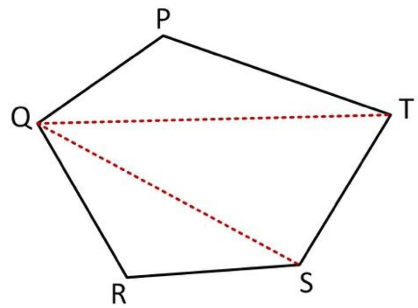


$$|\overline{EF}| = 18\ cm; |\overline{EH}| = 11\ cm$$
$$|\overline{FH}| = 25\ cm; |\overline{HG}| = 20\ cm$$
$$|\overline{FG}| = 19\ cm;$$

Fuente: Imagen propia

7. Se quiere cuantificar el valor de un terreno que tiene forma de un polígono irregular. Un topografo realiza el levantamiento de las medidas que se muestran en la figura 3.78, si cada metro cuadrado tiene un valor de $1245.00

Figura 3.78 Ejercicio 3.9.7



$|\overline{PQ}| = 30\ m; |\overline{QR}| = 40\ m$
$|\overline{RS}| = 40\ m; |\overline{ST}| = 20\ m$
$|\overline{PT}| = 50\ m; |\overline{QT}| = 70\ m$
$|\overline{QS}| = 70\ m;$

Fuente: Imagen propia

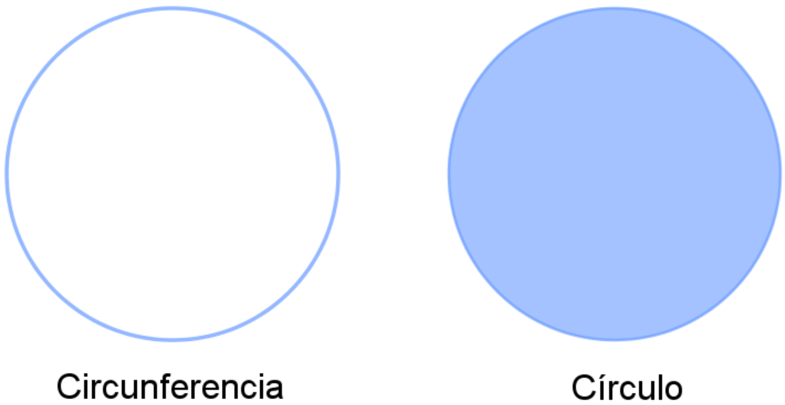
Respuestas Ejercicios 3.9

1. **Medida del ángulo interno del heptágono(7 lados) $\approx$ 128.6°; Medida del ángulo interno de un octágono(8 lados) =135°.**
2. **25 lados**
3. **2340°**
4. $\mathbf{P_{11} = 132\ cm}$**;** $\mathbf{S_{11} \approx 1346.4 cm^2}$
5. $\mathbf{l \approx 10u}$
6. $\mathbf{S \approx 275\ cm^2}$
7. **$2,514,962.25**

3.11. Círculo y circunferencia.

Una circunferencia es una curva plana y cerrada formada por puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. El área limitada por la circunferencia, incluyendo a la propia circunferencia, se llama círculo. Ver Figura 3.79.

Figura 3.79 Circulo y circunferencia



Fuente: Imagen propia

3.11.1. Rectas y segmentos notables de la circunferencia.

Algunos elementos notables de las circunferencias son los siguientes (Ver Figura 3.80):

Centro. Es un punto dentro de la circunferencia, que no forma parte de esta, pero del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.

Radio. Es cualquier segmento que una el centro de la circunferencia con uno de sus puntos. En una circunferencia, la medida del radio es constante.

Cuerda. Es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. Por lo tanto, toda cuerda está siempre dentro de la circunferencia.

Diámetro. Es la cuerda de mayor medida ya que pasa por el centro de la circunferencia. La medida del diámetro es el doble de la longitud del radio.

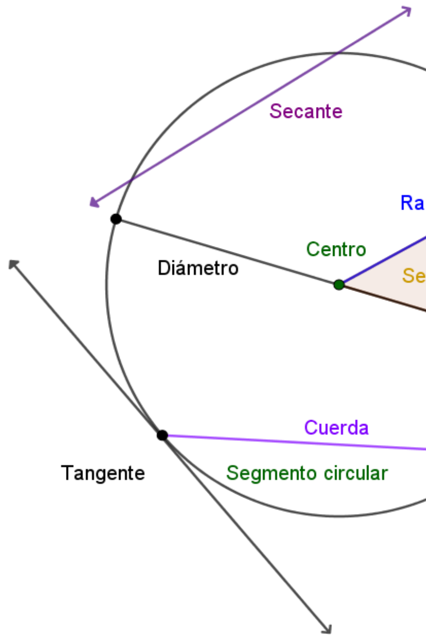
Tangente. Es una recta que interseca en un solo punto a la circunferencia.

Arco. Es una parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos.

Sector circular. Es la región del círculo comprendida entre dos radios y el arco que subtienden.

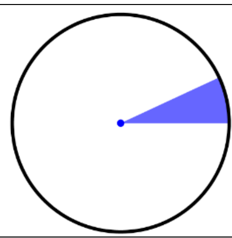
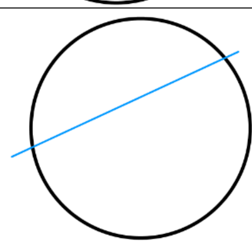
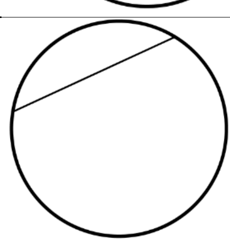
Segmento circular. Es la región del círculo comprendida entre la circunferencia y una cuerda.

Figura 3.80 Elementos de la circunferencia

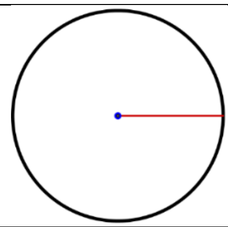
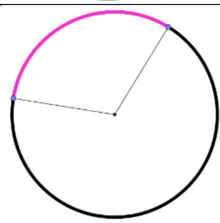
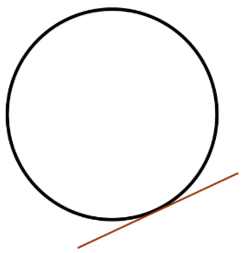


Fuente: Imagen propia

Ejercicio 3.10.1. Relaciona escribiendo al lado izquierdo de las figuras la letra que corresponda al elemento de la circunferencia mostrado.

A	Radio
B	Cuerda
C	Sector circular

D	Secante
E	Tangente
F	Arco

3.11.2. Perímetro y área del círculo

El área delimitada por una circunferencia se calcula mediante la fórmula: $A = \pi r^2$. Mientras que el que, para el perímetro utilizamos $P = 2\pi r$, ya que como sabemos π es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro[4].

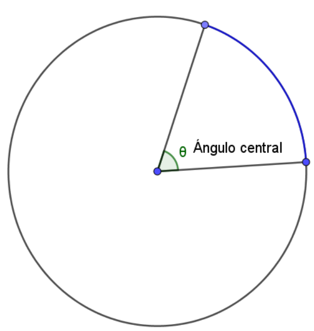
Ejemplo.

Un ángulo central α es subtendido por un arco de 3 cm en un círculo cuya longitud de radio es de 6 cm. ¿Cuál es la medida del ángulo α en grados y en radianes? ¿Cuál es el área del sector circular determinado por el ángulo?

Desarrollo:

Un ángulo central de una circunferencia es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios. Ver Figura 3.81.

Figura 3.81 Ángulo central



Fuente: Imagen propia

4 El diámetro es dos veces el radio que en este caso denotamos como r.

Establecemos la relación $\frac{360°}{2\pi r} = \frac{\alpha}{3}$. Con lo cual calculamos la medida en grados sexagesimales de $\alpha \approx 28°38'$.

Aplicando el factor de conversión $\frac{2\pi}{360°}$ (dado que 360 grados sexagesimales equivalen a 2π radianes) encontramos la medida en radianes del ángulo, la cual llamaremos $\theta = 28°38' \times \left(\frac{2\pi}{360°}\right) = 0.5$.

Considerando en primer lugar la medida del ángulo en radianes, podemos generalizar la proporción $\frac{L}{\theta} = \frac{2\pi r}{2\pi}$, donde L representa la longitud de radio. Despejando para L se obtiene $L = \theta r$.

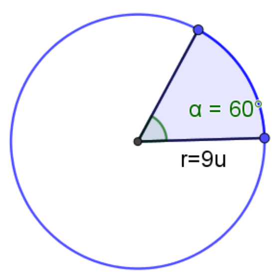
Para calcular el área del sector circular considerando un ángulo en radianes se establece la relación $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{A_s}{\theta}$, despejando el área del sector circular $A_s = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Sustituyendo los valores del problema $A_s = \frac{1}{2}0.5 \times 6^2 = 9$.

Como podemos observar los cálculos se simplifican tomando la medida de los ángulos en radianes.

Ejercicios 3.10.2

1. Si un arco circular de longitud $L = 10$cm subtiende el ángulo central $\theta = 45°$, calcular a) el perímetro y b) el área del círculo que los contiene.
2. Con base en la figura calcular a) la longitud del arco y b) el sector circular del área sombreada.



3. En un carrusel Sofía va en un caballo que está a 3.5 m del centro de una plataforma que gira y Juan va en el león que está a 2 m del centro. ¿Cuál es la diferencia en los metros recorridos por cada uno cuando el carrusel da 15 vueltas?
4. La rueda de un camión tiene 90 cm de radio. ¿Cuántos metros ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 50 vueltas?
5. El perímetro de una circunferencia es 43.96 cm. ¿Cuál es el área del círculo que delimita?

Respuestas Ejercicio 3.10.1

C, D, B, A, F, E

Respuestas Ejercicios 3.10.2

1a. *80 cm*

1b. $\frac{1600}{\pi} \approx 509.29cm^2$

2a. $3\pi u$
2b. $13.5\pi u^2$
3. *123.75π m*
4. *90π m*
5. $\frac{21.98^2}{\pi} \approx 153.78cm^2$

3.12. Referencias:

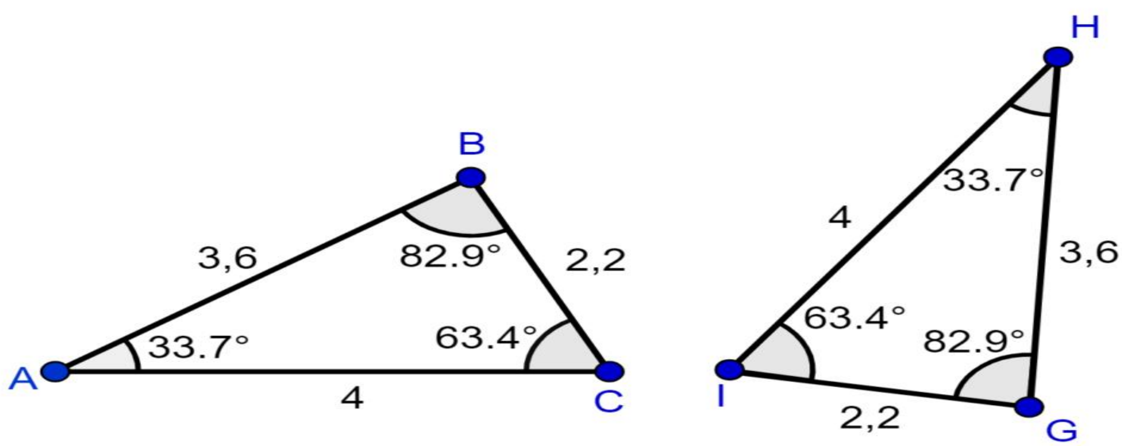
- Alexander D.C. y Koeberlein G.M. (2013). *Geometría.*5a ed. México:Cengage Learning.
- García-Ferreira, S. (2018). *Una introducción a la geometría euclidiana del plano.* México:UNAM.
- Swokowski, E.W. y Cole, J.A.(2021). *Matemáticas V. Pensamiento geométrico, funciones y estadística.* México: Cengage Learning.

4. Unidad IV. Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras

Aprendizaje:
Comprende el concepto de congruencia de figuras geométricas
Utiliza correctamente la notación propia de la congruencia
Reconoce la congruencia entre figuras a partir de la comparación de los elementos correspondientes

4.1. Congruencia de triángulos: concepto de congruencia, notación

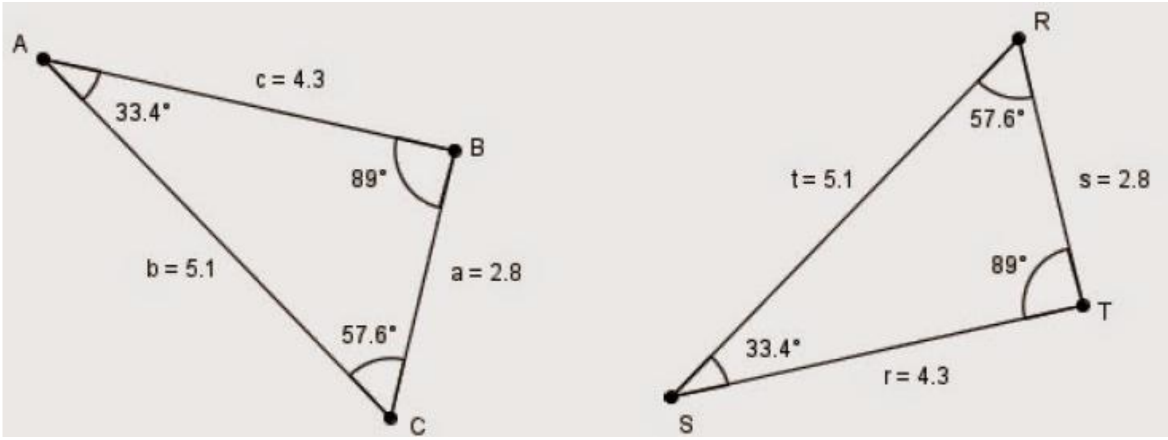
Cuando dos triángulos coinciden en todas sus partes, longitud de los lados y medida de los ángulos, se dice que estos elementos son homólogos o correspondientes, aun cuando la posición y la orientación sea diferente.
Si los tres ángulos y los tres lados de un triángulo tienen la misma medida que los tres lados y los tres ángulos de otro, entonces los dos triángulos son congruentes.
También se dice que los triángulos son congruentes si tienen el mismo tamaño y la misma forma.
Dos o más triángulos son congruentes si superpuestos coinciden en todos sus puntos.
El símbolo de congruencia es $\cong$
Ejemplo 1



Dos ángulos se llamarán congruentes si tienen igual medida, el símbolo para indicar congruencia es: $\cong$. Por lo que si vemos la figura se tiene que los ángulos $<B \cong< G$, $<A \cong< H$, $<C \cong< I$.
Dos segmentos se llamarán congruentes si tienen igual longitud por lo que si observamos los triángulos anteriores tenemos: $\overline{AB} \cong \overline{GH}$,$\overline{BC} \cong \overline{GI}$, $\overline{AC} \cong \overline{HI}$
Como sus lados y ángulos correspondientes (homólogos) son congruentes podemos decir que los triángulos son congruentes y simbolizamos $\Delta ABC \cong \Delta GHI$.
Ejercicios 4.1.1

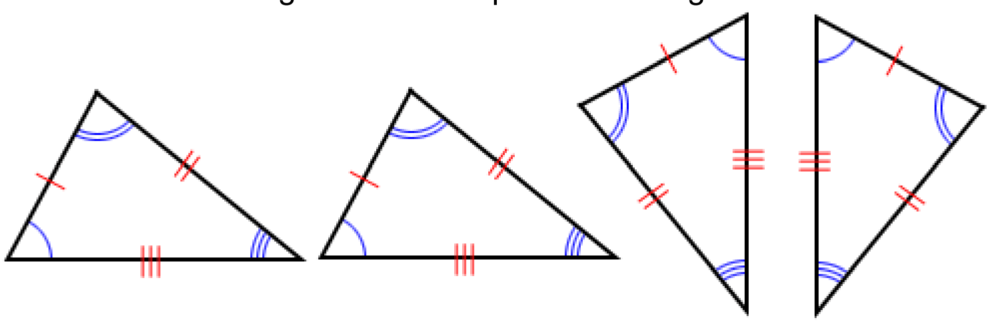
1. Dada la siguiente figura indica y simboliza cuales son los ángulos congruentes y los lados congruentes, indica si hay congruencia o no entre

los triángulos, argumenta tu respuesta y simboliza en caso de existir congruencia entre ellos.



2.- ¿ En una producción en serie de una fábrica, si los productos tienen la misma forma y el mismo tamaño son congruentes?

3.- ¿Cuáles de los siguientes triángulos son congruentes? Observa que las mismas marcas indican congruencia entre pares de triángulos



Soluciones

1.- $< A \cong < S$

$< B \cong < T$

$< C \cong < R$

$\overline{AB} \cong \overline{ST}$

$\overline{BC} \cong \overline{RT}$

$\overline{AC} \cong \overline{RS}$

Por lo tanto $\Delta ABC \cong \Delta RST$

2.- Si, serán congruentes

3.- Ambos pares de triángulos son congruentes ya que sus lados correspondientes y ángulos correspondientes son congruentes

Aprendizaje

Reconoce empíricamente la validez de los criterios de la congruencia de triángulos

4.2. Criterios de congruencia de triángulos:

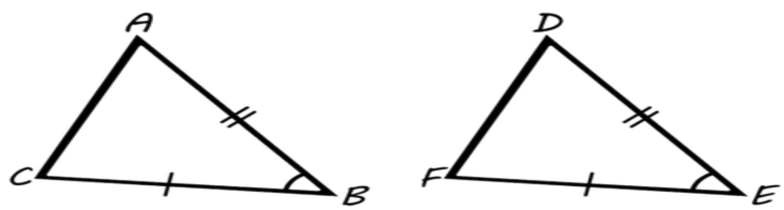
LAL

LLL

ALA

Existen tres casos para demostrar que dos triángulos son congruentes (dichos casos fueron expuestos por Euclides)

Dos triangulos son congruentes si dos lados de un triangulo y el angulo comprendido entre ellos son congruentes a sus correspondientes lados y angulo de otro triangulo entonces ambos triangulos son congruentes (criterio lado-ángulo-lado LAL)



Si:

$< B \cong < E$

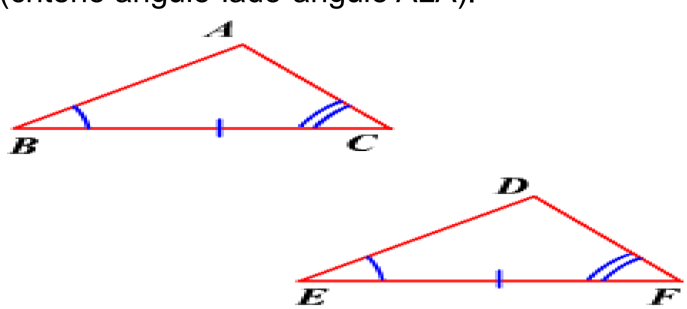
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Entonces:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por el criterio LAL

Si dos ángulos y el lado común entre ellos son congruentes a sus correspondientes ángulos y lado de otro triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes (criterio ángulo-lado-ángulo ALA).



Si:

$< B \cong < E$

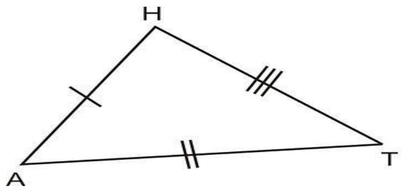
$< C \cong < F$

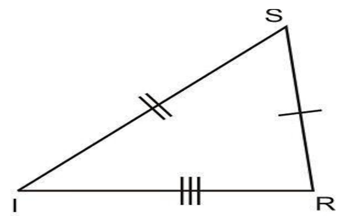
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Entonces:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por el criterio ALA

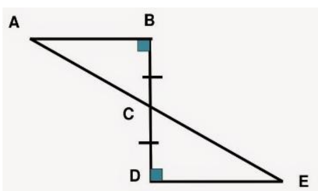
Si dos triángulos tienen cada uno de sus lados correspondientes iguales entonces estos triángulos son congruentes (criterio lado-lado-lado LLL)





$\overline{AH} \cong \overline{RS}$
$\overline{AT} \cong \overline{IS}$
$\overline{HT} \cong \overline{IR}$
Entonces:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por el criterio LLL
EJEMPLOS

1. Observa los triángulos y escribe el caso de congruencia que la justifique, en caso de existir

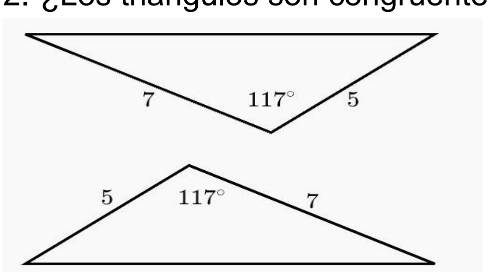


Los elementos de los triangulos que tienen la misma marca es por que son congruentes así notamos que hay en el triangulo superior un lado que es congruente con el lado del triangulo inferior , ahora veamos los ángulos el angulo superior derecho tiene la misma marca que de el angulo inferior izquierdo del triangulo de abajo (angulos rectos) por lo que indican que son congruentes, lo mismo sucede con los angulos $< ACB \cong < DCE$ por ser ángulos opuestos por el vertice, en resumen:

$$\overline{BC} \cong \overline{DC}$$
$$< ABC \cong < CDE$$
$$< ACB \cong < DCE$$

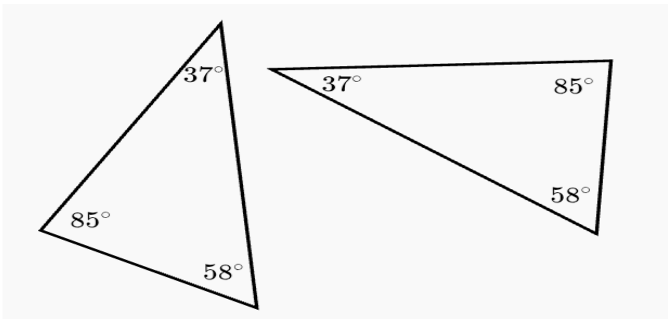
Por lo que ALA es el criterio que justifica la congruencia entre los triangulos : $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

2.-¿Los triángulos son congruentes?, indica el criterio de congruencia



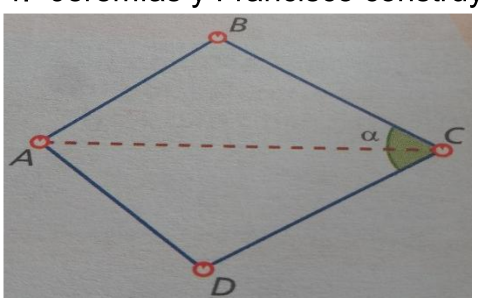
Dados los elementos mostrados se observan dos lados correspondientes congruentes a cada uno de los triángulos , además de que el ángulo dado es congruente al ángulo dado del otro triangulo y debemos observar que es muy importante que el ángulo congruente está comprendido por los dos lados congruentes también, por lo que por el criterio LAL los triángulos son congruentes.

3.-¿los triángulos son congruentes? Indica el criterio que usaste para saberlo



No hay ningún criterio de semejanza que nos indique que si tres ángulos correspondientes son iguales entre triángulos estos serán congruentes, por lo que estos triángulos no son congruentes.

4.- Jeremías y Francisco construyeron un papalote con la forma siguiente:



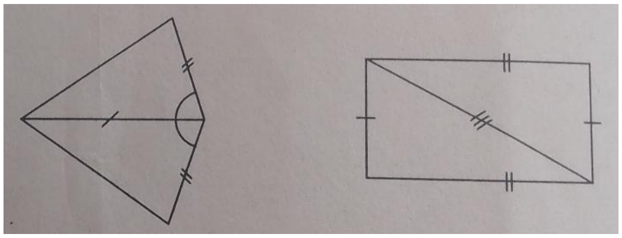
Al hacer un doblez notaron que $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ y que ademas el segmento $\overline{AC}$ divide al $< BCD$ en dos partes iguales ¿los triangulos descritos son congruentes? Simboliza e indica el criterio de congruencia usado

Se tiene que $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ y tienen un lado comun por lo que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ y el angulo comprendido entre estos dos lados es congruente al otro $< BCA \cong < ACD$ por lo mencionado en el enunciado , por loque por el criterio LAL los dos triangulos son congruentes : $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

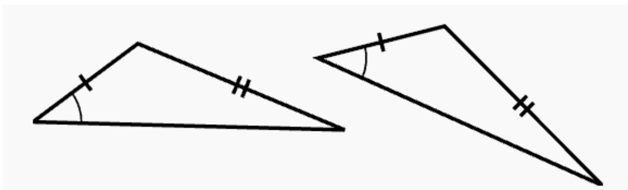
4.2.1 Ejercicios

1.-Dados los siguientes ejercicios indica si son los triángulos congruentes, menciona que tipo de criterio usaste pera determinar la congruencia.

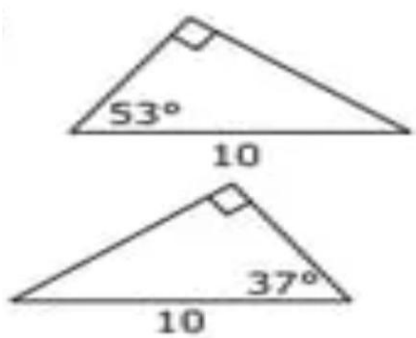
a)



b)



c)



2.-Nicolas, estudiante de diseño gráfico, desea pintar una de las paredes de su recamara. La pared tiene una forma rectangular de 2.3x3.5 m. Traza una línea que vaya desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha y se forman dos triángulos, ¿los triángulos formados son congruentes?, indica las razones y el criterio que usaste para indicar la congruencia de los triángulos de existir.

3.-Responde falso o verdadero a los siguientes enunciados

a) Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y un ángulo congruente no comprendido entre esos dos lados
b) Si se traza una bisectriz de un triángulo equilátero se generan dos triángulos congruentes
c) Si se tiene dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son congruentes, se concluye que dichos triángulos son congruentes
d) Si los tres ángulos internos de dos triángulos son congruentes, entonces ambos triángulos son congruentes
e) Dos ángulos son congruentes si tienen la misma abertura y sus lados son congruentes
f) El criterio LLL también es aplicable para el caso de triangulo escalenos.

Soluciones

1.-

a) LAL y LLL

b) No hay congruencia

c) ALA

2.- LLL o LAL

3.-

a) falso

b) verdadero

c) falso

d) falso

e) falso

f) verdadero

Aprendizaje

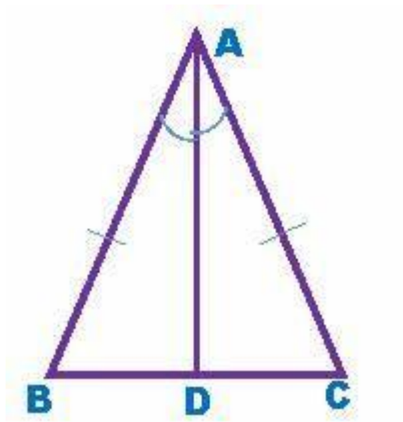
Argumenta la validez de algunas afirmaciones

4.3. Teorema del triángulo isósceles y su reciproco

Propiedades del triángulo isósceles

El teorema del triángulo isósceles se puede enunciar de la siguiente manera: Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud entonces los ángulos opuestos a esos lados serán congruentes.

Si el triangulo ΔABC es isosceles entonces $< ABC \cong < ACB$



Trazamos una bisectriz del ángulo A

Afirmaciones	Razones
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	hipótesis por ser triangulo isósceles
$< BAD \cong < CAD$	hipótesis ya que divide en dos ángulos iguales la bisectriz al ángulo A
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por ser lado común a ambos triángulos

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por LAL
$< ABC \cong < ACB$	Como hubo congruencia entre los triángulos entonces todos los ángulos correspondientes son congruentes

Por otro lado tomando el mismo ejercicio observa como la bisectriz corta al lado opuesto al angulo en el punto medio ya que como quedo demostrado los dos triangulos formados por la bisectrix son congruentes entonces tambien sus correspondientes lados y angulos asi que $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

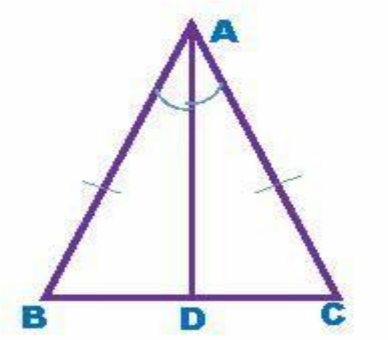
4.3.1 Ejercicios

1.-Investiga que dice el reciproco del teorema del triángulo isósceles y argumenta sus afirmaciones

2.- En un triángulo isósceles la altura y la mediana de la base coinciden como explicarías esto, usa el triángulo que se utilizamos en el ejercicio anterior.

Soluciones

El recíproco del teorema nos dice que, si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces sus lados opuestos también serán iguales.



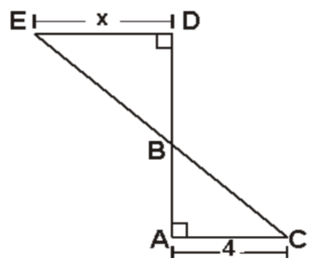
Trazamos una bisectriz del ángulo A

Afirmaciones	Razones
$< ABC \cong < ACB$	hipótesis por ser triangulo isósceles
$< BAD \cong < CAD$	hipótesis ya que divide en dos ángulos iguales la bisectriz al ángulo A
$< ADB \cong < ADC$	Los dos ángulos de los triángulos que se forman por la bisectriz son iguales por lo tanto el tercer ángulo también lo será
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Por ser lado común a ambos triángulos
$\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por ALA
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Como hubo congruencia entre los triángulos entonces todos los ángulos correspondientes son congruentes

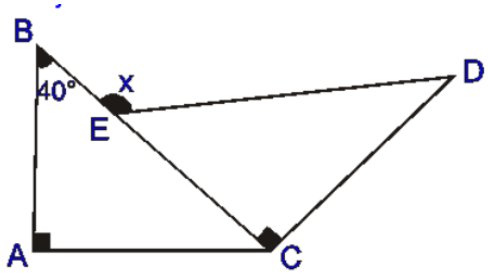
2.-
Observa que concluimos que los dos triangulos eran congruentes $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ por lo que tambien sus lados lo seran así que podemos decir que $\overline{BD} \cong \bar{C}D$
Entonces D es el punto medio y la línea se traza hasta el vértice por lo que es una mediana, también podemos observar que el ángulo de la base de los triángulos son ángulos rectos por lo que también es una altura.
Aprendizaje
Resuelve problemas aplicando los criterios de congruencia de triángulos

4.4. Problemas que involucran congruencia de triángulos

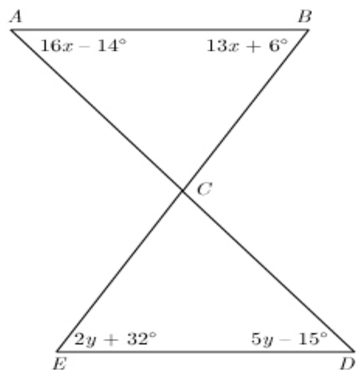
Ejemplos
1.- Indica si los trianguos son congruentes mencionando el criterio usado, despues Calcular el valor de x si $\overline{AB} = \overline{BD}$



Como $\overline{AB} = \overline{BD}$, $< BAC \cong < BDE$ Y $< DBE \cong < ABC$ decimos que los triangulos $\Delta ABC \cong \Delta BDE$ por ALA
Por lo tanto $\overline{ED} = \overline{AC}$ =4 X=4
2.- si $\overline{AB} = \overline{EC}$ y $\overline{AC} = \overline{CD}$ Hallar x



Como se puede ver los triángulos mostrados son congruentes por el criterio LAL
Por lo que el Angulo B es igual al ángulo E ambos congruentes y miden 40 grados, el Angulo x y el Angulo E son adyacentes comparten un lado y tienen un vértice en común entonces:
X+40= 180 x=140
2.-Determina el valor de los ángulos interiores de los siguientes triángulos congruentes, donde $\overline{AB}||\overline{ED}$



Dado que son paralelos los lados $\overline{AB}||\overline{ED}$ y la recta $\overline{AD}$ corta a esos lados por lo que el angulo A y el angulo D serian congruentes por ser alternos internos por lo que:

$$16x - 14 = 5y - 15$$

De la misma manera y por las mismas razones anteriores los ángulos B y E son congruentes:

$$13x + 6 = 2y + 32$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por cualquier método donde las soluciones son: x=4 y y=13

Calculamos los ángulos

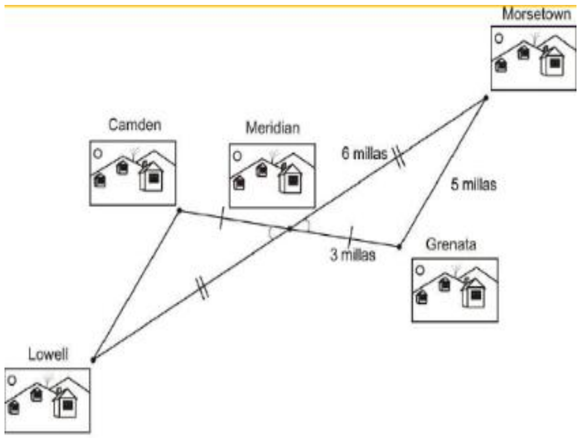
$$< A = 16x - 14 = 16(4) - 14 = 64 - 14 = 50$$
$$< B = 13x + 6 = 13(4) + 6 = 52 + 6 = 58$$
$$< D = 5y - 15 = 5(13) - 15 = 65 - 15 = 50$$
$$< E = 2y + 32 = 2(13) + 32 = 26 + 32 = 58$$

La suma de los ángulos internos es igual a dos ángulos rectos es decir 180 grados a partir de este teorema encontraremos el ángulo C

$$< A + < B + < C = 180$$
$$< C = 180 - < B - < A$$
$$< C = 180 - 58 - 50 = 72$$

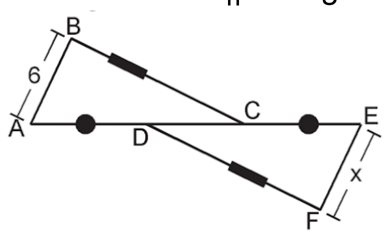
3. El mapa muestra 5 ciudades diferentes. La ciudad de Meridian de su nombre al hecho de que se ubica exactamente a la mitad del camino entre dos ciudades dos de ellas son Camden y Grenata, mientras que las otras son Lowell y Morsetown. Haciendo uso de la información proporcionada en el mapa, ¿Cuál es la distancia entre Camden y Lowell?. Usa triángulos congruentes para resolver el problema.

Primeramete identificamos si los triángulos marcados son congruentes, puesto que la distancia entre Camdem y Meridian es la misma que la distancia entre Meridian y Grenata por lo que podemos decir que estos lados del sus respectivos triángulos son congruentes, de modo similar la distancia entre Lowell y Meridian es la misma que entre Meridian y Morsetown, estos lados por lo tanto son congruentes, también puedes ver que los ángulos formados por estas distancias son congruentes por ser ángulos opuestos por el vértice.

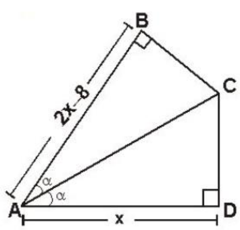


Por lo anterior por el criterio LAL los triángulos son congruentes, con esto podemos encontrar la distancia entre Camden y Lowell identificando su lado correspondiente en el otro triangulo que sería el que va de Morsetown a Grenata por lo que estos lados son congruentes , entonces la distancia entre Camden y Lowell es de 5 millas.
Ejercicios 4.4.1

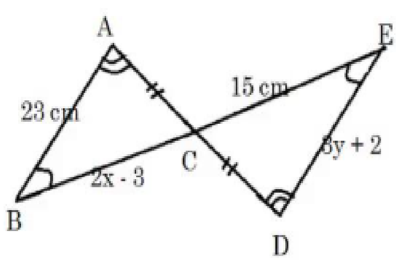
1. Calcula x Si BC||DF argumenta tu respuesta usando la congruencia de triángulos



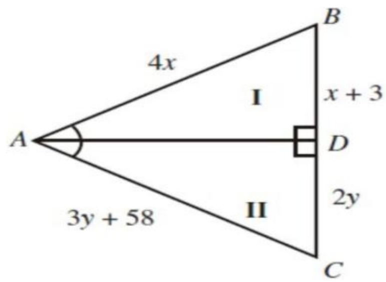
2.- Calcula el valor de x argumeta tu respuesta usando congruencia de triangulos y cula es el valor de el lado $\overline{AB}$



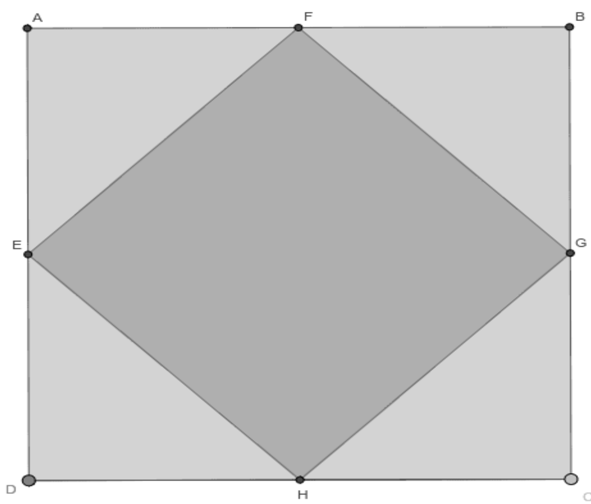
3.- los triángulos ABC y EDC son congruentes, calcula el valor de x y y



4.- calcular x y y si los triángulos son congruentes y determina la medida de cada lado de los triángulos



5.- la ventana del departamento de Viridiana está diseñada con base en un cuadrado cuyos vértices son los puntos A,B,C,D y los puntos E,F,G,H corresponden al punto medio de cada uno de los lados de dicho cuadrado.



a) ¿Qué criterio de congruencia sería util para demostrar que $\Delta AFE \cong \Delta BGF$?
b) ¿Es posible que los triángulos que se ubican en la figura sean equiláteros?

Soluciones
1.- son triángulos congruentes por LAL por lo que x=6
2.- los traingulos mostrados son congruentes por ALA x=8 y $\overline{AB} = 8$
3.- x=9 y y=7
4.- x=25 y y=14
5.-
a) LLL o LAL
b) no es posible

4.5. Definición de semejanza de triángulos.

La semejanza de triángulos ocurre cuando dos triángulos tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño. Matemáticamente, dos triángulos son semejantes si y solo si se cumplen estas condiciones:

- Sus ángulos correspondientes son congruentes.
- Sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, la razón entre las longitudes de los lados correspondientes es constante.

Esto puede expresarse como:
Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) entonces:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C', \angle BCA \cong \angle B'C'A', \angle CAB \cong \angle C'A'B'$$

y

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

4.5.1. Semejanza de triángulos (Criterios AAA, LLL)

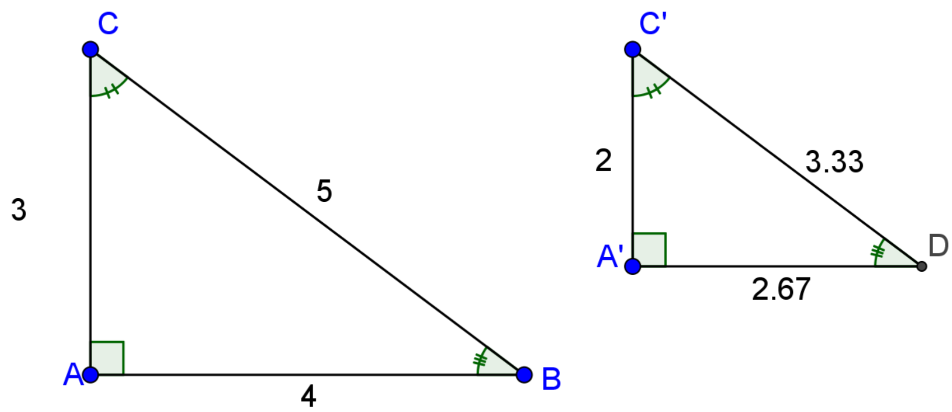
Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Dos triángulos son semejantes
2. Los ángulos correspondientes a cada triángulo son congruentes (Criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo AAA)
3. Las razones entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos son iguales, también se dice que dichos lados **son proporcionales** (Criterio de semejanza lado-lado-lado LLL)

Notación Matemática

1. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
2. $\angle ABC \cong \angle A'B'C', \angle BCA \cong \angle B'C'A', \angle CAB \cong \angle C'A'B'$ (Criterio AAA)
3. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ (Criterio de semejanza lado-lado-lado LLL)

Ejemplo 4.5.1:



En la figura anterior en los ángulos se cumple que:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C', \angle BCA \cong \angle B'C'A', \angle CAB \cong \angle C'A'B'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{2.\overline{6}} = 1.5$$

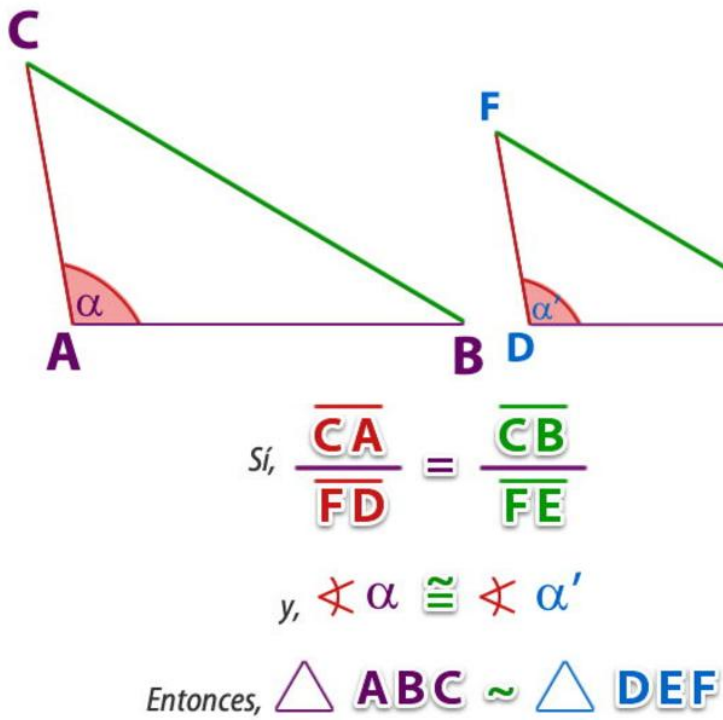
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{5}{3.\overline{3}} = 1.5$$

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{2}{3} = 1.5$$

Por lo tanto: los triángulos de la figura son **semejantes.**

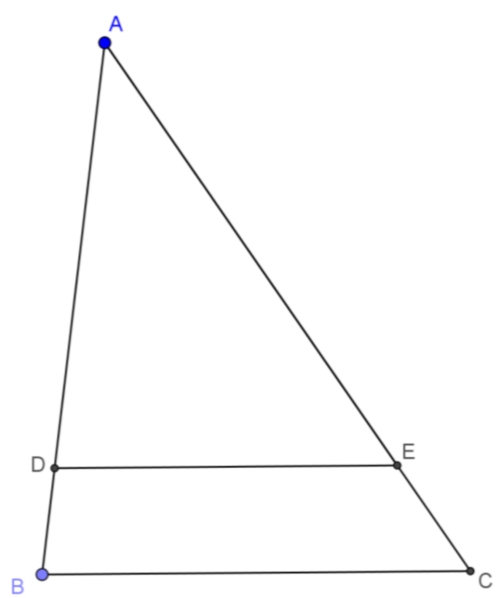
4.5.2. Criterios de semejanza de triángulos LAL

Si dados dos triángulos cuyos lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre los lados son congruentes entonces dichos triángulos son semejantes.



Ejemplo 4.3.2.1:

Dada la figura siguiente $\overline{AB} = 5,\ \overline{AC} = 6,\ \overline{AE} = 4.8,\ \overline{AD} = 4,\ \overline{BC} = 4$ encontrar el valor de $\overline{DE}$.



Como:

1. $\angle BAC \cong \angle DAE$,

2. $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{4} = 1.25$
3. $\frac{AC}{AE} = \frac{6}{4.8} = 1.25$
4. $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

Por el criterio de semejanza LAL entonces:
$\triangle BAC \sim \triangle DAE$

5. Por lo tanto, se cumple que $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$

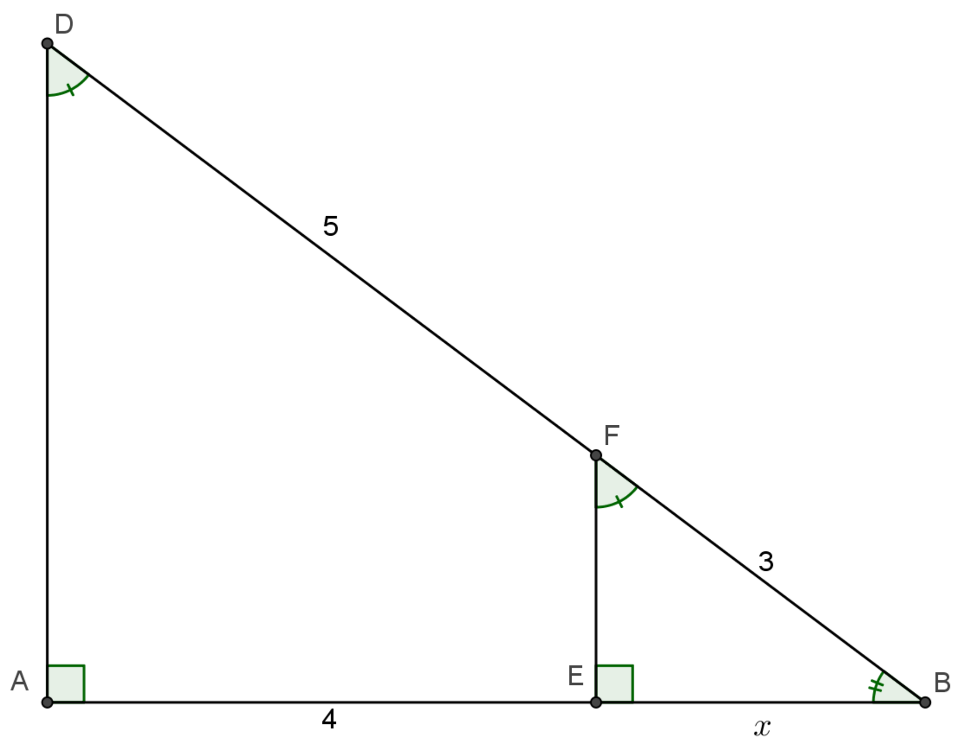
Despejamos DE, de la ecuación $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BC}(\overline{AD})}{\overline{AB}}$$

$$\overline{DE} = \frac{4(4)}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

Ejemplo 4.3.2.2:

Dada la siguiente figura donde $\overline{AF} = 5,\ \overline{AE} = 4,\ \overline{FB} = 3,\ \angle ADF \cong \angle EFB,\ \angle DAE \cong \angle FEB$ encontrar $\overline{EB}$



Tenemos que:

1. $\angle ADF \cong \angle EFB$
2. $\angle DAE \cong \angle FEB$
3. $\angle FBE \cong \angle FBE$ por identidad.

Por el criterio de semejanza AAA entonces:

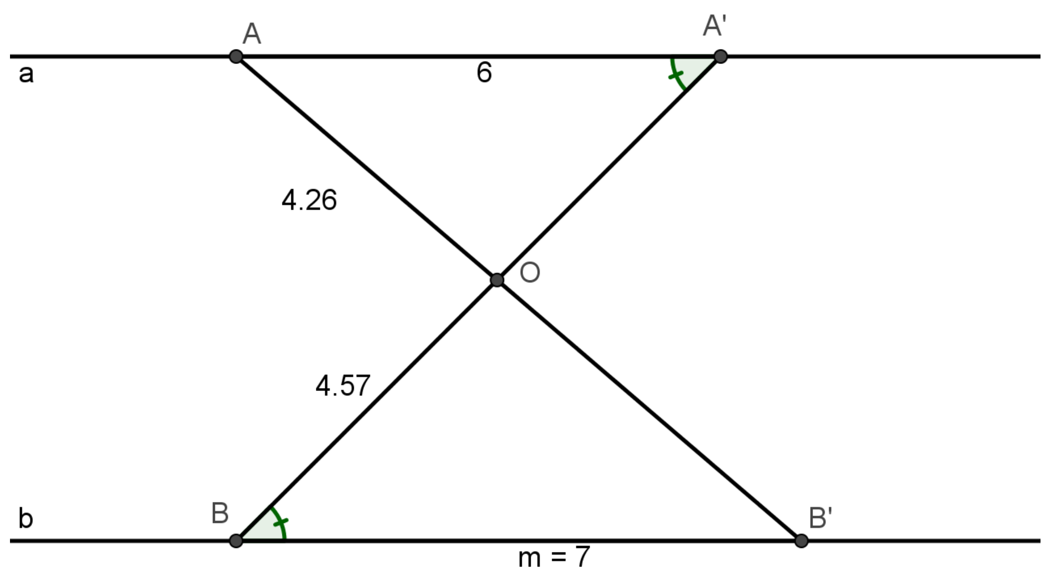
$\triangle DBA \sim \triangle FBE$

Entonces:

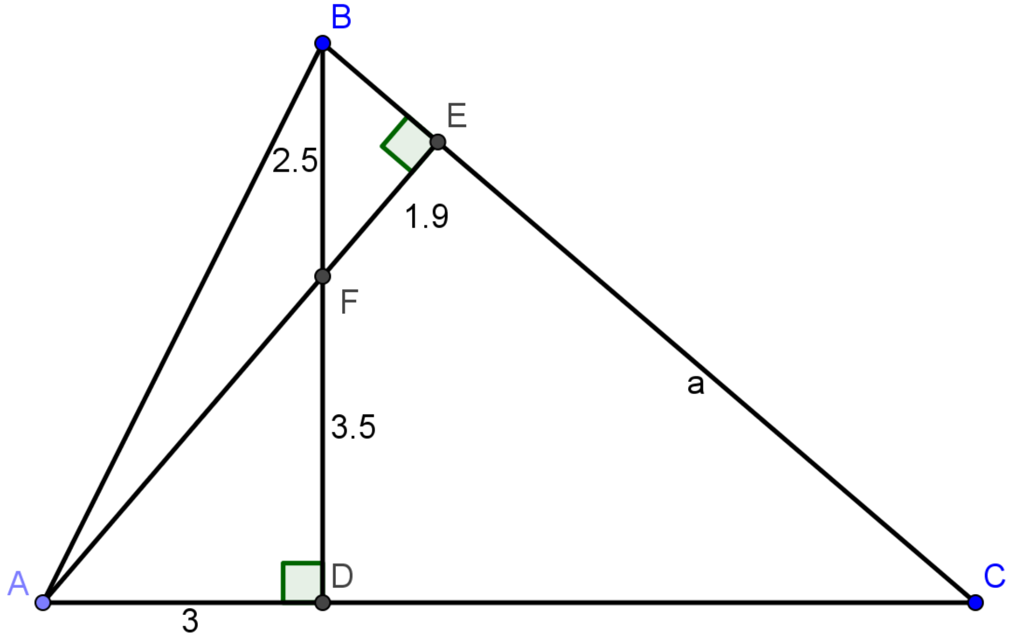
$$\frac{DB}{FB} = \frac{AB}{EB}$$
$$\frac{8}{3} = \frac{4+x}{x}$$
$$8x = 3(4+x)$$
$$8x = 12 + 3x$$
$$8x - 3x = 12$$
$$\overline{EB} = x = \frac{12}{5}$$

Ejercicios propuestos 4.5.1

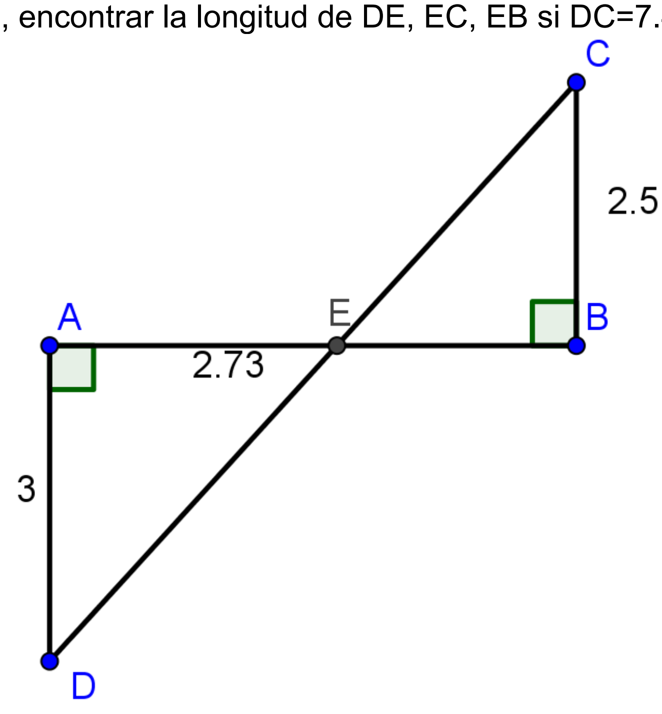
1) Los lados de un triángulo miden 24 m., 18m. y 36 m., respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12m., 16 m. y 24 m., respectivamente. Determina si son o no semejantes, justificando tu respuesta.
2) Los lados de un triángulo miden 36 m., 42 m. y 54 m., respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m., hallar los otros dos lados de este triángulo
3) Dada la siguiente figura, encontrar la longitud de los lados OA' y OB' si las rectas a y b son paralelas. (Usar criterios de semejanza para identificar que lados son correspondientes)



4) En el $\triangle ACB,$ se trazan los segmentos perpendiculares AE a EC, y DB a AC como se muestra en la figura, mostrar que $\triangle ADF \sim \triangle BEF$ y encontrar las longitudes de BE y AF.



5) En la siguiente figura los segmentos AD y CB son perpendiculares al segmento AB, encontrar la longitud de DE, EC, EB si DC=7.43



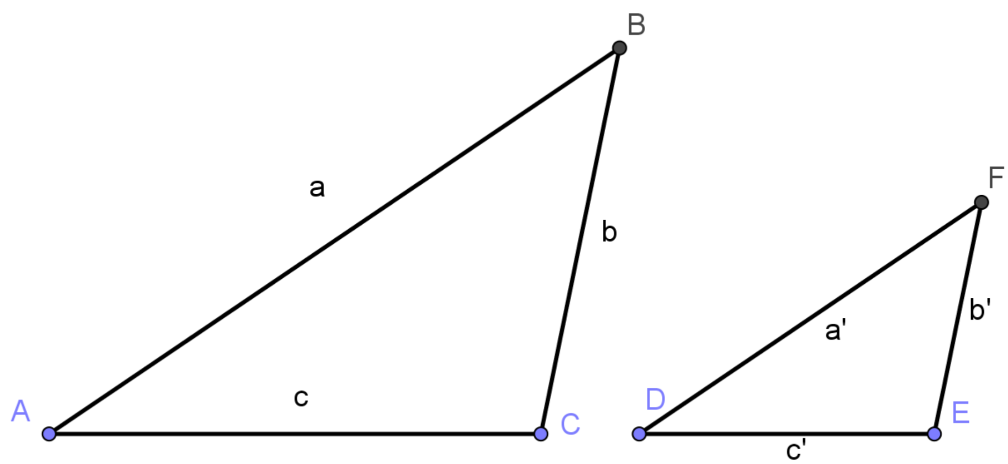
Soluciones

1) No son semejantes
2) 28 m. y 36 m
3) $OA' = 3.92\,, OB' = 4.96$
4) $BE = 1.63, AF = 4.61$
5) $DE = 4.05, EC = 3.38,\ EB = 2.27$

4.6. Razón entre perímetros y áreas de los triángulos semejantes

Dos triángulos semejantes cumplen que:

1) La razón de los perímetros de los triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza.



Estos dados $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ entonces

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{AC}{DE} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

De lo anterior tenemos que:

$$a = ra', b = rb', c = rc'$$

Al calcular el perímetro del $\triangle ABC$ tenemos que:

$$a + b + c = ra' + rb' + rc'$$

Factorizando

$$a + b + c = r(a' + b' + c')$$

$$r = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$$

$$r = \frac{perímetro\ de\ \triangle ABC}{perímetro\ de\ \triangle DFE}$$

2) La razón de las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza

Usando la fórmula de Herón tenemos que el área de $\triangle ABC$ es:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}$$

Podemos escribir el área como:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(r^2(a')^2+r^2(b')^2+r^2(c')^2)^2-2(r^4(a')^4+r^4(b')^4+r^4(c')^4)}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{r^4((a')^2+(b')^2+(c')^2)^2-2r^4((a')^4+(b')^4+(c')^4)}$$

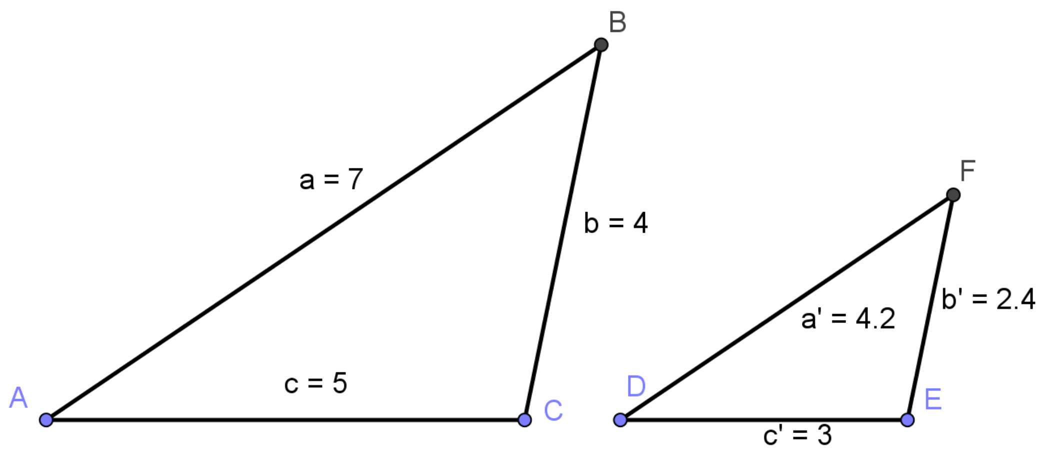
$$\frac{1}{4}r^2\sqrt{((a')^2+(b')^2+(c')^2)^2-2((a')^4+(b')^4+(c')^4)}$$

Pero esta última expresión es igual al área del $\triangle DFE$ multiplicada por r^2 por lo que:

$$\acute{A}rea\ del\ \triangle ABC = r^2 \cdot \acute{A}rea\ del\ \triangle DFE$$

$$r^2 = \frac{\acute{A}rea\ del\ \triangle ABC}{\acute{A}rea\ del\ \triangle DFE}$$

Ejemplo 4.3.3.1



Dados los siguientes triángulos verificar que sean semejantes al comparar la razón de sus áreas, perímetros y lados.

Primero procederemos con la razón entre los lados correspondientes:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{7}{4.2}=\frac{4}{2.4}=\frac{5}{3}=1.\overline{6}$$

Ahora el perímetro:

$$\frac{7+4+5}{4.2+2.4+3}=\frac{16}{9.6}=1.\overline{6}$$

Por último, el área

Usando la fórmula de Herón

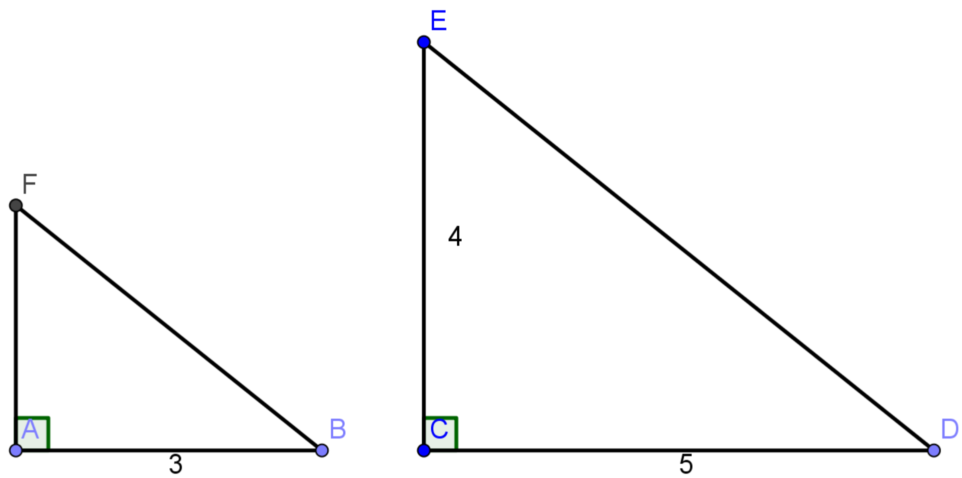
$$\acute{A}rea\ del\ \triangle ABC = 4\sqrt{6}$$

$$\acute{A}rea\ del\ \triangle DFE = \frac{36\sqrt{6}}{25} \approx 3.52727$$

$$\frac{\acute{A}rea\ del\ \triangle ABC}{\acute{A}rea\ del\ \triangle DFE} = \frac{4\sqrt{6}}{\frac{36\sqrt{6}}{25}} = \frac{25}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = (1.\bar{6})^2$$

Ejemplo 4.3.3.2

Calcular el área de $\triangle ABF$ si se sabe que es semejante al $\triangle CDF$, el lado AB=3, CD=5, EC=4 y los dos triángulos rectángulos:



Como los triángulos $\triangle ABF\ y$ al $\triangle CDF$ son semejantes entonces se cumple que $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{3}$ que es la razón de semejanza entre los lados de dichos triángulos.

El área del $\triangle CDE$ usando la fórmula $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{4(5)}{2} = 10\ u^2$

Como la razón de las es igual al cuadrado de la razón de semejanza tenemos que:

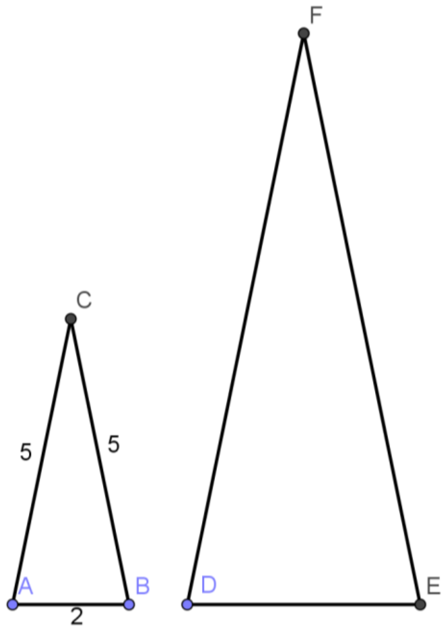
$$\frac{\acute{A}rea\ del\ \triangle CDE}{\acute{A}rea\ del\ \triangle ABF} = \frac{10}{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\frac{10}{x} = \frac{25}{9}$$

$$x = \frac{90}{25} = 3.6\ u^2$$

Ejemplo

Un terreno triangular que tiene lados de 2, 5 y 5 metros respectivamente. Si se desea replicar la forma en otro terreno, pero con un perímetro de 16 metros, cuanto mide cada lado de este nuevo terreno.



Como los dos triángulos son semejantes entonces la razón de sus perímetros es igual a la razón de semejanza entre dichos triángulos:

$$r = \frac{perímetro\ de\ \triangle ABC}{perímetro\ de\ \triangle DEF}$$

$$r = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Pero como son semejantes entonces:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{DE} = \frac{3}{4}$$

$$DE = \frac{8}{3}\ metros$$

$$\frac{5}{EF} = \frac{3}{4}$$

$$EF = \frac{20}{3}\ metros$$

Como los triángulos son isósceles entonces:

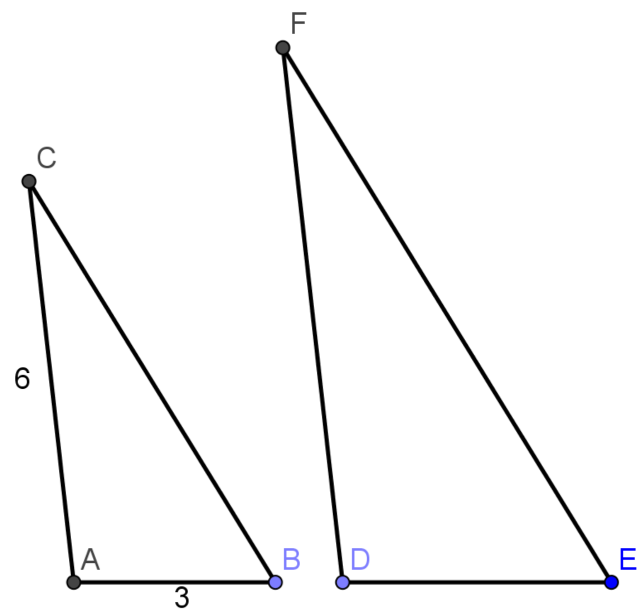
$$FD = \frac{20}{3}\ metros$$

$$El\ perímetro\ es\ \frac{8}{3} + \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{48}{3} = 16\ metros$$

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

4.6.1. Ejercicios propuestos

1) Dado un triángulo de altura 4 m. y base 4.5m encontrar el área de un triángulo semejante al primero cuya altura es de 3.4 m.
2) Los triángulos ABC y DEF son semejantes y tienen perímetros de $16\ cm.\ y\ 21.\overline{3}\ cm$. En la figura se muestran las medidas de los lados AB y AC, encontrar las medidas restantes para el triángulo DEF.



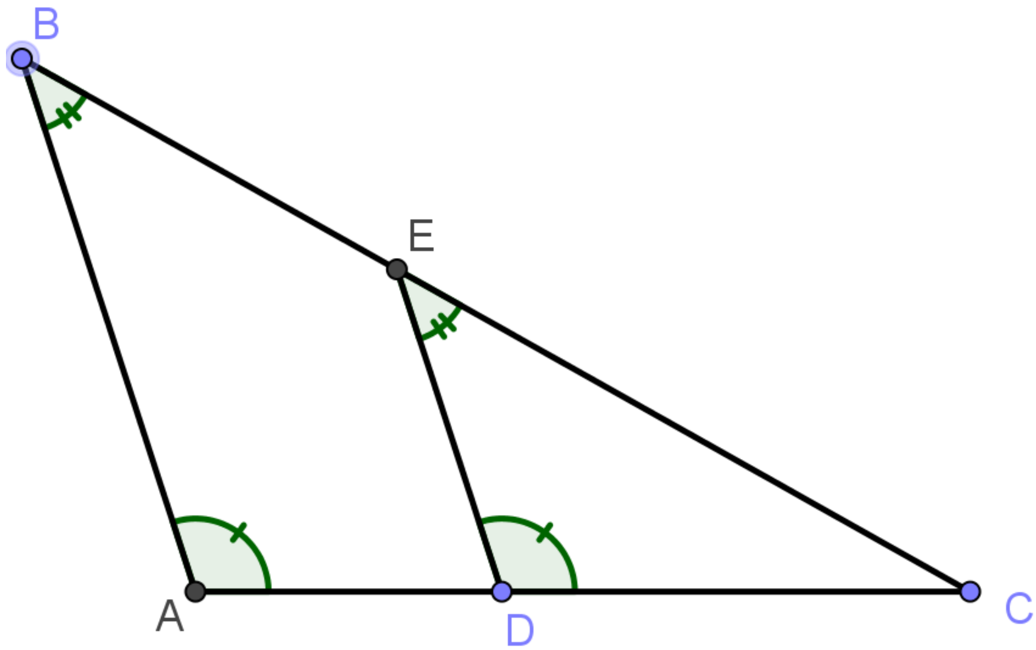
3) El área de un triángulo es de $24\ m^2$ y su perímetro es de 24 m. un triángulo semejante tiene un perímetro de 8 m, ¿cuál es el área de dicho triángulo?

4.6.2. Soluciones

1) $6.5025\ m^2$
2) $CB = 7, FD = 8, DE = 4, FE = 9.\overline{3}$
3) $\frac{8}{3}\ m^2$

4.7. Teorema de Thales y su recíproco

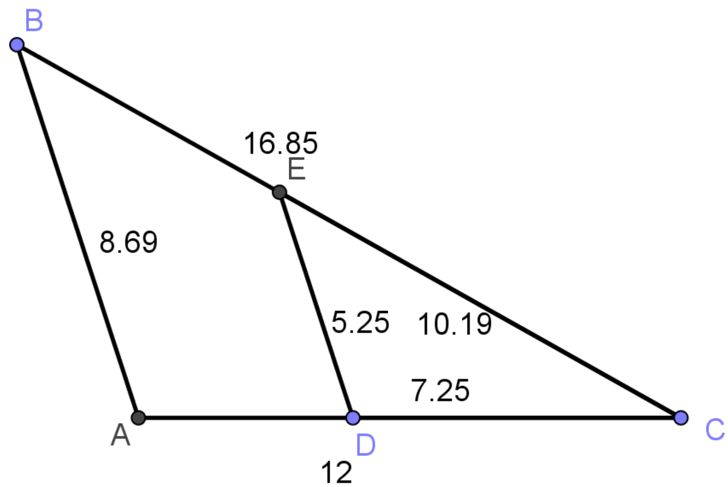
El teorema de Tales enuncia que, si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.



Demostración:
Dado el $\triangle ACB$ se traza el segmento EB que es paralelo al lado BA, por lo que $\angle BAC \cong \angle EDC, \angle ABE \cong \angle DEC$ ya que al ser BA y ED paralelos son ángulos correspondientes.
Por lo tanto $\triangle ACB \sim \triangle DCE$ ya sus ángulos internos son congruentes por el criterio de semejanza AAA.

4.7.1. Recíproco

El recíproco del teorema de Tales nos dice que, si los segmentos que determina una transversal en dos lados de un triángulo son proporcionales, entonces esa transversal es paralela al tercer lado



Ejemplo 4.3.4.1

Dado $\triangle ACB$ el cual es cortado por el ED, verificar que ED sea paralela a BA,

$$\frac{8.69}{5.25}=\frac{16.85}{10.19}=\frac{12}{7.25}=1.6535819430814525$$

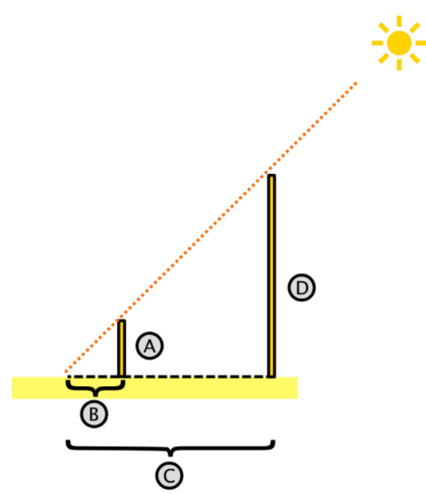
Lo anterior implica que:

$$\triangle ACB \sim \triangle DCE$$

Lo que implica que los ángulos internos de dichos triángulos son congruentes, por lo tanto, BA es paralelo a ED.

Ejemplo 4.3.4.2

Dada la siguiente figura:



Encontrar el valor de C, si B=6, A=4.29 y D=10

El segmento A y D son paralelos por lo tanto $\frac{A}{D}=\frac{B}{C}$

En particular podemos reescribir la ecuación de la manera siguiente:

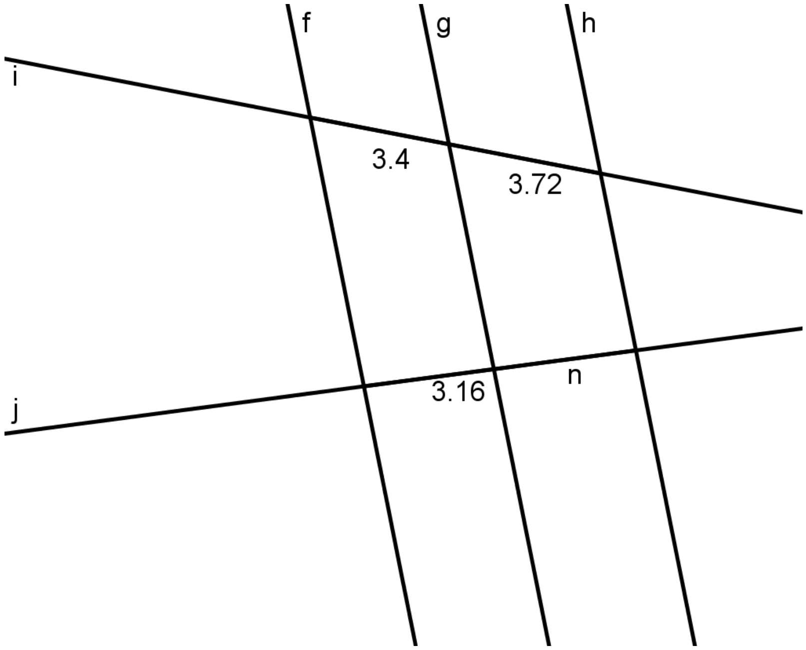
$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

$$\frac{4.29}{6} = \frac{10}{C}$$

$$C = 14$$

Ejemplo

Dada la siguiente figura encontrar el segmento n, si las rectas f,g,h son paralelas.



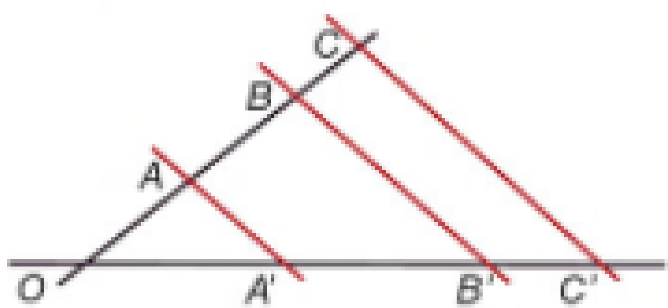
Al ser f,g,h paralelas podemos escribir la razón de semejanza como:

$$\frac{3.4}{3.16} = \frac{3.72}{n}$$
$$n = 3.45741$$

Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

4.7.2. Ejercicios propuestos

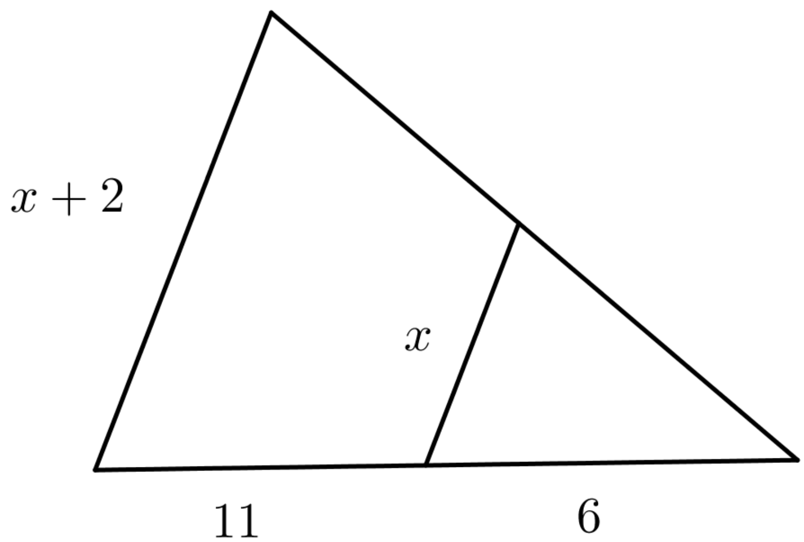
1) Dada la figura, donde los segmentos AA’, BB’ y CC’ son paralelos



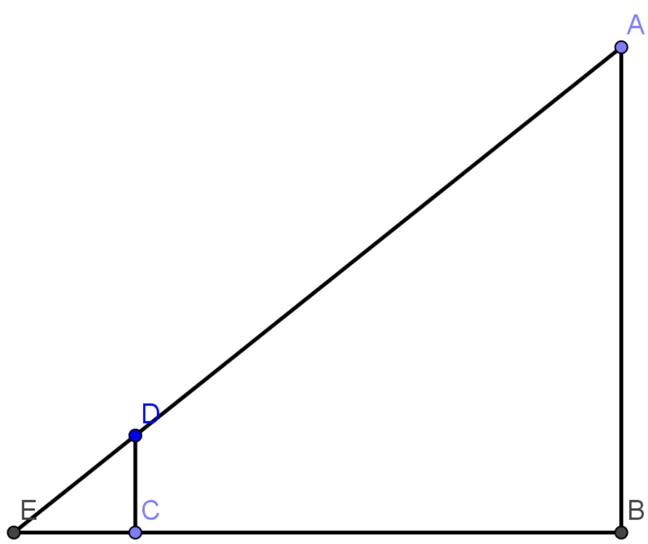
$$OA = 10.5\ cm. AB = 12\ cm., A'B' = 15 cm., B'C' = 9\ cm$$

Encontrar OA’, OB’, BC, OC’

2) Dada la siguiente figura encontrar el valor de x además el de los segmentos



3) Un observador se encuentra en el E, y la altura de un árbol DC es de 2 metros, si la sombra de un edificio es AE y la distancia de EB es de 12.5, ¿cuál es la altura del edificio (AB)?



4.7.3. Soluciones

1) $OA' = 13.125, OB' = 28.125, BC = 7.2, OC' = 37.125$
2) $x = \frac{12}{5}$, 4.4, 2.4
3) $10\ metros$

4.8. Teorema de Pitágoras. Recíproco de teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras es una relación geométrica euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo.

Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos. Este teorema se puede escribir como una ecuación que relaciona las longitudes de los lados a, b, c. (véase la figura 1.1)

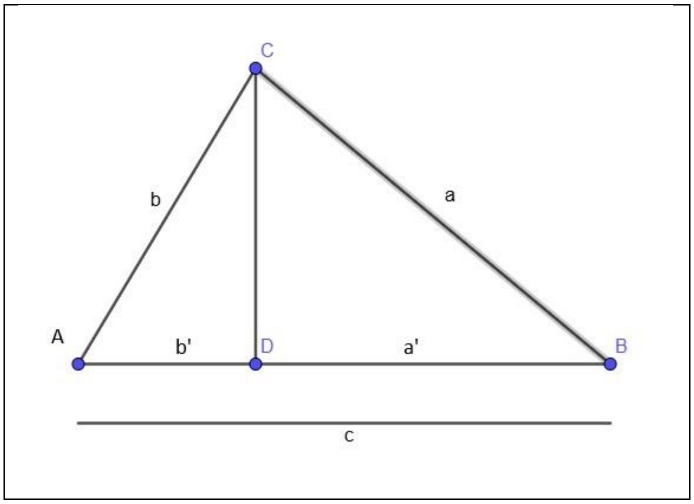


Figura 1.1 Triángulo rectángulo.

El ΔABCes rectángulo, el <CBA=90°, donde $\overline{CD}$ es altura del vértice C.

Los triángulos ABC, ADC BDC son semejantes ya que todos tienen dos bases en común y los ángulos agudos son iguales por ser comunes y tienen un ángulo de 90° por lo tanto son semejantes.

Entonces tenemos la relación del ΔABC y el ΔADC

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = b'c$$

Y de los triángulos ΔABC y el ΔBDC tenemos

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \rightarrow a^2 = a'c$$

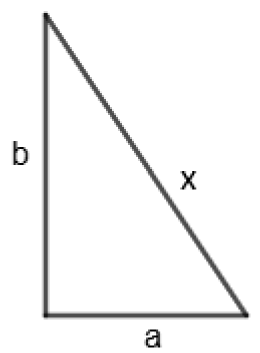
Sumando los catetos nos queda

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + c')$$
$$a^2 + b^2 = c(c)$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por lo que en todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

Ejemplo:

Si tenemos un triángulo rectángulo encontrar el lado que falta.



Donde $a = 3cm\ y\ b = 4cm$

Figura 2.

Sabemos que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa entonces tenemos:

$$a^2 + b^2 = x^2$$

Al sustituir los valores nos queda

$$(3\ cm)^2 + (4cm)^2 = x^2$$
$$9cm^2 + 16cm^2 = x^2$$

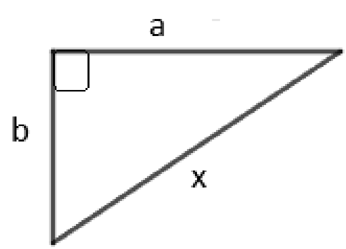
Para quitar el cuadrado de la x sacamos raíz cuadrada a ambos lados.

$$\sqrt{9cm^2 + 16cm^2} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{25cm^2} = x$$
$$5cm = x$$

Recuerda que el Teorema de Pitágoras se usa para triángulos rectángulos.

Ejercicios: encuentra el valor del lado faltante en cada caso.

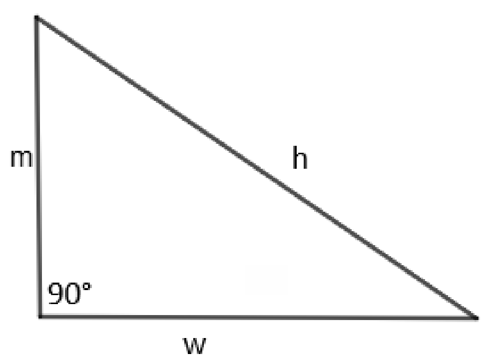
1.



Donde $a = 12cm\ y\ b = 8cm$

Figura 3.

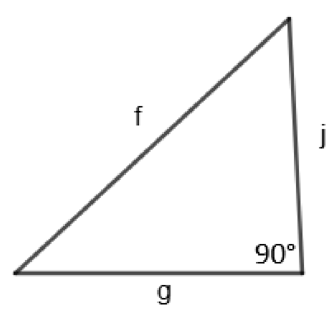
2.



Donde $m = 6m \quad w = 16m$

Figura 4.

3.



Donde $g = 4m \quad w = 4m$

Figura 5.

4.9. Recíproco de teorema de Pitágoras

Si en un triángulo el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados entonces el triángulo es rectángulo. (véase figura 6)

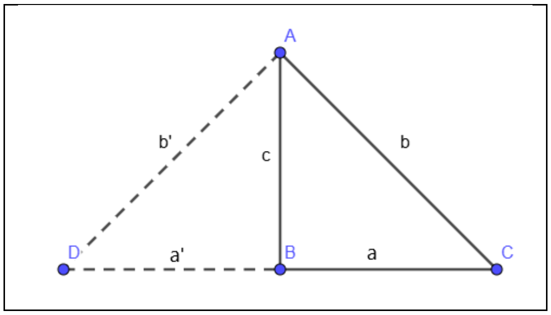


Figura 6

Sea ΔABC un triángulo tal que $b^2 = c^2 + a^2$ construimos un punto D del lado opuesto a C respecto $\overline{AB}$ tal que $\overline{BD} = \overline{BC}\ y\ \overline{BD} \perp \overline{AB}$

Por construcción ΔABD es rectángulo, por el teorema de Pitágoras. $b'^2 = c^2 + a'^2$

Como $a' = a \implies a'^2 = a^2$, por lo tanto, $b'^2 = c^2 + a^2 = b^2$

Por hipótesis, $b^2 = c^2 + a^2 \implies {b'}^2 = b^2 \implies b' = b$

Por lo que por el teorema LLL, ΔABC≅ΔADC, el <CBA=90°

Entonces $b^2 = c^2 + a^2$

Ejemplo: ¿En el triángulo ABC, se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$?(ver figura 7)

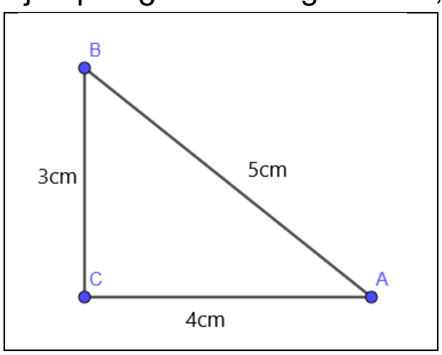


Figura 7

Trazamos otro ΔFDE (figura 8) con lados $\overline{DE} = 3cm$ $\overline{EF} = 4cm$ Utilizamos el teorema de Pitágoras para encontrar x.

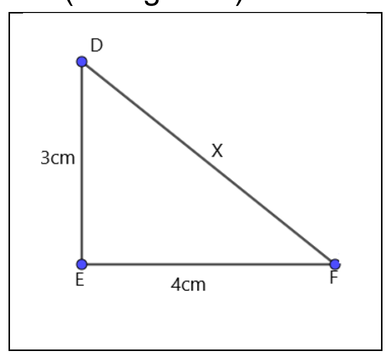


Figura 8

$$(3\ cm)^2 + (4\ cm)^2 = x^2$$
$$\sqrt{9cm^2 + 16cm^2} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{25cm^2} = x$$
$$5cm = x$$

Observamos que $en\ el\ \Delta ABC\ sus\ lados\ son\ \overline{BC} = 3cm\ \ \overline{CA} = 4cm\ y\ \overline{BA} = 5cm$ y en el $en\ el\ \Delta FDE\ sus\ lados\ son\ \overline{DE} = 3cm\ \ \overline{EF} = 4cm\ y\ \overline{DF} = 5cm$, por lo que podemos decir que los triángulos son congruentes por el postulado LLL, además son triángulos son rectángulos porque se cumple el Teorema de Pitágoras.

Ejercicio: trata de hacer las figuras, solo recuerda que el lado más grande es la hipotenusa.

4. Si en un triángulo sus lados son 8, 15 y 17, verifica si es un triángulo rectángulo.

5. Los lados de un triángulo son 7, 24 y 25
6. Verifica que los lados del siguiente triángulo forman a un triángulo rectángulo, a=2, b=3 y c=4

Solución de los ejercicios de Pitágoras

1. 14.42 cm
2. 17.08 m
3. 5.65 m
4. Si es un triángulo rectángulo.
5. Si es un triángulo rectángulo.
6. No es un triángulo rectángulo.

4.10. Referencias

- Clemens, S., O´Daffer, P., & Cooney, T. (2005). Geometría. Pearson.
- CONAMAT. (2009). Geometría y trigonometría. Prentice-Hall.
- Filloy, E., & Zubieta, G. (2001). Geometría. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Jiménez, R. (2008). Matemáticas II. Geometría y trigonometría. Pearson Educación.
- Ortiz, F. (1991). Matemáticas-2. Geometría y trigonometría. Publicaciones Cultural.
- Guzmán, E. (2016). Geometría y trigonometría. Patria.
- Miller, Ch., Heeren, V., & Hornsby, J. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones (12.ª ed.). Pearson/Addison Wesley.
- Sullivan, M. (1997). Precálculo (4.ª ed.). Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Alexander, D., & Koeberlein, G. (2013). Geometría (5.ª ed.). Cengage Learning.