UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Azcapotzalco

Guía de examen extraordinario

Matemáticas I

Autores

Prof. Carlos Briones Rodríguez

Prof. Raúl Espinosa Rojas

Profa. Ma Trinidad Garfias Echevarría

Prof. Antonio López Delgado

Profa. Sandra Areli Martínez Pérez

Prof. Lucino Raymundo López

Prof. David Villegas Cárdenas

Abril 2025.

CONTENIDO

GUÍA DE USUARIO

Esta guía está diseñada para ayudarte a prepararte de manera efectiva y estructurada para tu examen extraordinario de Matemáticas I. Para asegurarte de que estás listo para el examen; te sugerimos

- Organiza tu tiempo de estudio. Divide el tiempo disponible antes del examen. Asigna bloques de tiempo para estudiar cada tema y asegura descansos cortos entre sesiones. Comienza con los temas que más te cuestan. Dedica al menos una hora diaria a repasar y practicar los temas que ya has estudiado.
- Usa recursos adicionales tales como apuntes, libros, videos y tutoriales, utiliza recursos en línea como los que se encuentran en el portal académico, también puedes ver videos educativos, tutoriales.
- Repite conceptos y resuelve ejercicios sin mirar el material para fortalecer tu memoria.
- En caso de que no te queden claros algunos conceptos o procedimientos acude a asesorías (PIA) en donde te pueden orientar.
- Simula las condiciones del examen realizando las autoevaluaciones que se encuentran al final de cada unidad, revisa las respuestas incorrectas y repasa esas áreas en las que cometiste errores.

Te deseamos mucho éxito en tu examen.

Los autores

UNIDAD 1. EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

Introducción.

El desarrollo científico y tecnológico que podemos presenciar en nuestros días nos sumerge en un mundo donde los números están presentes. Todo aquello que sea digno de ser cuantificado o clasificado tiene asociado un número, basta observar nuestro desenvolvimiento cotidiano en distintos lugares y actividades para que estos adquieran una característica simple y familiar. Pero ¿cómo podríamos contestar a un niño pequeño, que ejerciendo su natural curiosidad nos pida definir lo que es un número? Sin duda es más fácil operar con ellos que definirlos de una manera directa, sin embargo, podemos empezar por pensar en ellos como construcción mental que realizamos a partir de estímulos externos. La primera aproximación que tenemos con ellos ocurre en nuestra infancia cuando empezamos a contar cosas, pero la reflexión nos orilla a pensar que estos no son cosas por sí mismas, sino que surgen como creaciones que formamos en nuestra mente. Las repercusiones que tuvo este concepto en el desarrollo cultural son enormes y faltaría espacio para describirlas justamente, pero podemos afirmar su carácter fundamental en las matemáticas. Las propiedades que poseen los números tienen repercusiones en el desarrollo aritmético y algebraico, de ahí la importancia que tiene una comprensión plena de las mismas como base hacia la construcción de conceptos más elaborados. En esta unidad se abordan el desarrollo y característica de las operaciones que se pueden realizar con los números.

PROPÓSITO: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando algunos métodos y estrategias que faciliten la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que el alumno se inicie en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

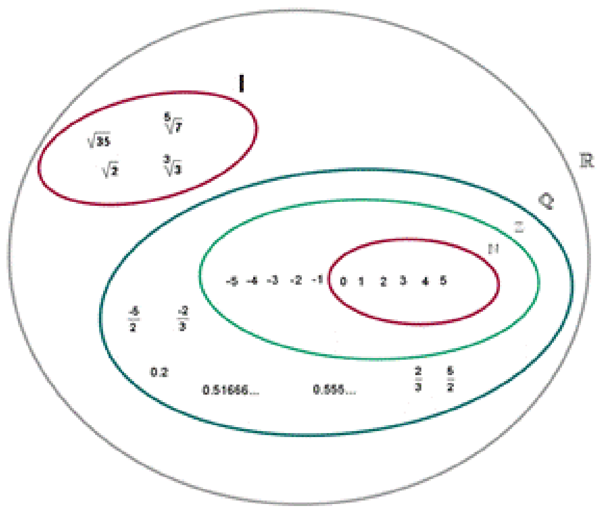
Palabras Clave: Conjunto, números reales, números imaginarios, números enteros, recta numérica, valor absoluto, jerarquía de operaciones, número racionales, fracción equivalente, mínimo común múltiplo (m.c.m.), máximo común divisor (M.C.D), exponente, base, radical, y heurísticas.

Aprendizajes

- Comprende el significado de los números naturales.
- Comprende el significado de los números enteros.
- Comprende el significado de los números racionales.
- Comprende el significado de los números irracionales.
- Comprende el significado de los números reales.
- Opera correctamente con potencias y radicales.
- Traduce relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resuelve.
- Resuelve problemas aritméticos en varios contextos

Números reales

Los números reales son un conjunto de números que incluyen tanto a los números racionales como a los irracionales. Este conjunto abarca desde los enteros y fracciones, hasta números como la raíz cuadrada de 2 o el número π, que no pueden expresarse como fracciones exactas. Los números reales se utilizan para representar cantidades continuas y forman la base de gran parte de las matemáticas, permitiendo describir magnitudes en la vida cotidiana, como distancias, tiempos y temperaturas. El siguiente diagrama muestra los distintos conjuntos de números los cuales forman el conjunto de los números reales denotados por el símbolo $\mathbb{R}$.



A continuación, se describen los conjuntos de números que componen a los números reales.

Números naturales (N).

Son los números que utilizamos para contar objetos.

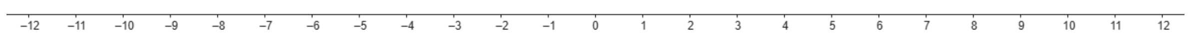
$$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

El cero

Es el número que representa la ausencia de cantidad.

Números enteros (Z)**.**

Son los números de contar, {1, 2, 3, ...}, sus negativos {..., -3,-2,-1} y cero {0}. Así que el conjunto es {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} y se pueden representar en una recta numérica como la siguiente (viene de la palabra alemana "Zahlen", que significa números).



Ejemplos

1) $(-4)+(-1)+(-5)=-10$ $\quad$ $-5-6-3-2-1=-17$

2) $(-9)+6=-3$ $\quad$ $-5+7=2$

❖ El producto de signos iguales es positivo; el producto de signos contrarios es negativo, tal como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Regla de los signos

$(+)(+)=+$	Por similitud	$(+)\div(+)=+$
$(+)(-)=-$		$(+)\div(-)=-$
$(-)(+)=-$		$(-)\div(+)=-$
$(-)(-)=+$		$(-)\div(-)=+$

Ejemplos

1) $(3)+(5)=8$

2) $(-5)+(11)=6$

3) $(-47)+(-13)=-60$

6) $(17)(77)=1309$

7) $(-5)(10)=-50$

8) $(-19)(-15)=285$

4) $(-21)+45=24$

5) $(87)-(34)=53$

9) $(-225)\div(25)=-9$

10) $(150)\div(25)=6$

Ejercicios

a) Realiza las sumas y restas sin calculadora.

1) $5+(-3)+(-2)+6=$ $R=6$

2) $(-8)+(-6)+(-3)+16=$ $R=-1$

3) $(8)+(4)+(-8)+(-12)=$ $R=-8$

4) $-3-5+(-4)-(22-41)=$ $R=7$

5) $23-(-7)=$ $R=30$

6) $(-20)-(-13)=$ $R=-7$

b) Realiza las multiplicaciones y divisiones sin calculadora.

1) $(5)(9)=$ $R=45$

2) $(-14)(-14)=$ $R=196$

3) $(-3)(-7)(10)=$ $R=210$

4) $(33)(-22)(1)=$ $R=-726$

5) $(0)(1000)(-35)=$ $R=0$

6) $(11)(-3)(-4)(10)=$ $R=1320$

7) $(40)\div(5)=$ $R=8$

8) $(110)\div(-10)=$ $R=-11$

9) $(-256)\div(256)=$ $R=-1$

10) $(-66)\div(-11)=$ $R=6$

Jerarquía en las operaciones y uso de los paréntesis

Ejemplos

1) $4\times 3^{2}=4\times 9$

$=36$

2) $12+6\div 3=12+2$

$=14$

3) $18\times 3\div \sqrt[3]{27}=18\times 3\div 3$

$=54\div 3$

$=18$

4) $64\div 8+5-7\times 4\div 2=8+5-28\div 2$

$=8+5-14$

$=13-14$

$=-1$

5) $(9+7-2+4)\div 9=18\div 9=2$

6) $[15+5(8-3)]\div[(8-2)\div 2+7]=[15+5(5)]\div[(6)\div 2+7]$

$=[15+25]\div[3+7]$

$=[40]\div[10]$

$$= 4$$

Ejercicios

a) Realiza las siguientes operaciones.

1) $7 \times 3 + 2 - 15 \div 3 - 4 =$ $R = 14$

2) $15 * 21 \div 7 - 8 * 16 \div 4 + 12 \div 4 - 16 =$ $R = 0$

3) $8 + 14 - 2 + 4 \bullet 2^3 =$ $R = 52$

4) $30 - 3^3 + 8 \bullet 3 \div 12 =$ $R = 5$

5) $12 \div 6 + 10 \times 3 - 12 \div 6 =$ $R = 30$

6) $80 \div 4 + 15 \div 5 - 30 \div 6 =$ $R = 18$

7) $50 + 5 * 6 - 4 - 7 * 2 + 4 =$ $R = 66$

b) Realiza las siguientes operaciones.

1) $(13 - 8) - (15 + 3) + (4 + 2) =$ $R = -7$

2) $(-3) + [(-5) + (-3) + 10] =$ $R = -1$

3) $15 + 20 - [18 + (-15) - (-16)] =$ $R = 16$

4) $-4(23-14)+2[5(24+14-35)+42]-65=$ $R=13$

5) $34+2(-12-31+24)-5(41+26+78)=$ $R=-729$

6) $18+[9-(-3)+5]=$ $R=35$

7) $-[4-(-16)]=$ $R=-20$

8) $3-[4-(5-7)]-\{9-[5-(-4)]\}=$ $R=-3$

9) $7(-3)+[2+3(-5)]=$ $R=-34$

10) $-[-13+(24-68)]-(-48+95)=$ $R=10$

Problemas

Resuelve los siguientes problemas

1. Considera -62 sumado a la resta de 38 menos -11

$R=-13$

2. Un día de invierno, la temperatura en la madrugada era de 8°C, en la tarde descendió 5°C y en la noche bajo 3°C. ¿Qué temperatura había en la noche?

$R=0°C$

3. Delia tenía $897. Tuvo que pagar una cuenta de $78.65, una de $53 y otra de $8.50. Juan le pago $101.80 que le debía. ¿Cuánto dinero tiene ahora Delia?

$R=\$858.65$

4. Un submarino se encuentra a 210 metros bajo el nivel del mar. Debido a las fuertes corrientes tiene que descender 74 metros. Más tarde decide subir 50 metros. ¿A qué profundidad se encuentra el submarino?

$$R = 234 metros$$

5. Dos hombres se contratan para realizar un trabajo de plomería por 600 pesos laborando durante cinco días. Si uno de ellos recibe un pago de 40 pesos diarios. ¿Cuál es el salario diario del otro trabajador?

$$R = \$80.00$$

Operaciones con números racionales.

Ejemplo

$$\frac{13}{25}+\frac{24}{30}-\frac{33}{45}$$

Obtenemos el m.c.m. de los denominadores

25	30	45	2
25	15	45	3
25	5	15	3
25	5	5	5
5	1	1	5
1			

(2)(3)(3)(5)(5) = 450

$$\frac{13}{25}+\frac{24}{30}-\frac{33}{45}=\frac{13\left(\frac{450}{25}\right)+24\left(\frac{450}{30}\right)-33\left(\frac{450}{45}\right)}{450}$$

$$=\frac{13(18)+24(15)-33(10)}{450}$$

$$=\frac{234+360-330}{450}$$

$$=\frac{264}{450}$$

Ejercicios

Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado:

1. $\frac{20}{30}+\frac{40}{50}=$ R. $\frac{22}{15}$

2. $\frac{89}{54}+\frac{124}{78}=$ R. $\frac{2273}{702}$

3. $\frac{12}{66}+\frac{5}{88}=$ R. $\frac{21}{88}$

4. $\frac{245}{32}-\frac{300}{62}=$ R. $\frac{2795}{992}$

5. $\frac{2}{15}-\frac{7}{18}=$ R. $-\frac{23}{90}$

Producto de números racionales

Ejemplos

1) $$\left(\frac{2}{12}\right)\left(\frac{8}{20}\right)=\frac{(2)(8)}{(12)(20)}=\frac{16}{240}=\frac{1}{15}$$

2) $$\left(\frac{13}{54}\right)\left(-\frac{28}{46}\right)=\frac{(13)(-28)}{(54)(46)}=\frac{-364}{2484}=-\frac{91}{621}$$

3) $$\left(\frac{25}{13}\right)\left(-\frac{39}{55}\right)\left(-\frac{12}{15}\right)=\frac{(25)(-39)(-12)}{(13)(55)(15)}=\frac{11700}{10725}=\frac{12}{11}$$

Ejercicios

Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

1. $\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{40}{50}\right)=$ R. $\frac{8}{15}$

2. $\left(\frac{88}{54}\right)\left(\frac{124}{78}\right)=$ R. $\frac{2728}{1053}$

3. $\left(\frac{12}{66}\right)\left(-\frac{5}{88}\right)=$ R. $-\frac{5}{484}$

4. $\left(-\frac{25}{32}\right)\left(-\frac{40}{62}\right)=$ R. $\frac{125}{248}$

5. $\left(\frac{12}{15}\right)\left(-\frac{27}{18}\right)=$ R. $-\frac{6}{5}$

6. $\left(-\frac{1540}{1500}\right)\left(-\frac{1400}{1200}\right)=$ R. $\frac{539}{450}$

7. $\left(\frac{15}{2}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{16}{25}\right)=$ R. $\frac{288}{65}$

8. $\left(-\frac{10}{4}\right)\left(\frac{10}{32}\right)\left(\frac{10}{16}\right)=$ R. $-\frac{125}{256}$

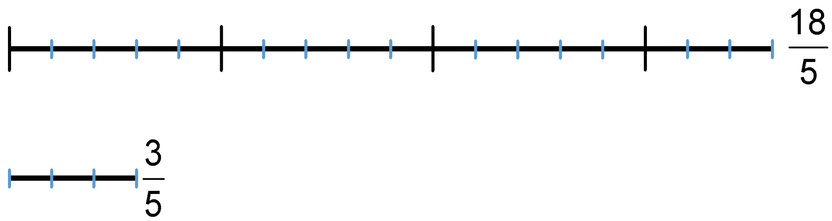
9. $\left(\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{15}{12}\right)\left(-\frac{6}{14}\right)=$ R. $\frac{10}{7}$

10. $\left(-\frac{580}{325}\right)\left(-\frac{670}{175}\right)\left(-\frac{425}{300}\right)=$ R. $-\frac{66062}{6825}$

División entre números racionales

Ejemplo

Qué pasa si queremos ver cuántas veces cabe el primer segmento de $\frac{3}{5}$ en otro de $\frac{18}{5}$



a partir del esquema anterior podemos observar que cabe 6 veces por lo que podemos expresar la operación como $\frac{18}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{6}{1}$ donde $\frac{18}{5}$ es el dividendo, $\frac{3}{5}$ es el divisor y $\frac{6}{1}$ es el cociente, observe que al cociente 6 lo expresamos como $\frac{6}{1}$

Para observar la regularidad relacionemos el denominador con el divisor, recordemos que los números enteros pueden expresarse como números racionales con denominador Recapitulando observemos que las operaciones que hemos revisado en los ejemplos anteriores son:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{18}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{6}{1}$$

Podemos observar que para las dos primeras operaciones se puede deducir un producto cruzado, esto es el numerador de dividendo por el denominador del divisor nos proporciona el numerador del cociente y denominador del dividendo por numerador del divisor nos proporciona el denominador del cociente. Veamos si la regla puede ser aplicada para la tercera operación.

$$\frac{18}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{(18)(\cancel{5})}{(\cancel{5})(3)} = \frac{18}{3} = \frac{6}{1}$$

Por lo cual podemos obtener la regla

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$; para toda b ≠ 0, c ≠ 0 y d ≠ 0

A manera de comprobación podemos aplicar la operación de multiplicación entre el cociente y el divisor para obtener el dividendo.

$$\frac{(a)(d)}{(b)(c)}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(\cancel{d})(\cancel{c})}{(b)(\cancel{c})(\cancel{d})} = \frac{a}{b}$$

Otra manera de visualizar esta operación es configurarlo de la siguiente manera, donde puede observarse que el cociente se obtiene de multiplicar extremos y asignarlos al numerador del cociente y multiplicar medios y asignarlos al denominador del cociente.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$; para toda b ≠ 0, c ≠ 0 y d ≠ 0

Ejercicios

Realiza las siguientes operaciones y simplifica la respuesta.

1. $2 \div \left(\frac{6}{16}\right) =$ R. $\frac{16}{3}$

2. $\left(\frac{88}{54}\right) \div \left(\frac{124}{78}\right) =$ R. $\frac{286}{279}$

3. $\left(\frac{12}{66}\right) \div \left(-\frac{5}{88}\right) =$ R. $-\frac{16}{5}$

4. $\left(-\frac{25}{32}\right) \div \left(-\frac{40}{62}\right) =$ R. $\frac{155}{128}$

5. $\left(\frac{12}{15}\right) \div \left(-\frac{27}{18}\right) =$ R. $-\frac{8}{15}$

Potencias y radicales.

Muchas veces es necesario realizar el producto consecutivamente para un mismo número, por ejemplo, para calcular el volumen de un cubo de 10 centímetros de arista, debemos realizar el siguiente producto (10) (10) (10). Existe una manera de expresar esta operación colocando un superíndice al número sobre el cual vamos a aplicar repetidamente el producto, este exponente es igual al número de veces que aparece nuestro número como factor, en nuestro caso observa que el 10 aparece 3 veces como factor, por lo que la expresión simplificada es 10^3. Si ahora consideramos aplicar el producto (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2), lo podemos simplificar como 2^7, donde el 2 recibe el nombre de base y el 7 el de exponente. De manera general entonces

$a^n = (a)(a)(a)......(a)$; donde n es el número de veces que aparece el factor a

Ejercicios

Determina el valor de las siguientes potencias

1. $10^5 =$ R. 100 000
2. $2^{11} =$ R. 2048
3. $(-4)^4 =$ R. 256

4. $(-5)^3 =$ R. -125

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$ R. $\frac{1}{81}$

6. $0.2^5 =$ R. 0.00032

7. $\left(-\frac{6}{9}\right)^3 =$ R. $-\frac{8}{27}$

8. $-0.5^2 =$ R. -0.25

Propiedades de los exponentes

$\left(a^n\right)\left(a^m\right) = a^{n+m}$, siendo n y m enteros positivos, a cualquier número real.

$\left(a^n\right)^m = a^{(n)(m)}$; siendo n, m números enteros positivos, a cualquier número real.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, donde n y m son números enteros y a ≠ 0.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; para n ≠ 0

$\left(a^n\right)\left(a^m\right) = a^{n+m}$

$a^0 = 1$ para a ≠ 0

$\left(a^n\right)^m = a^{(n)(m)}$

$(a^{\frac{m}{n}}) = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; para a ≠ 0, n ≠ 0

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$; para a ≠ 0

Ejercicios

a) Aplicando las propiedades de los exponentes simplifica las siguientes operaciones

1. $\left(3^3\right)\left(3^9\right) =$ R. 3^{12}

2. $\left(10^3\right)\left(10^5\right) =$ R. 10^8

3. $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^4 =$ R. $\left(\frac{4}{3}\right)^8$

4. $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right)^2 =$ R. $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$

b) Aplicando las propiedades de los exponentes en la división simplifica las siguientes operaciones.

1. $\frac{5^4}{5^2} =$ R. 5^2

2. $\frac{26^{10}}{26^{12}} =$ R. $26^{-2} = \frac{1}{26^2}$

3. $\frac{50^3}{50^{-3}} =$ R. 50^6

4. $\frac{(-6)^2}{(-6)^{-8}} =$ R. $(-6)^{10}$

5. $\frac{-20^{3}}{20^{6}} =$ R. $-20^{-3} = -\frac{1}{20^{3}}$

c) Aplicando las propiedades de los exponentes racionales expresa las siguientes operaciones a su forma alterna (radical o exponente racional).

1. $17^{\frac{2}{3}} =$ R. $\sqrt[3]{17^{2}} = \left(\sqrt[3]{17}\right)^{2}$

2. $101^{\frac{1}{10}} =$ R. $\sqrt[10]{101}$

3. $0.56^{-\frac{1}{3}} =$ R. $\frac{1}{\sqrt[3]{0.56}}$

4. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}} =$ R. $\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$

5. $\left(\frac{23}{45}\right)^{\frac{3}{2}} =$ R. $\sqrt{\left(\frac{23}{45}\right)^{3}} = \left(\sqrt{\frac{32}{45}}\right)^{3}$

6. $\sqrt{\left(3^{3}\right)^{3}} =$ R. $3^{\frac{9}{2}}$

7. $\sqrt[5]{1145} =$ R. $1145^{\frac{1}{5}}$

8. $\frac{1}{\sqrt{23}} =$ R. $23^{-\frac{1}{2}}$

Significado contextual de las operaciones

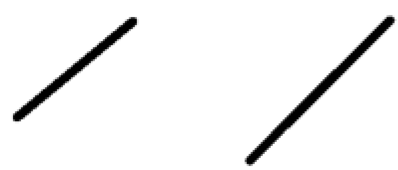
Ejemplos

1. Dos varillas se soldarán una tras otra. Una de ellas mide $\frac{3}{5}$ de metro y la otra $\frac{5}{8}$ de metro. ¿Cuál será la longitud de la varilla resultante?

La primera técnica que siempre debes aplicar es la de preguntarte, ¿cuál es la incógnita?, en otras palabras, ¿qué es lo que quieres conocer?, en este caso, la incógnita es la longitud de la varilla resultante.

Para el desarrollo del plan debes considerar los datos que el problema te proporciona, y cómo es que se relaciona con la incógnita. Puedes elaborar un diagrama si lo consideras necesario.

Entonces, se tienen dos varillas de diferentes medidas, tal como se muestra en la figura



$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$

Dichas varillas se fundirán una tras otra para formar una sola, lo que significa que tienes sumar sus longitudes para conocer la longitud total de la varilla, esto terminará siendo una suma de fracciones cuyo resultado es $\frac{49}{40}$ de metro.

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{8}$$

2. Un pliego rectangular de cartulina ilustración tiene dimensiones $\frac{2}{3}$ de metro por $\frac{3}{5}$ de metro. ¿Cuál es su área?

De acuerdo con las técnicas propuestas, primero debes identificar la incógnita. Escribe cual consideras que es la incógnita.

Luego debes elaborar un plan de desarrollo en el cual primero debes relacionar los datos que se te proporcionan con la incógnita, puedes hacer un dibujo.

Una vez que has realizado el plan de desarrollo, resuelve el problema. ¿Cuál es el resultado?

Si el resultado que obtuviste no es $\frac{2}{5}$ revisa tu procedimiento y encuentra cual es el error, elabora un nuevo plan de desarrollo si es necesario.

Ejercicios

Lee detenidamente y responde a lo que te solicitan.

1. Una pipa llena una alberca (originalmente vacía) a 3/7 de su capacidad. Posteriormente se abre el desagüe y vacía los 2/5 de su capacidad. ¿Qué parte de la capacidad queda?

R. 1/35 de su capacidad

2. Rosario se comió 1/3 de un pastel y Guadalupe 2/5 partes del mismo pastel, ¿Qué parte del pastel comieron entre las dos?

R. 11/15 partes del pastel

3. ¿Qué parte del costo se pierde cuando se vende en $150 lo que ha costado $200?

R. Se pierde ¼ del costo o 25 % del costo

4. Una planta tiene una altura de 28/5 de metro, al transcurrir una semana su altura alcanza los 27/3 metros. ¿cuánto creció esa semana?

R. Creció 51/15 de metro

Autoevaluación de la unidad 1

1. Resuelve los siguientes ejercicios

a) $8-2\times 2+6+7\times 3-3\times 4+16=$ $\quad R=35$

b) $[(-250+20)-2(-55-10)]\div(-100)=$ $\quad R=1$

c) $54+(-20)-(-4)+5-(-2)=$ $\quad R=45$

d) $2002\div(-2)-(3-2)(5-1)+6(-1-3)=$ $\quad R=-1029$

2. Escribiendo 3 páginas en una hora y trabajando 8 horas al día, ¿Cuántos días se requieren para escribir un libro de 912 páginas? $R=38 días$

3. Simplifica las siguientes expresiones

a) $\sqrt{\sqrt[3]{17^5}}=$ R. $17^{\frac{5}{6}}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{12}\right)^4}=$ R. $\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{4}{3}}$

4. Un pedazo rectangular de cartulina ilustración tiene dimensiones a/b de m. por c/d de m. ¿Cuál es su área?

8) R. Su área es ac/bd metros cuadrados

5. Para que Enrique pueda gastar 70 pesos diarios y ahorrar 6720 pesos al año tendría que ganar 600 pesos más al mes. ¿Cuál es su sueldo mensual? (considerar meses de 30 días).

$$R = 2060\, pesos$$

6. Divide el número 403 327 884 entre los siguientes números 280 869, 270 327, 267 814. La solución que encontraras en los tres casos es un número entero y corresponde al año en el que nació Cristóbal Colon, el año en el que descubrió América y el año en el que murió respectivamente.

$$R = 1436, 1492, 1506$$

UNIDAD 2. VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

Propósito. Analizará y modelará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades, los casos en que estas sean proporcionales y cuando la razón de sus incrementos lo sean, utilizando los registros verbal, tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y continúe con la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Aprendizajes

- Identifica las variables y su relación en una situación dada.
- Calcula e interpreta la razón de cambio.
- Transita entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, tabular, y gráfica) de diferentes tipos de variación
- Reconoce cuando la relación entre dos variables corresponde a variación directamente proporcional.
- Modela situaciones cotidianas con funciones lineales.
- Reconoce la razón de cambio constante como característica de la función lineal.
- Reconoce e interpreta la condición inicial.
- Reconoce la razón de cambio constante como característica de la función lineal.
- Reconoce e interpreta la condición inicial.

Variación proporcional

La variación proporcional es una relación matemática que describe cómo una cantidad cambia en función de otra, de forma que el cambio de una es directamente proporcional al cambio de la otra. Es fundamental porque permite predecir y entender fenómenos que siguen una proporción constante, como las leyes de la física, los cálculos financieros y la resolución de problemas cotidianos. Su importancia radica en su capacidad para simplificar y modelar situaciones complejas, facilitando el análisis y la toma de decisiones en diversas áreas.

Ejercicios

1. Carlos tiene un puesto de tacos al pastor ubicado en el cruce de dos avenidas principales. Por las noches, su amigo Juan Manuel le echa una mano para atender a los clientes. Las personas suelen pedir cantidades variadas de tacos, lo que ocasionó que Juan Manuel: se le complicaba calcular el monto exacto que debía cobrar a cada cliente. Si el precio de cada taco al pastor es de $22.

Responde las siguientes preguntas:

¿Cuál es el monto total que debe cobrar Lucino si un cliente pide 5 tacos al pastor? ___________________________

Si un cliente paga con $200 y pide 7 tacos, ¿cuánto cambio debe recibir? ___________________

¿Cuántos tacos puede comprar un cliente con $500? _________________

Si un cliente pidió tacos por un total de $154, ¿cuántos tacos pidió? ___________

Si Lucino cobra mal y entrega un cambio incorrecto, ¿qué estrategias podría usar para evitar errores en los cálculos? ______________________

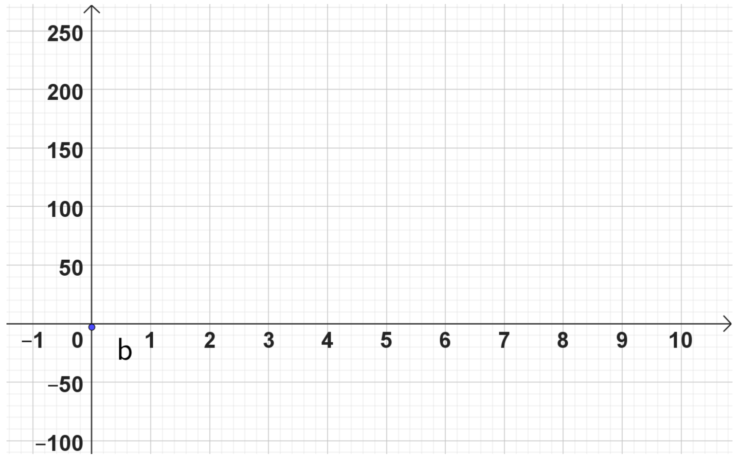
Completa la tabla 1.

Precios de Tacos al Pastor		
Cantidad de tacos	Cobro total	Parejas ordenadas $[x,\ y]$
1	22	
2		
3		
4	88	
5		
6		
7		
8	176	
9		
10	220	

Como puedes ver, cada pareja ordenada se denomina coordenada, donde el primer número de la pareja se conoce como abscisa y el segundo número como ordenada.

Para trazar el sistema de ejes coordenados, se utiliza dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto común, llamado origen del sistema de coordenadas. La recta horizontal se conoce como eje de las abscisas la cual se representa con la letra x, y la recta vertical se denomina eje de las ordenadas y se representa con la letra y, Así que una pareja ordenada se escribe como (x, y).

Gráfica 1. Tacos al pastor y monto total



¿Qué relación se observa entre el consumo de tacos al pastor y la cantidad de dinero que se debe cobrar según la tabla 1? __________________________

¿De qué depende la cantidad de dinero que se debe cobrar en este ejemplo?_____________

La variable independiente se acostumbra a representar con la letra x, y la variable dependiente con la letra y

¿Quiénes representan las variables en el problema Carlos y su amigo, considerando que los tacos representan la variable _____ y el monto la variable ____?

Como puedes ver la variable independiente simboliza, un dato que proporcionamos y nos permite determinar o calcular la magnitud de otro, que se llama variable dependiente Si quisiéramos relacionar a la variable independiente con la variable dependiente, lo haríamos mediante una regla de correspondencia, que podría ser una ecuación o fórmula.

Llena la siguiente tabla, Precios de Tacos al Pastor y verifica si hay una variación

Tabla 2. Precios de Tacos al Pastor

Cantidad de tacos (x)	Total, a cobrar (y)	$\frac{y}{x}$
1	22	
2		
3		
4	88	
5		
6		
7		
8	176	
9		
10	220	

En la columna y/x hay un valor constante, lo que permite deducir la relación entre x (cantidad de tacos) y y (total a cobrar), se relaciona con la siguiente expresión

$$\frac{y}{x} = 22$$

Si despejamos y, la expresión podría escribirse de la manera siguiente

$$y = 22x$$

Al cociente que se obtiene al dividir el incremento o decremento de una cantidad entre el incremento o decremento correspondiente a la otra, se le llama razón de cambio.

Por lo tanto, la razón del problema anterior $a = \frac{y}{x} = 22$

Cuando la razón de cambio entre dos cantidades es constante, existe variación entre las dos cantidades. Si la razón de cambio entre dos variables es cero, significa que las variables no están relacionadas.

Ejemplo

Pensemos que rentamos el servicio de internet libre por tiempo en lugar de gigas, cada hora nos cuesta 10 pesos por lo tanto al cabo de varias horas el costo será:

Tabla 3. Tiempo y costo de servicios

Tiempo (horas)	1	2	3	4	5
Costo $	10	20	30	40	50

Analicemos el valor, que corresponde a la razón de cambio de estas variables:

Tabla 4. Razón de cambio

$\frac{Costo}{tiempo}$	$\frac{10}{1} = 10$	$\frac{20}{2} = 10$	$\frac{30}{3} = 10$	$\frac{40}{4} = 10$

Se puede observar que la razón es constante como a cero horas se paga cero pesos entonces la ecuación debe ser $y = ax$; y a en este caso es la razón de cambio que es 10 por lo tanto queda:

$$y = 10x$$

Ejercicios

Lee atentamente cada uno de los siguientes reactivos y realiza lo que se indica en cada caso. Luego, compara tus resultados con la respuesta proporcionada.

1. El precio de un pasaje del metro es de 5 pesos y te gastas un pasaje de ida solamente todos los días, determina cuanto te gastas del día 2, 5 15 y 23 del mes, recuerda que el modelo matemático es $y = ax$

2. Los autos eléctricos funcionan igual que los celulares es decir si el celular no lo utilizas la pila prácticamente no pierde energía, pero si todo el día lo estas utilizando con el máximo brillo la batería del celular se termina rápidamente lo mismo con el auto eléctrico si lo usas utilizando al máximo el acelerador la batería se termina más rápido. Tanto en los celulares como en los carros se mide la batería en amperes hora y esta se entiende mejor en porcentaje por esa razón vemos en el celular el porcentaje de carga que tenemos y lo mismo ocurrirá en los vehículos eléctricos. Después de toda esta explicación determina si representa una proporción directa. Si lo es, determina la proporcionalidad y el modelo matemático.

% de carga	5	20	40	80
Km recorridos	37.5	150	300	600

3. Se revisaron una serie de televisores de diferentes modelos y marcas y se comparó el cociente ente el largo y el ancho, los resultados se exponen en la tabla de abajo, hallar si existe la constante de proporcionalidad y el modelo matemático que lo represente.

Medida del largo	20	30	50	70
Medida del ancho	12.36	18.54	30.90	43.26

4. la velocidad contratada por una familia es de 20 megas por segundo, construya una gráfica de esta proporción directa y determine en cuanto tiempo tarda en llegar a 2000 megas que es el tamaño de una película de Netflix en promedio.

5. A partir de la siguiente tabla, donde se representa el tamaño de la base de un triángulo cuya altura es de 6 cm. Determinar si la tabla representa una proporción directa y en caso de serlo, hallar la constante de proporcionalidad y el modelo matemático que describa el área en función de la base.

Medida de la base (cm)	3	4	8	10
Área (cm^2)	9	12	28	30

6. Deseas juntar para tu moto itálica, cada quincena juntas 856 pesos, cuanto juntaras en 5, 7, 19 y 29 quincenas, después de este tiempo te alcanza para comprarla, la moto cuesta 25 mil pesos. Determina también el modelo matemático, la tabla donde se registren los valores correspondientes y la gráfica.

7. Un sistema de transporte te cobra 29 pesos por día o 385 pesos por quince días, 290 pesos por 10 días y 200 pesos por 5 días, determine el modelo matemático de esta proporción, la tabla que relaciona el cobro por día en 4, 6, 9 y 15 días y determine que paquete le conviene más.

8. A partir de la siguiente tabla determinar si representan una relación proporcional directa de ser así, hallar la constante de proporcionalidad, la gráfica y el modelo matemático

Cantidad de publicidad (anuncios) del uso del cinturón de seguridad	200	500	700	1000
Cantidad de personas que usan el cinturón	3000	7500	10500	15000

9. Un profesor de una escuela privada gana 70 pesos la hora y uno de una escuela pública gana 50 pesos la hora sin embargo al de la escuela pública le pagan un bono por cada 10 horas de 300 pesos, que maestro gana más a los 5, 10, 15 y 20 horas. Obtenga la tabla de ambos profesores y obtenga el modelo correspondiente del profesor de la escuela de paga y determine quién gana más, bajo que circunstancias.

10. Un estudiante sabe que si hace 48 abdominales después ya no se puede levantar, se tarda 2 segundos en hacer una abdominal, ¿Cuánto tiempo va a tardar en no poder levantarse? Desarrolle la tabla presentando tiempos de 2, 20, 40 y 80 segundos.

Respuestas

1. Como te das cuenta la razón de cambio es el costo del pasaje y por tanto la ecuación es: $y = 5x$

Donde y es el precio y x es la cantidad de pasajes.

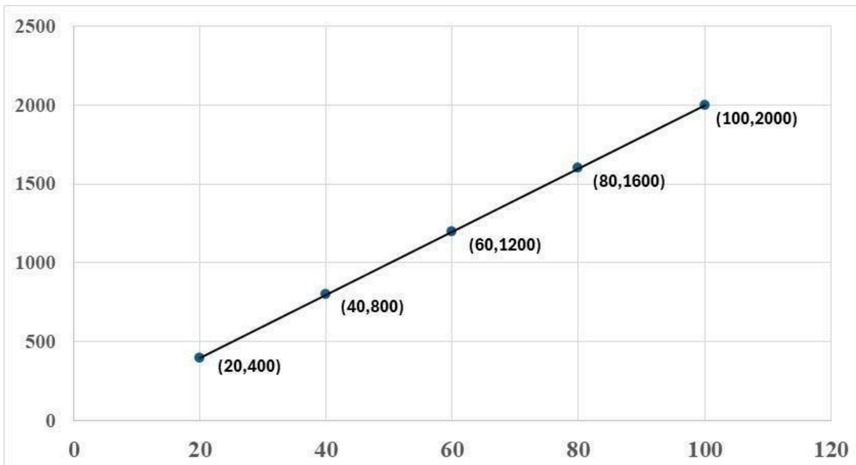
Pasajes	2	5	15	23
Precio ($)	10	50	75	115

2. La constante de proporcionalidad es la misma y es de $a = 7.5$ y modelo matemático es de $y = 7.5x$

3. En este caso al dividir el largo entre el ancho en todos los casos nos da 1.618 lo que nos da la proporción aurea que es la proporción que la mayoría de los que venden televisores utiliza debido a que es una proporción agradable a la vista de las personas. Esta proporción ha sido utilizada desde hace mucho tiempo por grandes pintores.

4.

Megas	400	800	1200	1600	2000
Tiempo (s)	20	40	60	80	100

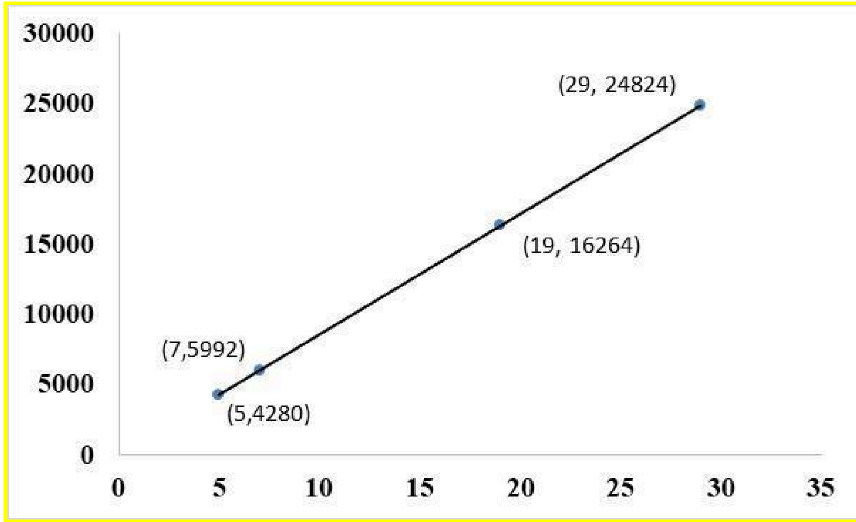


Por lo tanto, la carga de la película tarda 100 segundos, es decir, 1 minuto y 40 segundos.

5. No se representa en la tabla una proporción directa porque el resultado de la constante de proporcionalidad en todos los casos debe ser 3, sin embargo, este resultado no se obtiene cuando el lado de la base de la figura mide 8, donde la razón de proporcionalidad es de 3.5, lo que nos indica que no se trata de una proporción directa.

6.

Quincenas	5	7	19	29
Dinero ahorrado ($)	4280	5992	16264	24824



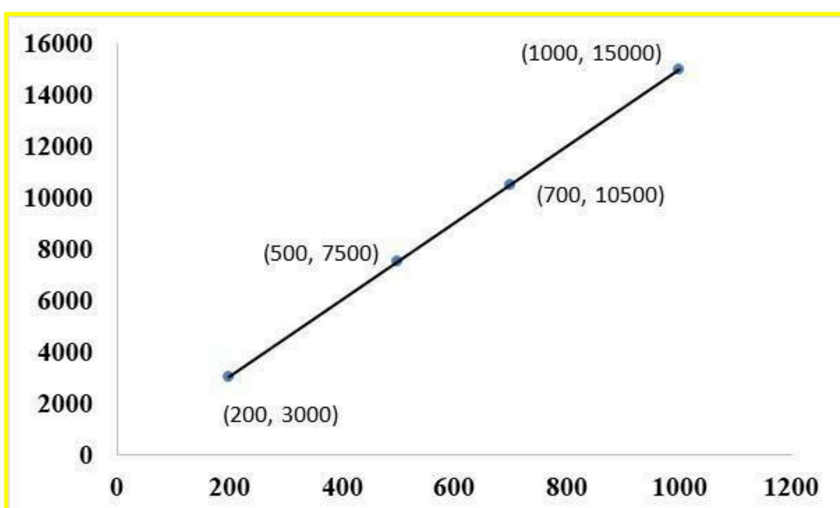
Nota: Después de este tiempo, no es suficiente, pero le falta poco

7. El modelo matemático es $y = 29x$

Costo por día	29	145	290	435
día	1	5	10	15

Nota: Le resulta más conveniente el paquete quincenal

8. La proporción es $a = 15$, por lo tanto, el modelo matemático es $y = 15x$



9. Para el profesor de la escuela privada, su tabla es la siguiente:

Pago por hora	350	700	1050	1400
Horas trabajadas	5	10	15	20

Para el profesor de escuela de publica su pago es:

Pago por hora	250	500+300=800	750+300=1050	1000+600=1600
Horas trabajadas	5	10	15	20

En la tabla del profesor de escuela privada la constante de proporcionalidad es $a = 70$ pero en el caso de la escuela pública no hay. Por lo tanto, el modelo matemático para el profesor de la escuela de privada es $y = 70x$

Observando ambas tablas, al profesor de privada gana más solo si trabaja 5 horas, en todos los demás casos, el profesor de escuela pública gana igual o más.

10. El modelo matemático es $y = 0.5x$, la tabla es

# de abdominales	1	10	20	40
tiempo	2	20	40	80

Se puede observar que, Para realizar las 48 abdominales requiere de 96 segundos.

Funciones lineales

La función lineal es una relación matemática en la que una variable depende de otra de manera directa, representada por una ecuación de la forma $f(x) = ax + b$ donde f(x) denota un valor que depende de x. Su importancia radica en que describe fenómenos que muestran un cambio constante, como el crecimiento uniforme o el costo por unidad en economía. Además, es una de las funciones más simples y fundamentales en matemáticas, utilizada para modelar situaciones del mundo real y en la resolución de problemas en ciencias, ingeniería y economía.

Ejercicios

1. Dada la relación entre las parejas de números, encuentra la regla general que se utiliza para obtener el segundo valor (y) a partir del primero (x), y contesta las siguientes preguntas que se enlistan a continuación.

Tabla.3. Relación de parejas de números

x	y
1	4
5	8
7	10
10	13
20	23

¿Cuál es la regla utilizada? ____

Si el valor de x es 15, ¿cuál será el valor de y siguiendo la regla? ________

¿Qué valor de x corresponde a $y = 30$, bajo la misma regla? ___________

Verifica si el par $(12, 16)$ cumple con la regla y = ______________________

Una forma de representar esta relación es mediante parejas ordenada, de tal manera que la primera coordenada sea un valor propuesto y la segunda coordenada sea el valor correspondiente calculado.

2. Se puede observar que no hay dos o más parejas distintas con el mismo primer elemento, por lo que podemos concluir que, cuando una relación cumple con tal condición se dice que tiene una función del conjunto de los primeros elementos con el conjunto de los segundos elementos, podemos definir una función de la siguiente manera.
3. José adquiere una tarjeta de Movilidad Integrada (MI) con un costo inicial de $15, necesaria para viajar en el metro. Cada vez que usa el metro, recarga la tarjeta, y cada viaje tiene un costo de $5. Plantea una función lineal que represente la relación entre el costo total y el número de viajes realizados.

Para plantear una función lineal que represente la relación entre el costo total C y el número de viajes x, debemos tener en cuenta los siguientes

Datos:

Costo inicial de la tarjeta $15

Costo de viaje adicional $5

Con los datos presentados completa la tabla 2. Costo total número de viajes

Responde las siguientes preguntas

¿Cuál es el costo total que paga José si realiza un solo viaje en metro? _____

¿Cuánto debe pagar José por realizar tres viajes en metro? _______________

¿Cuánto tiene que pagar José por realizar cinco viajes en metro? _________

¿Qué monto paga José si realiza siete viajes en metro? __________________

¿Cuánto debe pagar José si compra únicamente la tarjeta y no realiza ningún viaje? _______

¿Qué representa el valor de $C\ (x)$ _________.

Este valor se le conoce como condición inicial y corresponde al valor de b, $entonces\, b\ =$__

Tabla 2

Número de Viajes (x)	Costo total $C\ (x)$
0	15
1	
2	25
3	
4	35
5	
6	45
7	

A continuación, escribe en la tabla 3, como varían las variables x y y de una columna a otra.

El valor de variación:$a\ =$_______

Cuando una relación es una función se acostumbra a escribir $y\ =\ f(x)$ para representar el hecho de que las variables y está en función de la variable x

Dado que es una función, se puede escribir como $f(x) = x$ + ____, esta expresión es una regla que indica como calcular el valor que tomará la variable dependiente para un valor particular de la variable independiente.

Al conjunto de números a los cuales se les aplica la regla mencionada se conoce como dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente, en tanto que al conjunto de valores de la variable dependiente se le llama imagen de la función.

Tabla 3. Variación de variables x, y

Número de Viajes (x)	Costo total $C\ (x)$	Δx	Δy	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$
0	15			
1				
2	25			
3				
4	35			
5				
6	45			
7				

Ejercicios

1. La expresión que relaciona a las variables $f(x) = 2x + 5$, representa una función lineal. Traza la gráfica y determina su imagen si su dominio es el conjunto de números: -5,-3, -1, 0, 2, 3, 8.

Una *función lineal* es aquella para la cual a cada valor de la variable independiente x se le asocia el número ax + b, donde a y b son números constantes con a diferente de cero.

2. La tarjeta de acceso al sistema de transporte colectivo metro tiene un costo de $10.00, y cada viaje tiene un costo de $5.00. Si al hacer la compra de la tarjeta, también se desea realizar el pago de 3, 5, 11 y 17 viajes, calcular el monto a pagar. Primero debemos definir las variables, por lo que debemos recordar que existen dos la variable independiente (x) y la variable dependiente (y). La variable independiente se caracteriza porque su valor depende del valor que tenga la variable independiente. En este caso el pago depende del número de viajes que hagas por esa razón la variable independiente son los viajes y la dependiente el pago.

Construimos la tabla 4 para organizar la información, responder a la pregunta y hallar los demás elementos de la función.

Tabla 4. Costo total número de viajes

Viajes Variable (x)	3	5	11	17
Pago ($) Variable (y)	25	35	65	95

Ahora bien, para obtener la ecuación que representa este ejemplo debemos determinar primero el costo fijo que implica usar el servicio, siendo este caso los $10 que cuesta la tarjeta de acceso al metro, es decir antes de comenzar a viajar hay que pagar $10 es decir en este caso x = 0, por lo tanto, este precio es la ordenada al origen, a la cual identificamos como b; mientras que la constante de proporcionalidad se calcula como sigue:

donde y – b = pago total menos costo fijo de la tarjeta cómo se observa, la constante de proporcionalidad (costo de un viaje), representa la relación de variación entre el monto a pagar y el número de viajes. Esa relación de variación la podemos observar en el grado de inclinación de la recta que representa la gráfica de la función, por cada unidad que avanza "x", "y" aumenta 5 unidades.

Por lo tanto, el modelo matemático que describe el comportamiento de los datos es el siguiente:

$$y = 5x + 10$$

Tabla 5. Viajes constantes de proporcionalidad

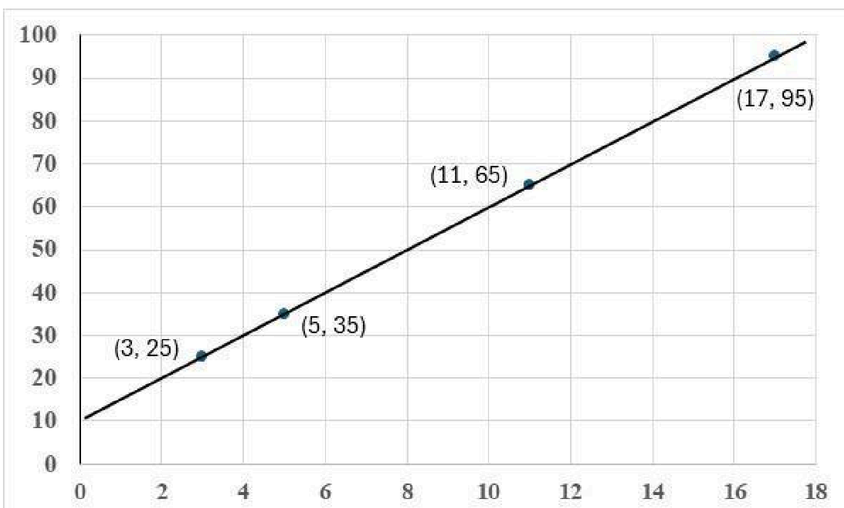
$\frac{y-b}{viajes}$	Constante de proporcionalidad
$\frac{25-10}{3}$	5
$\frac{35-10}{5}$	5
$\frac{65-10}{11}$	5
$\frac{95-10}{17}$	5

Donde el 10 representa el costo fijo que, se realiza por única vez al comprar la tarjeta y que ya vimos que es la ordenada al origen, pero el 5 representa el costo de cada viaje y recibe el nombre de constante de proporcionalidad, representándose a su vez con la letra a, la cual también se conoce con el nombre de variación. La ecuación determinada tiene la forma $Y = ax + b$.

En este caso, la gráfica 2, representa una función creciente. Esto significa que, al aumentar la variable independiente la variable dependiente también aumenta; esto lo podemos identificar al "leer" la gráfica de izquierda a derecha y nos damos cuenta de que la recta tiene una tendencia hacia arriba, lo que justifica el nombre de función de ser creciente.

Variable independiente (x): Cantidad de viajes.	Dominio de la función: 3, 5, 11, 17	Modelo matemático $y = 5x + 10$
Variable dependiente (y): Monto a pagar ($)	Rango de la función: 25, 35, 65, 95	

Gráfica 2. Representación gráfica cantidad de viajes monto a pagar:



3. Se tiene una cisterna con 1300 litros de agua, y una llave abierta desaloja 60 litros por minuto. Determina cuántos litros quedan en el depósito después de 2, 4, 10 y 16 minutos de estar abierta la llave.

Usaremos la tabla 6, para obtener la información y responder a la pregunta y hallar los demás elementos de la función:

En esta tabla 6. los valores del renglón de minutos conforman el dominio de la función (valores de la variable independiente), los valores del renglón de litros forman el rango de la función (valores de la variable dependiente) y el volumen de agua que queda en la cisterna está en función (depende) del tiempo que opera la llave.

Tabla 6. Tiempo cantidad de agua.

Tiempo x (minutos)	2	4	10	16
Cantidad de agua y (litros)	1180	1060	700	340

Se debe determinar cuál es la variable independiente en este caso son los minutos y la dependiente los litros de agua. Ahora conociendo cual es la variable dependiente debemos identificar cual es la condición inical “b” para esto hay que preguntarse ¿En el minuto cero cuantos litros se tenía?, en este caso se tenía 1300 litros lo que significa que este valor es la ordenada al origen ya solo nos falta encontrar la constante de proporcionalidad.

Por lo tanto, el modelo matemático el siguiente: $y = 1300 - 60x$, el cual tiene la forma de una ecuación lineal general $y = ax + b$.

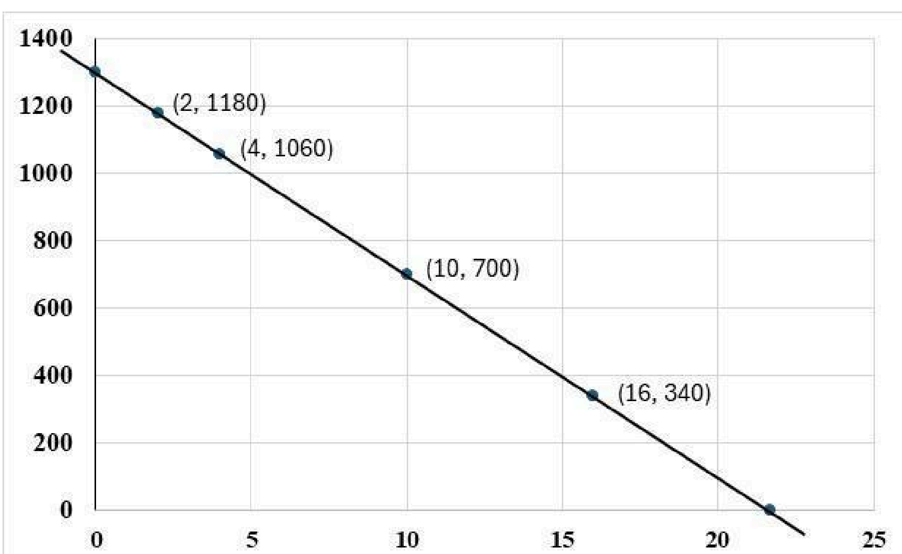
<table>
<tr><td>Variable independiente x tiempo (minutos)</td><td>Dominio de la función:
$\left[0, \frac{65}{3}\right]$</td><td rowspan="2">Modelo matemático
$y = -60x + 1300$</td></tr>
<tr><td>Variable dependiente y Volumen (litros)</td><td>Rango de la función
$[0, 1300]$</td></tr>
</table>

Para ello se desarrolla la siguiente tabla 7.

Tabla 7. Relación entre Minutos y variación

$\frac{y(litros)}{x(minutos)}$	Variación (a)
$\frac{1180-1300}{2}$	-60
$\frac{1060-1300}{4}$	-60
$\frac{700-1300}{10}$	-60
$\frac{340-1300}{16}$	-60

Gráfica 3. Relación tiempo cantidad de agua



En este caso la gráfica nos representa una función decreciente, es decir; cuando la variable independiente aumenta la variable dependiente disminuye. Esto se observa al “leer” la gráfica de izquierda a derecha, y nos damos cuenta de que la recta tiene una tendencia hacia abajo, de ahí que se catalogue como una función decreciente. El punto donde la recta corta al eje “x” representa el tiempo en el que la cisterna se ha vaciado en su totalidad, que en este caso está entre los 21 y 22 minutos.

Autoevaluación de la unidad 2

Lee cuidadosamente los siguientes problemas y calcula en cada caso los elementos de la función lineal, comparando tus resultados con la respuesta presentada.

1. El costo simplemente por el uso de la aplicación uber es de $18 pesos, esto es, antes de que empiece su viaje usted ya tiene que pagar esta cantidad y lo mismo si lo cancela. Por cada kilómetro recorrido se pagan $2.90 pesos, hallar el monto a pagar si se recorren 6, 8, 12 y 14 kilómetros.
2. El saldo de un teléfono móvil es de $284.00, y en promedio se usan $34.00 en un día; hallar el saldo que queda después de 1, 4, 6 y 8 días.
3. Un resorte en reposo tiene una longitud de 14 cm, y por cada 60 gramos que se colocan sobre él se comprime 0.5 cm, determinar cuántos centímetros tendrá el resorte si se colocan sobre de él 120, 300, 420 y 540 gramos.
4. Una arrendadora de automóviles realiza un cobro inicial de $330.00, además de $31.00 por cada kilómetro recorrido; hallar el pago a realizar si el automóvil recorrió 25, 30, 50 y 60 kilómetros.
5. Fabiola tiene ahorrados $650.00, y en promedio gasta $51.00 en un día, hallar cuánto dinero tendrá después de 3, 5, 7 y 9 días.
6. Beatriz tiene un capital de $340.00, y decide vender golosinas, de las cuales tiene una ganancia promedio de $1.50 por dulce que vende, determinar ¿cuánto

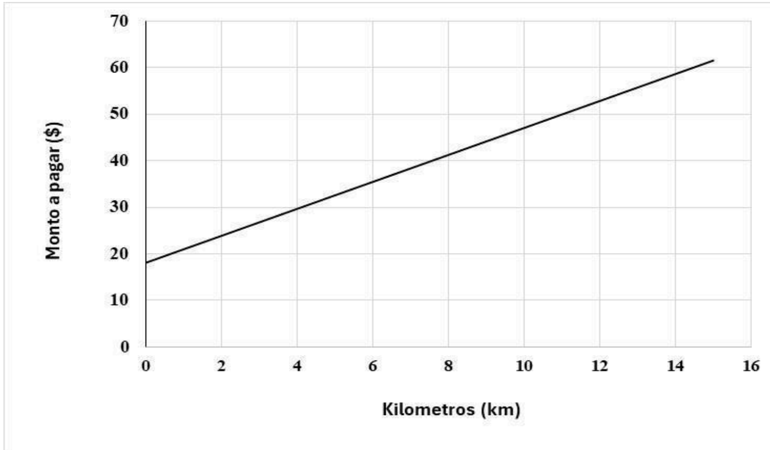
dinero tendrá después de vender 5, 11, 22 y 53 dulces? y ¿Cuánto dulces debe vender para recuperar su inversión?

7. La leche tiene 12 células por mililitro de bacterias después de ser ordeñada, lo cual es aceptable, pero a temperatura ambiente después de una hora se tiene 15, cuatro horas 24 y 16 horas 60. Determinar en cuanto tiempo se llega a 106 que es la cantidad máxima aceptable.
8. La población inicial en cierta ciudad es de 500 habitantes, y su tasa de crecimiento anual es de 47 habitantes, determinar cuántos habitantes se tendrán en dicha población después de 5, 8, 11 y 12 años.
9. Una varilla metálica tiene una temperatura de 120°C, se sumerge en un refrigerante que disminuye su temperatura 1.3°C cada minuto, determinar la temperatura que tendrá 19, 23, 31 y 37 minutos.
10. El empleado de una agencia automotriz registra 38 automóviles vendidos, se espera que ahora venda en promedio 2 autos mensuales, determinar cuántos autos habrá vendido en total después de 17, 20, 23 y 26 meses.

Respuestas de los ejercicios

1.

Variable dependiente (y) Monto por pagar ($)	Rango: $y \leq 18$	Modelo matemático: $y = 2.9x + 18$
Variable independiente (x) Kilómetros (km)	Dominio. $x \geq 0$	

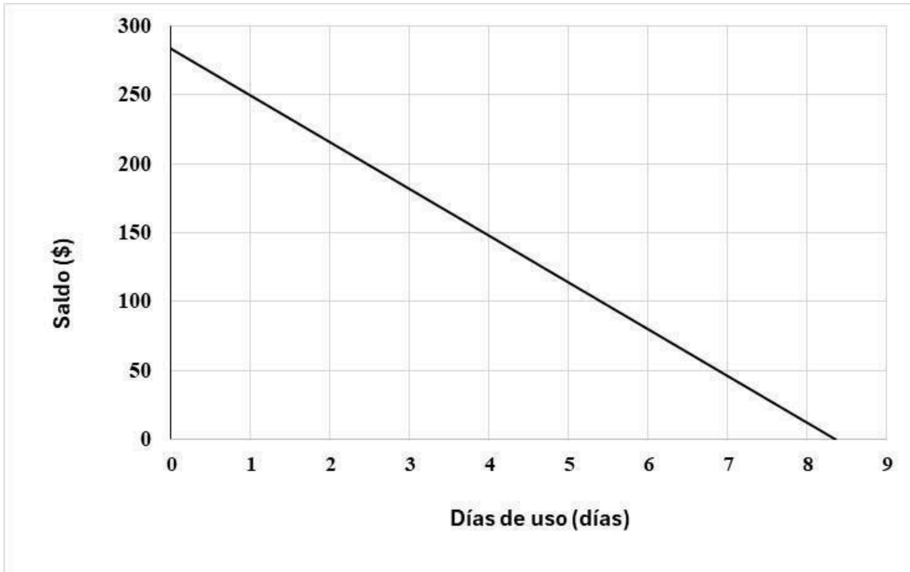


Una vez obtenida la ecuación, el monto a pagar por recorrer 6, 8, 12 y 14 kilómetros es el siguiente

Kilómetros (km)	Monto por pagar ($)
6	35.4
8	41.2
12	52.8
14	58.6

2.

<table>
<tr><td>Variable dependiente (y)
Saldo ($)</td><td>Rango:
$0 \leq y \leq 284$</td><td rowspan="2">Modelo matemático:
$y = -34x + 284$</td></tr>
<tr><td>Variable independiente (x)
Días de uso (días)</td><td>Dominio.
$0 \leq x \leq \frac{142}{17}$</td></tr>
</table>



Por lo tanto, el saldo que queda después de 1, 4, 6 y 8 es simplemente colocar estos valores en la ecuación $y =- 34x + 284$ donde los valores mencionados son los valores de x.

Si x = 1, $y =- 34(1) + 284 =- 34 + 284 = 250$

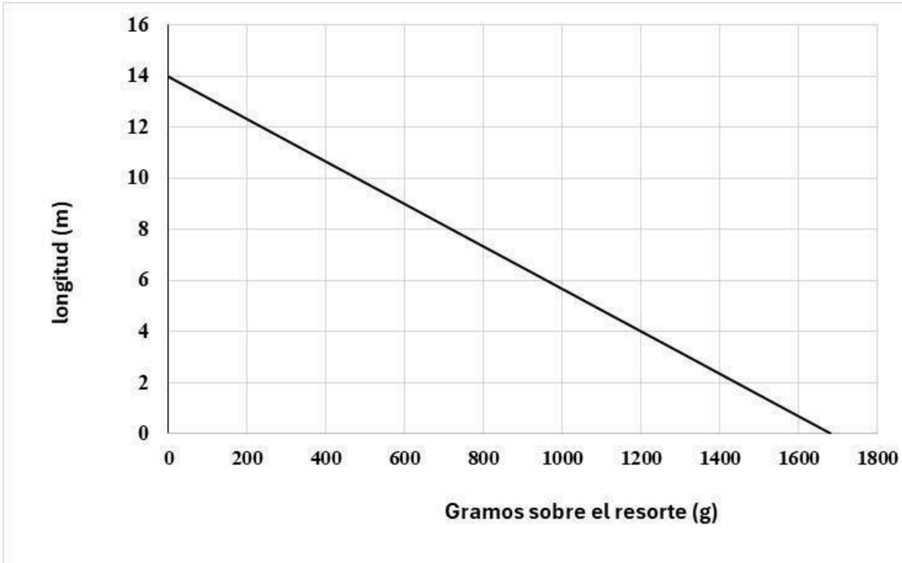
si x = 4, $y =- 34(4) + 284 =- 136 + 284 = 148$

si x = 6, $y =- 34(6) + 284 =- 204 + 284 = 80$

si x = 8, $y =- 34(8) + 284 =- 272 + 284 = 12$

3.

<table>
<tr><td>Variable dependiente (y)
Longitud (cm)</td><td>Rango:
$0 \leq y \leq 14$</td><td rowspan="2">Modelo matemático:
$y =- \frac{1}{120}x + 14$</td></tr>
<tr><td>Variable independiente (x)
Gramos sobre el resorte (g)</td><td>Dominio.
$0 \leq x \leq 1680$</td></tr>
</table>



Por lo tanto, el número de centímetros que tendrá el resorte si se colocan sobre de él 120, 300, 420 y 540 gramos. Al colocar estos valores en la ecuación $y =-\frac{1}{120}x + 14$ donde los valores mencionados son los valores de x.

Si x = 120 entonces $y =-\frac{1}{120}(120) + 14 =- 1 + 14 = 13$

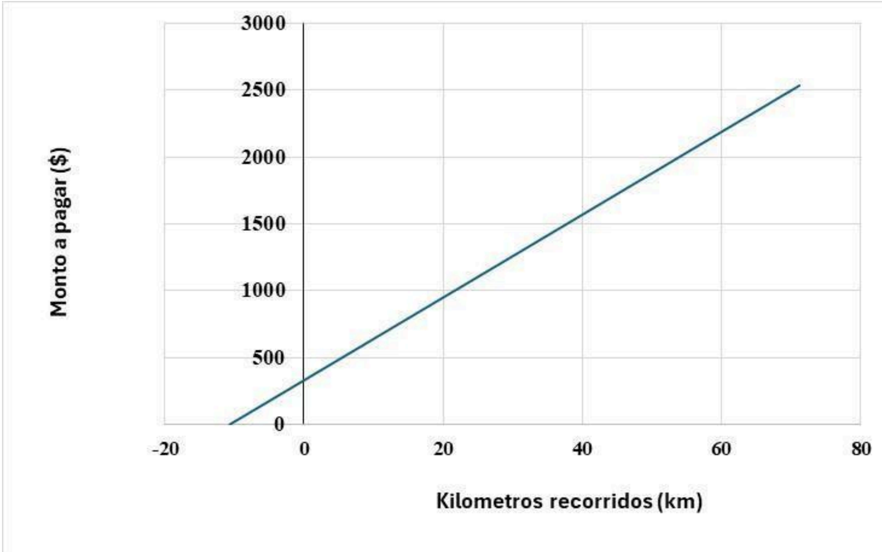
si x = 300 entonces $y =-\frac{1}{120}(300) + 14 =-\frac{5}{2} + 14 = \frac{23}{2}$

si x = 420 entonces $y =-\frac{1}{120}(420) + 14 =-\frac{7}{2} + 14 = \frac{21}{2}$

si x = 540 entonces $y =-\frac{1}{120}(540) + 14 =-\frac{9}{2} + 14 = \frac{19}{2}$

4.

Variable dependiente (y) Monto por pagar ($)	Rango: $y\geq330$	Modelo matemático: $y = 31x + 330$
Variable independiente (x) Kilómetros recorridos (km)	Dominio. $x\geq0$	



Por lo tanto, el monto a pagar si el automóvil recorrió 25, 30, 50 y 60 kilómetros es:

Si x = 25 entonces $y = 31(25) + 330 = 775 + 330 = 1105$

Si x = 30 entonces $y = 31(30) + 330 = 930 + 330 = 1260$

Si x = 50 entonces $y = 31(50) + 330 = 1550 + 330 = 1880$

Si x = 60 entonces $y = 31(60) + 330 = 1860 + 330 = 2190$

5.

<table>
<tr><td>Variable dependiente (y)
Dinero restante ($)</td><td>Rango:
$0 \leq y \leq 650$</td><td rowspan="2">Modelo matemático:
$y = -51x + 650$</td></tr>
<tr><td>Variable independiente (x)
Días de gastos (días)</td><td>Dominio.
$0 \leq x \leq \frac{650}{51}$</td></tr>
</table>

Por lo tanto, Fabiola tendrá después de 3, 5 7 y 9 días:

Si x = 3 entonces $y =- 51(3) + 650 =- 153 + 650 = 497$

Si x = 5 entonces $y =- 51(5) + 650 =- 255 + 650 = 395$

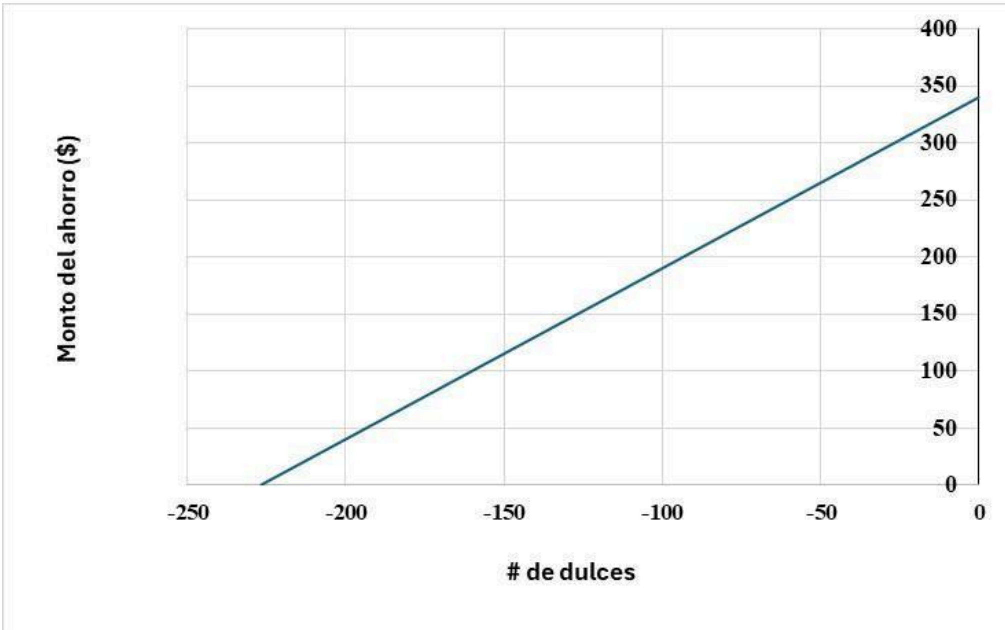
Si x = 7 entonces $y =- 51(7) + 650 =- 357 + 650 = 293$

Si x = 9 entonces $y =- 51(9) + 650 =- 459 + 650 = 191$

6.

Variable dependiente (y) Monto del ahorro ($)	Rango: $y \geq 340$	Modelo matemático: $y = \frac{3}{2}x + 340$
Variable independiente (x)	Dominio. $0 \leq x$	

Cantidad de dulces vendidos (dulces)		



El dinero que tendrá después de vender 5, 11, 22 y 53, se calcula de acuerdo con la ecuación:

Si x = 5, $y = \frac{3}{2}(5) + 340 = \frac{15}{2} + 340 = \frac{695}{2}$

Si x = 11, $y = \frac{3}{2}(11) + 340 = \frac{33}{2} + 340 = \frac{713}{2}$

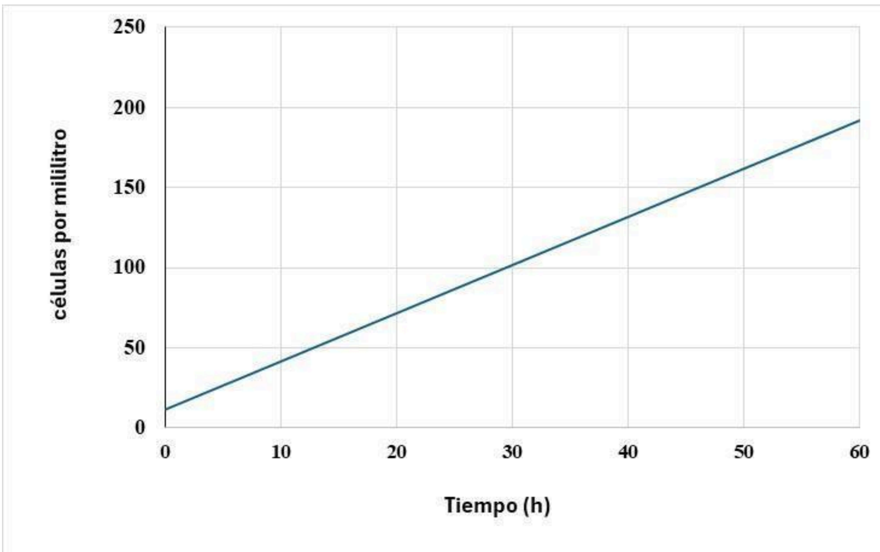
Si x = 22, $y = \frac{3}{2}(22) + 340 = 33 + 340 = 373$

Si x = 53, $y = \frac{3}{2}(53) + 340 = \frac{159}{2} + 340 = \frac{839}{2}$

7.

Variable dependiente (y) Células por mililitro	Rango:	Modelo matemático:

	$12 \leq y \leq 106$	$y = 3x + 12$
Variable independiente (x) Tiempo (h)	Dominio. $0 \leq x \leq \frac{148}{3}$	



Para determinar en cuanto tiempo se llega a 106 células por mililitro se utiliza la ecuación

$y = 3x + 12$ y se despeja x debido a que esta variable representa las horas.

$$y = 3x + 12 \therefore y - 12 = 3x \therefore \frac{y-12}{3} = x$$

Si sabemos qué y debe ser 106 entonces x es:

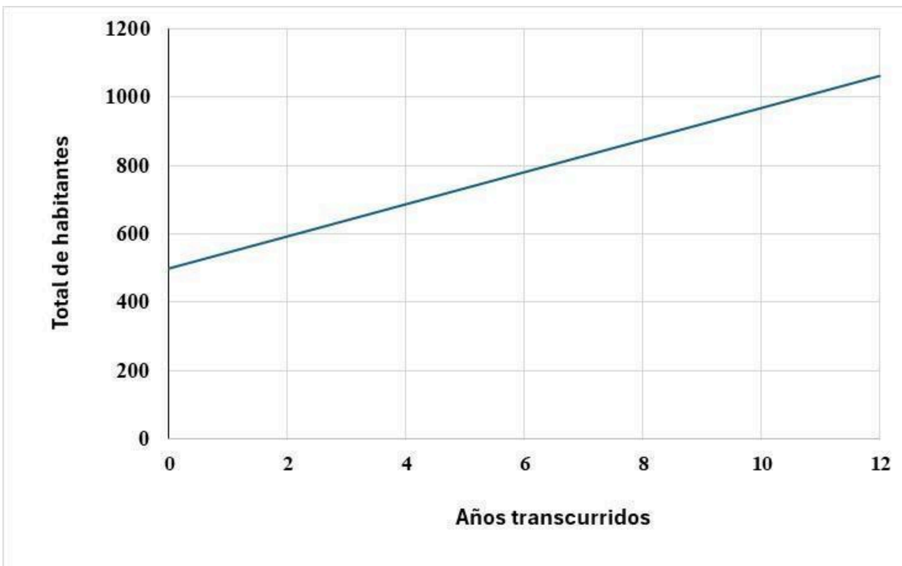
$$x = \frac{106-12}{3} = \frac{94}{3}$$

Por lo tanto, se tardará $\frac{94}{3}$ horas que es igual a 31.3 horas

8.

Variable dependiente (y)	Rango:	

Número total de habitantes	$y \geq 500$	Modelo matemático: $y = 47x + 500$
Variable independiente (x) Años transcurridos	Dominio. $0 \leq x$	



Para determinar cuántos habitantes se tendrán en dicha población después de 5, 8, 11 y 12 años, se utiliza la ecuación $y = 47x + 500$.

Si x = 5, $y = 47(5) + 500 = 235 + 500 = 735$

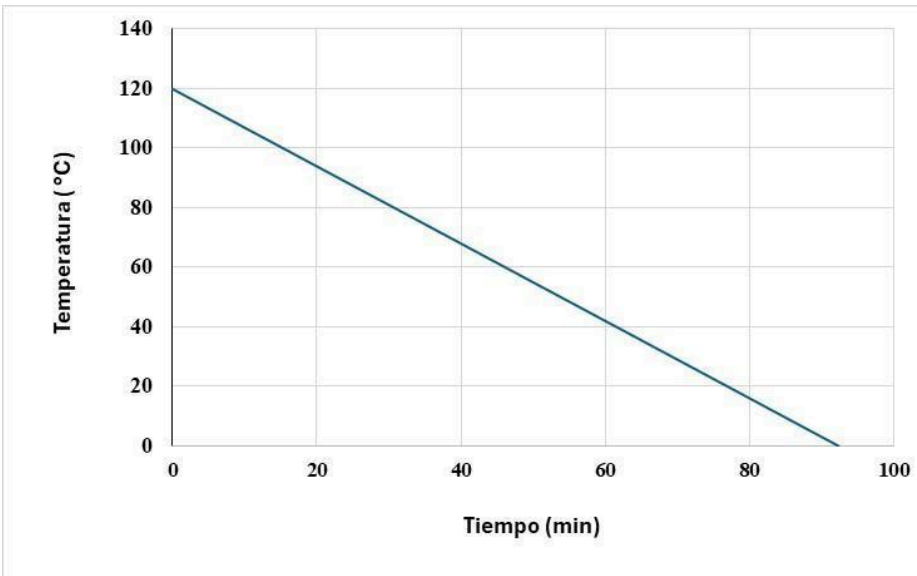
Si x = 8, $y = 47(8) + 500 = 376 + 500 = 876$

Si x = 11, $y = 47(11) + 500 = 517 + 500 = 1017$

Si x = 12, $y = 47(12) + 500 = 564 + 500 = 1064$

9.

Variable dependiente (y) Temperatura de la barra (°C)	Rango: $y \leq 120$	Modelo matemático: $y =-\frac{13}{10}x + 120$
Variable independiente (x) Tiempo transcurrido (min)	Dominio. $0 \leq x$	



Para determinar la temperatura que tendrá 19, 23, 31 y 37 minutos se utiliza la ecuación en cada uno de los tiempos:

Si x = 19, $y =-\frac{13}{10}19 + 120 =-\frac{247}{10} + 120 = \frac{953}{10}$

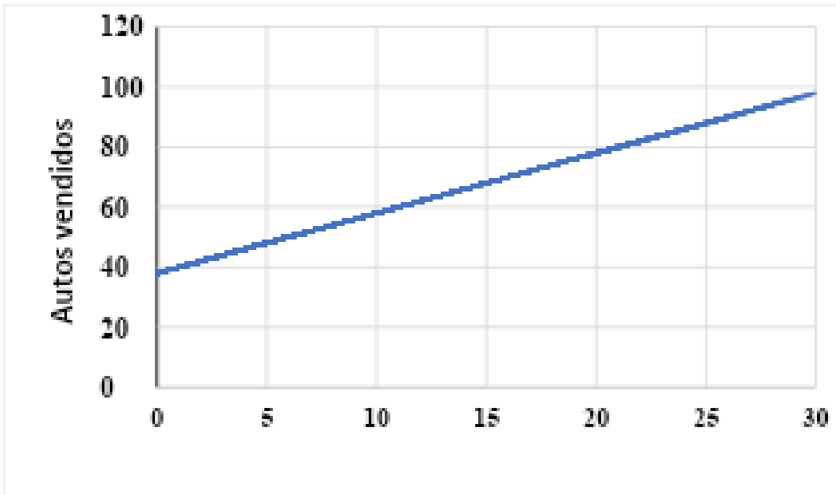
Si x = 23, $y =-\frac{13}{10}23 + 120 =-\frac{299}{10} + 120 = \frac{901}{10}$

Si x = 31, $y =-\frac{13}{10}31 + 120 =-\frac{403}{10} + 120 = \frac{797}{10}$

Si x = 37, $y =-\frac{13}{10}37 + 120 =-\frac{481}{10} + 120 = \frac{719}{10}$

10.

Variable dependiente (y) Autos vendidos	Rango: $y \geq 38$	Modelo matemático: $y = 2x + 38$
Variable independiente (x) Tiempo (meses)	Dominio. $0 \leq x$	



Por lo tanto, el habrá vendido después de 17, 20, 23 y 26 meses.

Si x = 17, $y = 2(17) + 38 = 34 + 38 = 72$

Si x = 20, $y = 2(20) + 38 = 40 + 38 = 78$

Si x = 23, $y = 2(23) + 38 = 46 + 38 = 84$

Si x = 26, $y = 2(26) + 38 = 52 + 38 = 90$

UNIDAD 3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Introducción

La ecuación de primer grado, también conocida como ecuación lineal, es una de las bases fundamentales en el estudio del álgebra. Se caracteriza por tener la forma general $ax + b = 0$, donde a y b son números conocidos y x es la incógnita que se busca resolver. Esta clase de ecuaciones no solo es esencial en matemáticas, sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversas áreas como la física, la economía y la ingeniería, donde se utiliza para modelar situaciones cotidianas como la determinación de precios, la velocidad de un objeto o el balance de un presupuesto. Comprender las ecuaciones de primer grado es crucial, ya que constituyen la base para abordar ecuaciones más complejas y desarrollar habilidades analíticas que se aplican en numerosos campos del conocimiento.

En esta unidad se muestra cómo se identifica la incógnita, se establece la ecuación y la forma de resolver. También se presentan ejemplos de aplicación de la ecuación de primer grado utilizando problemas en contexto.

Propósito de la unidad:

Al finalizar la unidad el alumno modelará y resolverá problemas contextualizados que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Palabras clave: Ecuación, igualdad, incógnita, variable, lineal, solución, lenguaje cotidiano, lenguaje matemático, proposición, enunciado del problema, ecuación de primer grado

Aprendizajes

- Comprende el concepto de ecuación en el contexto de resolución de problemas.
- Traduce un problema que involucre una función lineal e interpreta situaciones específicas.
- Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.
- Resuelve problemas que se modelen con una ecuación lineal con una incógnita.

Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico es un sistema simbólico que utiliza letras, números y operadores matemáticos para representar relaciones, operaciones y patrones numéricos de manera general y abstracta. En lugar de trabajar solo con números específicos, el lenguaje algebraico permite expresar problemas y situaciones de manera más flexible, utilizando variables para representar cantidades desconocidas.

Para conocer cómo se utiliza el lenguaje algebraico veamos algunos ejemplos.

1. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura. Esto lo podemos expresar como

   $$\text{Área} = \frac{base\ x\ altura}{2}$$

   Para no utilizar palabras podemos utilizar letras para simplificar la escritura, entonces, A = área, base= b, altura =h, y como el signo de multiplicación podemos omitirlo, la nueva expresión queda

   $$A = \frac{bh}{2}$$

2, Si un avión viaja a una velocidad de 200 km por hora, entonces en cierto número de horas recorrerá cierta cantidad de kilómetros. La distancia total se podrá expresar como:

   $$d = v\,t$$

   Donde $d = distancia;\ v = velocidad;\ t = tiempo.$

3. El triple de un número aumentado en 10 unidades, se puede expresar algebraicamente como:

   $$3\,x + 10$$

   Donde x es el número que desconocemos

Como puedes ver el álgebra presenta ventajas ya que nos permite utilizar símbolos y números para representar cantidades desconocidas y nos a establecer relaciones con otras variables de los problemas.

A continuación, se muestran algunas expresiones verbales y su representación algebraica.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Un número cualquiera	x
La suma de dos números	$x + y$
La diferencia de dos números	$x - y$
La semidiferencia de dos números	$\frac{x-y}{2}$
El producto de dos números	xy
El cociente de dos números	$\frac{x}{y}$
La suma de dos números dividida entre su diferencia	$\frac{x+y}{x-y}$
El cuadrado de un número	x^2
La suma de los cuadrados de dos números	$x^2 + y^2$
El cubo de la tercera parte de un número	$\left(\frac{x}{3}\right)^3$

Las siguientes son algunas expresiones algebraicas y su equivalente expresión verbal.

Expresión algebraica	Expresión verbal
$\frac{x-y}{2}$	La mitad de la diferencia de dos números
$x^3 + y^3$	La suma de los cubos de dos números
$(x + y)(x - y)$	El producto de la suma por la diferencia de dos números cualquiera

Ejercicios

1. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones

Expresión verbal	Expresión algebraica
1.-El triple de un número	
2.-El producto de dos factores iguales	
3.-El cociente de la suma de dos números entre otro número	
4.-La raíz del producto de dos números	
5.-El cubo de un número disminuido en seis unidades	

2. Escribe en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas:

Expresión algebraica	Expresión verbal
1. $2a + b$	
2. abc	

3. $a - (b + c)$	
4. $\frac{a-b}{10}$	
5. $\frac{ab}{a+b}$	

Respuestas

Ejercicio 1.

1. $3a$; 2. $(a + b)(a + b)$; 3. $\frac{a+b}{c}$; 4. $\sqrt{ab}$; 5. $x^3 - 6$.

Ejercicio 2.

1.El doble de un número aumentado en otro número; 2. El producto de tres números; 3. Un número disminuido en la suma de dos números; 4. La suma de dos números dividida entre 10; 5. El producto de dos números dividido entre la suma de los mismos números.

La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema

La ecuación puede entenderse como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema matemático. En este sentido, representa una relación de igualdad entre dos expresiones, donde la incógnita, generalmente representada por una letra, es el valor desconocido que buscamos encontrar. Al resolver la ecuación, lo que realmente estamos haciendo es buscar el valor o conjunto de valores que hacen que ambas expresiones sean equivalentes. Así, la ecuación se convierte en una herramienta que nos permite traducir problemas del mundo real o situaciones a un lenguaje matemático, guiándonos en el proceso de encontrar una solución que cumpla con los requisitos planteados por el problema.

Veamos algunos problemas para entender el tema.

1. Si al triple de un número se le aumenta 10, el resultado es 19. Encuentre el número.

   Si a 19 se le restan 10 puede obtenerse el triple de un número. Ese número es 3.

   Utilizando álgebra

   Si llamamos a ese número como x

   El triple de ese número es $3x$

   De acuerdo con el enunciado la ecuación queda $3x + 10 = 19$

   Si restamos 10 a ambos lados de la igualdad $3x + 10 - 10 = 19 - 10$

   $$3x = 9$$

   Si dividimos entre 3 a ambos lados de la igualdad obtenemos $x = 3$

   Haciendo la comprobación $3(3) + 10 = 19 \rightarrow 9 + 10 = 19 \rightarrow 19 = 19$

2. La suma de tres enteros pares consecutivos es 72, ¿Cuáles son esos números?

   Para representar a los enteros pares consecutivos, por ejemplo 2, 4, 6 en un orden de conteo consideremos

   Si x es el primer entero par

   $x + 2$ es el segundo entero par consecutivo

   $x + 4$ es el tercero entero par consecutivo

   La ecuación será $x + (x + 2) + (x + 4) = 72$

   Desarrollando la expresión

   $$x + x + 2 + x + 4 = 72$$

$$3x + 6 = 72$$

$$3x = 72 - 6$$

$$x = \frac{66}{3}$$

$$x = 22$$

Si el primer entero par es 22, el segundo será $x + 2$ entonces $22 + 2 = 24$, y el tercero será $x + 4$ entonces $22 + 4 = 26$. Así los enteros consecutivos son 22, 24, 26.

Comprobación

$$22 + 24 + 26 = 72$$

$$72 = 72$$

3. La tercera parte de un número es 8 unidades menor que la mitad de él. Encuentre el número.

Si x es el número

$\frac{1}{3}x$ es la tercera parte

$\frac{1}{2}x$ es la mitad

Entonces la ecuación $\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x - 8$

Eliminando denominadores

$$2x = 3x - 48$$

$$48 = x$$

Así el número es 48

Comprobación

Sustituyendo el valor en la ecuación

$$\frac{1}{3}(48) = \frac{1}{2}(48) - 8$$

$$16 = 24 - 8$$

$$16 = 16$$

Ejercicios

1. Encuentre tres números enteros consecutivos, tales que la suma del primero más el triple del tercero sea igual al doble del segundo aumentado en 20 unidades. R. 8, 9, 10

2. Armando tiene 12 monedas más que Julio, entre los dos sus monedas suman 78. R. 45

3. La suma de 3 números es 98. El segundo es el doble del primero y el tercero es tres unidades mayores que el segundo. R.19, 38, 41

4. ¿Cuál es el número que al aumentar en 20 se triplica? R. 10

5. ¿Cómo pagaría Luis una deuda de $ 1,000 con 52 monedas de oro, unas de $ 20 y otras de $ 10? R. 48

La ecuación como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal.

La ecuación puede verse como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal, ya que describe una relación matemática donde una variable depende de otra de forma proporcional y constante. En el caso de una función lineal, su representación general es $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales. Cuando planteamos una ecuación de esta función, estamos fijando un valor específico para la variable dependiente y en función de x o al revés. En este sentido, la ecuación refleja un momento particular de esa relación lineal, permitiéndonos conocer el valor de la incógnita cuando se da un valor específico de la otra variable. Así, cada ecuación lineal describe un "estado" particular de una función lineal, proporcionando información precisa sobre la relación entre las variables dentro de un contexto determinado.

Ejemplos

1. Sea la función $f(x) = 2x - 5$, obtener la raíz (cero de la función) y el cruce de la gráfica con el eje y.

   Lo que se nos solicita es la raíz o cero de la función, es decir, buscamos el valor de x para el cual $f(x) = 0$, entonces si sustituimos este último valor en la función tenemos

$$0 = 2x - 5$$

   Como puedes observar, para un valor específico de la función la expresión se transforma en una ecuación de primer grado, que cuando la resolvemos obtenemos $x = \frac{5}{2}$. Entonces, gráficamente el punto donde la gráfica de la función cruza al eje x, es el punto $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ y puedes verificarlo viendo la figura 1.

   Para obtener el cruce de la gráfica de la función con el eje y, considera que en ese punto el valor de $x = 0$ (ver la figura 1); entonces si sustituimos este valor en la función obtenemos

$$f(x) = 2(0) - 5 = 0 - 5 = -5$$

   Este valor significa que en la gráfica el punto de intersección con el eje y es $(0, -5)$.

2. Sea la función $f(x) = 2(x - 3) + 2$, obtén el valor de x cuando $f(x) = -2$.

   Si sustituimos dicho valor en la expresión de la función obtenemos la siguiente ecuación

$$-2 = 2(x - 3) + 2$$

   Resolviendo

$$-2 = 2x - 6 + 2$$

$$-2 - 2 + 6 = 2x$$

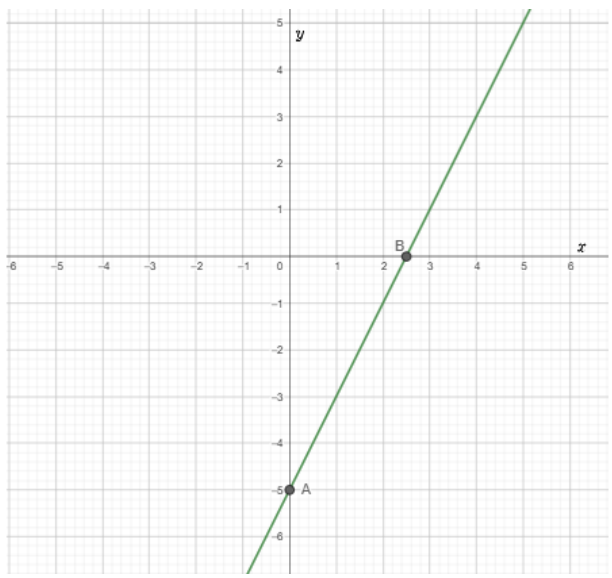
$$2 = 2x$$

$$x = 1$$

Podemos concluir que cuando $f(x) =- 2$, $x = 1$, visto en la gráfica de la función tenemos el punto $A(1, - 2)$ (ver figura 2)

Figura 1

Gráfica de la función $f(x) = 2x - 5$



3. Sea la función $f(x) = 2(x - 3) + 2$, obtén el valor de $f(x)$ cuando $x = 3$.

Si sustituimos dicho valor en la expresión de la función obtenemos la siguiente ecuación

$$f(x) = 2(3 - 3) + 2$$

Resolviendo

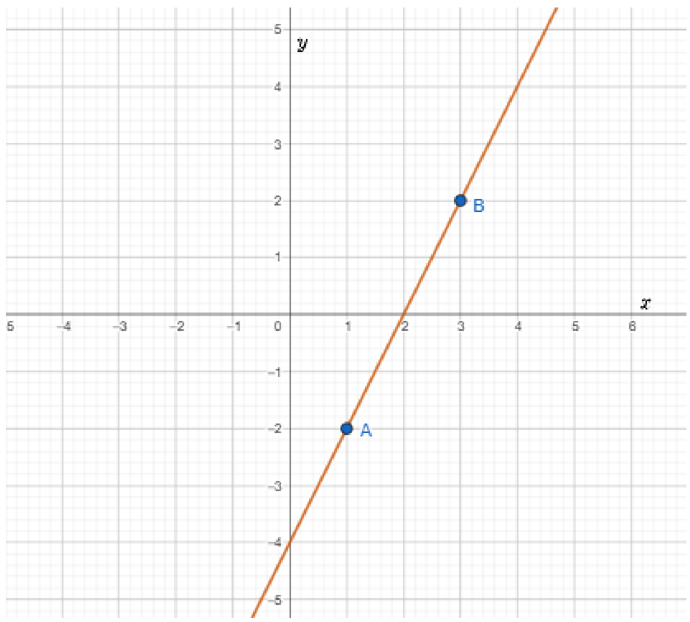
$$f(x) = 2(0) + 2$$

$$f(x) = 2$$

Podemos concluir que cuando $x = 3$, $f(x) = 2$, visto gráficamente tenemos el punto $B(3, 2)$ (ver figura 2).

Figura 2

Gráfica de la función $f(x) = 2(x - 3) + 2$



Ejercicios

1. Encuentra la raíz (cero de la función) de $f(x) = 7x + 11$. R. $x = -\frac{11}{7}$

2. Encuentra la intersección de la gráfica de $f(x) = \frac{7-x}{3}$ con el eje y. R. $y = \frac{7}{3}$.

3. Encuentra el valor de la función $f(x) = 11 - 4x$ cuando $x = 5$. R. $f(x) = -9$.

4. Considera a $f(x) = -3x + \frac{1}{2}$, encuentra el valor de x para $f(x) = 1$. R. $x = -\frac{1}{6}$.

5. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$, encuentra el valor de x para $f(x) = 2$. R. $x = -3$

Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita

Ecuación: es la igualdad de dos expresiones algebraicas que se denominan miembros de esta, por ejemplo: $7x - 6 = x + 3$

Incógnitas: de una ecuación son las literales que intervienen en las expresiones algebraicas que forman la ecuación y cuyos valores numéricos se desean encontrar.

Conjunto solución: es el conjunto de los valores numéricos que al ser sustituidos en el lugar de las incógnitas dan como resultado una identidad numérica, es decir, se verifica la ecuación. A estos valores se les llama también raíces de la ecuación.

Solución de ecuaciones

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución, es decir, encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación.

El proceso de resolver una ecuación consiste, por lo general, en su transformación en ecuaciones equivalentes cada vez más simples. Esta transformación se realiza efectuando ciertas operaciones que resultan de la aplicación de las propiedades de la igualdad, las cuales mencionaremos a continuación.

Propiedades de la igualdad

Propiedad aditiva de la igualdad: sí a, b y c son 3 números reales cualesquiera, tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$

Esta propiedad permite deducir que, si sumamos un mismo número en ambos miembros de la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente. Esta propiedad también se puede aplicar para la resta porque está definida en términos de la suma.

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$

Ejemplos:

1. Resuelve $x - 7 = 10$

Solución:

$$x - 7 = 10$$

$$x - 7 + 7 = 10 + 7$$

$$x + 0 = 17$$

$$x = 17$$

2. Resuelve la ecuación $y + 8 = 1$

Solución:

$$y + 8 = 1$$

$$y + 8 - 8 = 14 - 8$$

$$y + 0 = 6$$

$$y = 6$$

Propiedad multiplicativa de la igualdad**:** esta propiedad establece que si ambos miembros de una igualdad de números reales se multiplican por un mismo número no nulo resulta otra igualdad equivalente a la igualdad inicial; es decir, si $c \neq 0$ y $a = b$, entonces $ac = bc$.

Ejemplos:

1. Resuelve la ecuación $\frac{x}{4} = 5$

Solución; Si se multiplican ambos miembros de la igualdad por 4, se obtiene:

$$4\left(\frac{x}{4}\right) = 5(4)$$

$x = 5(4)$ *el 4 aparece en el miembro derecho multiplicando*.

$x = 20$

2. Resuelve la ecuación $\frac{x}{7} = 3$

Solución; al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 7, resulta:

$$7\left(\frac{x}{7}\right) = 3(7)$$

$x = 3(7)$ *el 7 aparece en el miembro derecho multiplicando.*

$x = 21$

3. Resuelve la ecuación $5x = 40$

Solución; si se dividen ambos miembros de la ecuación entre 5, resulta:

$$\frac{5x}{5} = \frac{40}{5}$$

$x = \frac{40}{5}$ *ahora el 5 aparece en el miembro derecho dividiendo.*

$x = 8$

4. Resuelve la ecuación $-6x = 42$

Solución: si se dividen ambos miembros por -6, resulta:

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{42}{-6}$$

$$x = \frac{42}{-6} = -7$$

5. Resuelve la ecuación $\sqrt{x-4} = 6$

Solución; elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$\left[\sqrt{x-4}\right]^2 = 6^2$$

Recuerda que $\sqrt{x-4} = (x-4)^{\frac{1}{2}}$; por lo que:

$$\left[(x-4)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 6^2$$

$$(x - 4)^{\frac{2}{2}} = 36$$

$$x - 4 = 36$$

$$x = 36 + 4$$

$$x = 40$$

6. Resuelve la ecuación $x^2 = 16$

Solución; si se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

Recuerda que $\sqrt{x^2} = |x|$. Al aplicar esta propiedad nuestra ecuación queda:

$$|x| = 4$$

Deducimos entonces que el conjunto solución consta de dos elementos:

$$x = 4 \qquad \text{y} \qquad x = -4$$

Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella que se puede escribir en la forma $ax + b = c$, en donde a es diferente de cero. Este tipo de ecuaciones también reciben el nombre de *ecuaciones de primer grado* porque el término de mayor grado es el de grado uno o de primer grado.

Para resolver este tipo de ecuaciones se aplican las propiedades aditivas y multiplicativas de la igualdad que se han analizado.

Ejemplos:

1. Sea la ecuación dada $6(x - 1) + 4 = 3(7x + 1)$. Obtener el valor de la variable x.

   Desarrollando las multiplicaciones:

$$6x - 6 + 4 = 21x + 3$$

Simplificando $$6x - 2 = 21x + 3$$

Agrupando $$6x - 21x = 3 + 2$$

$$-15x = 5$$

$$x = -\frac{5}{15}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

2. Resolver la ecuación $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

Suprimiendo paréntesis

$$x - 2x - 1 = 8 - 3x - 3$$

Agrupando términos semejantes

$$x - 2x + 3x = 8 - 3 + 1$$

Reduciendo términos semejantes

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

3. Resolver la ecuación $15x - 8 = 6x - (x - 2) + (-x - 3)$

Suprimiendo paréntesis

$$15x - 8 = 6x - x + 2 - x - 3$$

Agrupando términos comunes

$$15x - 6x + x + x = 8 + 2 - 3$$

Reduciendo términos semejantes

$$11x = 7$$

$$x = \frac{7}{11}$$

Ejercicios: Resuelve las ecuaciones detalladamente.

1. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$ R. $x = -\frac{9}{2}$
2. $16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [-(3x + (x + 3))]$ R. $x = \frac{9}{22}$
3. $9x - (5x - 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$ R. $x = \frac{1}{2}$
4. $3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$ R. $x = -2$
5. $x - (-2x + 1) = 8 - (3x + 3)$ R. $x = 1$

Aplicación de ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas

Para resolver problemas planteados en lenguaje verbal, es recomendable …

1. Leer el problema con atención para identificar las incógnitas y las cantidades conocidas…
2. Elegir las letras que se utilizarán para representar las incógnitas y las cantidades conocidas.
3. Expresar, mediante una ecuación, la relación que existe entre los datos del problema.
4. Encontrar el valor o valores de las incógnitas de la ecuación que resulta del paso anterior.

5. Comprobar la solución.

Ejemplos.

1. Determina tres números enteros consecutivos cuya suma sea 105.

   Solución:

   Sea x la literal que representa el número menor de dichos números

   La expresión que representa el segundo número consecutivo es $x + 1$.

   La expresión que representa el tercer número consecutivo es $(x + 1) + 1$; o sea, $x + 2$.

   La expresión que representa la suma de los tres números consecutivos es la ecuación $x + (x + 1) + (x + 2) = 105$.

   Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 34$

   Por tanto, los números consecutivos que suman 105 son 34, 35 y 36.

   Comprobación: 34+35+36=105

   105=105

2. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar a 8 litros de una solución de sal al 12% y agua para obtener otra al 5%?

   Solución:

   Una solución que se compone de sal al 5% y agua, significa que el 5% de ella es sal y el resto es agua pura; o sea el 95%.

   Al mezclar 2 soluciones tenemos que la cantidad de sustancia pura es la primera solución + la cantidad de sustancia pura es la segunda solución= la cantidad de la sustancia pura en la mezcla.

   En este problema, x representa la cantidad de agua pura que se requiere agregar a la primera solución, por lo que…

   a) la cantidad de sal en la primera solución es 8(0.12) = 0.96
   b) la cantidad de sal en el agua pura que se va a agregar es cero, es decir

$x(0\%) = x(0) = 0.$

c) la expresión que representa la cantidad de sal en la mezcla es $0.05(8 + x)$.

como la cantidad de sal en la mezcla es igual a la suma de la cantidad inicial más la cantidad en el agua agregada, tenemos la ecuación:

$$0.96 + x(0) = 0.05(8 + x)$$

$$0.96 = 0.4 + 0.05x$$

$$-0.05x = 0.4 - 0.96$$

$$-0.05x =- 0.56$$

$$x = \frac{-0.56}{-0.05}$$

$$x = 11.2$$

Se deben agregar 11.2 litros de agua pura para obtener una solución de sal al 5% y agua.

Autoevaluación de la unidad 3

1. Expresar la ecuación de cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 70. ¿Qué números son? R. $4x + 6 = 70$, los números son 16, 17, 18, 19
2. En un rectángulo su longitud excede a su ancho en 4 cm. Si cada dimensión se aumenta en 5 cm, el área se incrementaría en $65\ cm^2$. Calcular las dimensiones originales del rectángulo. R. $10x + 45 = 65$; $2\ cm$ de ancho por 6 de longitud
3. El segundo ángulo de un triángulo es seis veces más grande que el primer ángulo. Si el tercer ángulo es 45° más grande que dos veces el primero. ¿Cuál es la medida de cada ángulo? R.15, 75, 90.

4. Encuentre el valor de x cuando la función $f(x) = \frac{4x+10}{5}$ es igual a 5. R. $x = \frac{15}{4}$

5. Encuentre la raíz de la función $f(x) = \frac{4-x}{2}$. R. $x = 4$

6. ¿Cuál es el valor de x para cada ecuación?

a) $5x + 2(-3x - 1) = 8\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4(-x)$ R. $x = 14$

b) $3(x - 1) - 1 = 2 - 5(x + 5)$ R. $-\frac{19}{8}$

c) $3(7 - 2x) = 14 - 8(x - 1)$ R. $x = \frac{1}{2}$

7. Un señor mezcló 48 onzas de una solución de jerez al 4% con 40 onzas de una solución al 15% de la misma sustancia. ¿Cuál es el porcentaje de jerez en la mezcla? R. La mezcla es una solución al 9 % de jerez.

8. Una persona realizó dos inversiones de un total de $ 10, 000. En una de las inversiones obtuvo el 10 % de utilidad, pero en la otra tuvo una pérdida del 12 %. Si la pérdida neta fue de $ 540, ¿Qué cantidad tenía en cada inversión?

R. Primera inversión: $ 3, 000, segunda inversión $ 7, 000

UNIDAD 4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Propósito: Modelará y resolverá problemas contextualizados que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2×2 y 3×3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica, a través de los diferentes métodos de resolución.

Aprendizajes

- Comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición ante un problema que lleve a una ecuación lineal con dos incógnitas
- Resuelve gráficamente problemas que se modelan mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Comprende el tipo de solución de un problema a partir del comportamiento gráfico de las rectas.
- Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2×2, seleccionando el método más adecuado.
- Resuelve problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales de orden 2×2.
- Resuelve problemas que se modelan con un sistema de ecuaciones lineales 3×3.

Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales son conjuntos de dos o más ecuaciones lineales que comparten un mismo conjunto de variables. Su solución consiste en encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente. La importancia de estos sistemas radica en su capacidad para modelar y resolver problemas complejos que involucran varias condiciones o restricciones, como la optimización de recursos, el análisis de redes eléctricas, la economía o la ingeniería. Además, son herramientas clave en álgebra, ya que permiten comprender la interacción entre variables y son fundamentales para el desarrollo de técnicas más avanzadas.

Resolución por método gráfico

Ejemplo

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x + 4y = 36$$

$$-x + 2y = 8$$

S O L U C I Ó N

$3x + 4y \quad = \quad 36$

x	y
0	
	0

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 36 && \rightarrow \textit{Ecuación dada} \\ 3(0) + 4y &= 36 && \rightarrow \textit{Sustituir } x = 0 \\ 4y &= 36 && \rightarrow \textit{Reducir} \\ y &= \frac{36}{4} && \rightarrow \textit{Despejar } y \\ y &= 9 && \rightarrow \textit{Resultado} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 36 && \rightarrow \textit{Ecuación dada} \\ 3x + 4(0) &= 36 && \rightarrow \textit{Sustituir } y = 0 \\ 3x &= 36 && \rightarrow \textit{Reducir} \\ x &= \frac{36}{3} && \rightarrow \textit{Despejar } x \\ x &= 12 && \rightarrow \textit{Resultado} \end{aligned}$$

$-x + 2y \quad = \quad 8$

x	y
0	
	0

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 8 && \rightarrow \textit{Ecuación dada} \\ -0 + 2y &= 8 && \rightarrow \textit{Sustituir } x = 0 \\ 2y &= 8 && \rightarrow \textit{Reducir} \\ y &= \frac{8}{2} && \rightarrow \textit{Despejar } y \\ y &= 4 && \rightarrow \textit{Resultado} \end{aligned}$$

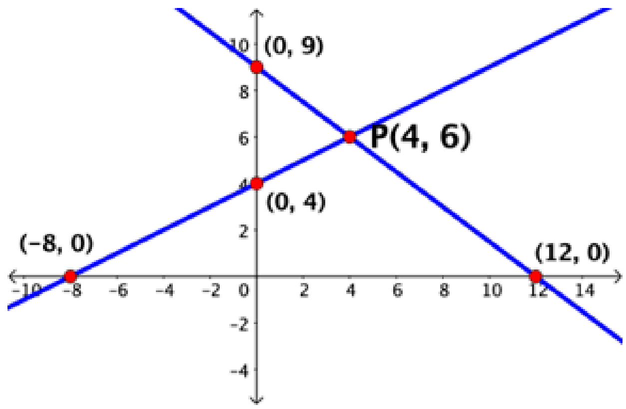
$$\begin{aligned} -x + 2y &= 8 && \rightarrow \textit{Ecuación dada} \\ -x + 2(0) &= 8 && \rightarrow \textit{Sustituir } y = 0 \\ -x &= 8 && \rightarrow \textit{Reducir} \\ x &= \frac{8}{-1} && \rightarrow \textit{Despejar } x \\ x &= -8 && \rightarrow \textit{Resultado} \end{aligned}$$

$3x + 4y = 36$

x	y	(x, y)
0	9	(0, 9)
12	0	(12, 0)

$-x + 2y = 8$

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
-8	0	(-8, 0)



Respuesta: $P(4, 6)$ $\quad x = 4 \quad y = 6$

Ejercicio

Resuelve por el método gráfico el siguiente sistema

$$x + 2y = 2$$

$$-x + 2y = -6$$

Sistemas consistentes e inconsistentes

Interpretación gráfica de soluciones

Para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, el número de soluciones está dado por tres posibilidades:

Número de soluciones **Interpretación gráfica**

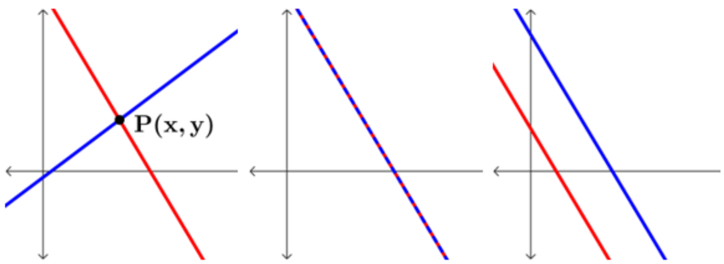
1. Exactamente una solución.
2. Infinidad de soluciones.
3. Ninguna solución.

Las dos líneas se intersecan en un punto.

Las dos líneas son idénticas.

Las dos líneas son paralelas.

Estas tres posibilidades pueden observarse en las siguientes figuras. Un sistema de ecuaciones lineales es consistente si tiene al menos una solución, y es inconsistente si no tiene ninguna.



Exactamente una solución	Infinidad de soluciones	Ninguna solución
↓	↓	↓
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible

Ejercicio

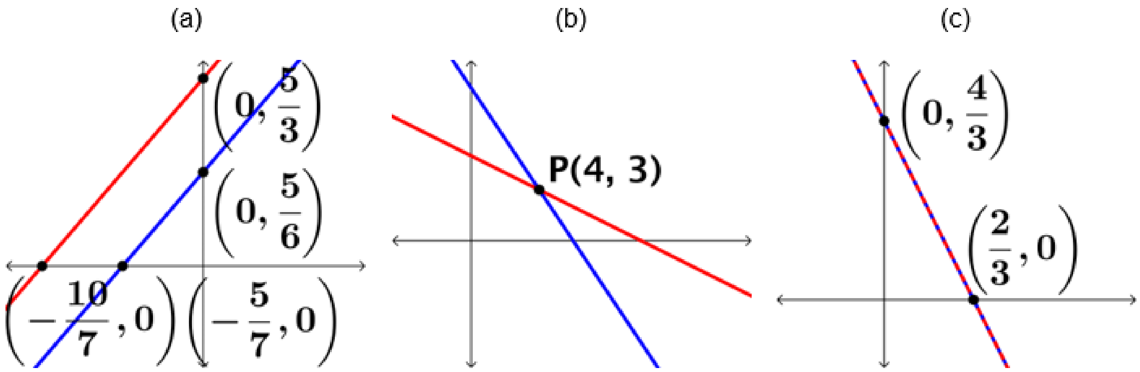
Relaciona cada sistema de ecuaciones con su correspondiente gráfica.

1. ( ) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 18 \\ -2x - 4y &= -20 \end{aligned}$$

2. ( ) $$\begin{aligned} 6x + 3y &= 4 \\ -18x - 9y &= -12 \end{aligned}$$

3. ( ) $$-7x + 6y = 5$$

$$21x - 18y = -30$$



R. 1-b, 2-c, 2-a

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen precisamente el mismo conjunto de solución. Para resolver un sistema

Método de sustitución

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$7x + 11y = -23 \rightarrow Ec\,1$$

$$5x + 9y = -21 \rightarrow Ec\,2$$

Solución

$$
\begin{aligned}
7x + 11y &= -23 && \rightarrow \textit{Despejar } y \textit{ en Ec } 1\\
11y &= -23 - 7x && \rightarrow \textit{Restar} - 7x\\
y &= \frac{-23 - 7x}{11} && \rightarrow \textit{Dividir Ec entre } (11)\\
y &= -\frac{23}{11} - \frac{7}{11}x && \rightarrow \textit{Ec } 3
\end{aligned}
$$

$$\textit{Cálculo de } x$$

$$
\begin{aligned}
5x + 9\left(-\frac{23}{11} - \frac{7}{11}x\right) &= -21 && \rightarrow \textit{Sustituir } (\textit{Ec } 3) \textit{ en } (\textit{Ec } 2)\\
5x - \frac{207}{11} - \frac{63}{11}x &= -21 && \rightarrow \textit{Quitar paréntesis}\\
55x - 207 - 63x &= -231 && \rightarrow \textit{Multiplicar Ec por } (11)\\
55x - 63x &= -231 + 207 && \rightarrow \textit{Agrupar términos}\\
-8x &= -24 && \rightarrow \textit{Reducir términos}\\
x &= \frac{-24}{-8} && \rightarrow \textit{Despejar } x\\
x &= 3 && \rightarrow \textit{Resultado}
\end{aligned}
$$

$$\textit{Cálculo de } y$$

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{23}{11} - \frac{7}{11}(3) && \rightarrow \textit{Sustituir } x = 3 \textit{ en } (\textit{Ec } 3)\\
y &= -\frac{23}{11} - \frac{21}{11} = -\frac{44}{11} && \rightarrow \textit{Desarrollar}\\
y &= -4 && \rightarrow \textit{Resultado}
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución

$3x + 6y = -51$ $\qquad$ $4x - 5y = 17$

$4x - 8y = 28$

$$2x - 3y = 9$$

Método de igualación

Ejemplo

$$7x + 11y = -23 \rightarrow Ec\,1$$

$$5x + 9y = -21 \rightarrow Ec\,2$$

Solución

$$\begin{aligned}
7x + 11y &= -23 && \rightarrow Despejar\ y\ en\ Ec\,1 \\
11y &= -23 - 7x && \rightarrow Restar - 7x \\
y &= \frac{-23 - 7x}{11} && \rightarrow Ec\,3 \\
5x + 9y &= -21 && \rightarrow Despejar\ y\ en\ Ec\,2 \\
9y &= -21 - 5x && \rightarrow Restar - 5x \\
y &= \frac{-21 - 5x}{9} && \rightarrow Ec\,4
\end{aligned}$$

$$Cálculo\ de\ x$$

$$\begin{aligned}
\frac{-23-7x}{11} &= \frac{-21-5x}{9} && \rightarrow\ Igualar\ Ec\ 3\ y\ Ec\ 4\\
9(-23-7x) &= 11(-21-5x) && \rightarrow\ Multiplicar\ cruzado\\
-207-63x &= -231-55x && \rightarrow\ Quitar\ paréntesis\\
-63x+55x &= -231+207 && \rightarrow\ Agrupar\ términos\\
-8x &= -24 && \rightarrow\ Reducir\ términos\\
x &= \frac{-24}{-8} && \rightarrow\ Despejar\ x\\
x &= 3 && \rightarrow\ Resultado
\end{aligned}$$

$$Cálculo\ de\ y$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-23-7(3)}{11} = \frac{-23-21}{11} && \rightarrow\ Sustituir\ x = 3\ en\ (Ec\ 3)\\
y &= \frac{-44}{11} && \rightarrow\ Resolver\\
y &= -4 && \rightarrow\ Resultado
\end{aligned}$$

Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= -16 \\ 2x + 8y &= 26 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 6y &= 27 \\ 7x - 3y &= 9 \end{aligned}$$

Método de suma y resta (eliminación)

Ejemplo

$2x - 3y = -7 \rightarrow Ec\ 1$

$$3x + y = -5 \rightarrow Ec\,2$$

Solución

$$\textit{Cálculo de } y$$

$$\begin{array}{rcll}
 & -6x + 9y = & 21 & \rightarrow \textit{Multiplicar Ec 1 por } (-3) \\
+ & 6x + 2y = & -10 & \rightarrow \textit{Multiplicar Ec 1 por } (2) \\
\hline
 & 11y = & 11 & \rightarrow \textit{Sumar ambas ecuaciones} \\
 & y = & \frac{11}{11} & \rightarrow \textit{Despejar } y \\
 & y = & 1 & \rightarrow \textit{Resultado}
\end{array}$$

$$\textit{Cálculo de } x$$

$$\begin{array}{rcll}
2x - 3(1) & = & -7 & \rightarrow \textit{Sustituir } y = 1 \textit{ en Ec } 1 \\
2x - 3 & = & -7 & \rightarrow \textit{Reducir} \\
2x & = & -7 + 3 & \rightarrow \textit{Sumar}: +3 \\
x & = & \frac{-4}{2} & \rightarrow \textit{Despejar } x \\
x & = & -2 & \rightarrow \textit{Resultado}
\end{array}$$

Por lo tanto, la solución es: $x = -2$; $y = 1$. Comprueba la solución en cada una de las ecuaciones originales.

Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta (eliminación)

$$3x + 6y = -51 \qquad 4x - 5y = 17$$

$$4x - 8y = 28 \qquad 2x - 3y = 9$$

Problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales de orden 2×2.

Ejemplos

1. Un comerciante invirtió $26823 para comprar trajes y sombreros. Cada traje costó $1316 y cada sombrero $165, en total fueron 37 prendas. ¿Cuántos trajes y cuántos sombreros compró?

Solución

Datos:

x = trajes

y = sombreros

inversión total = $26823

costo trajes = $1316

costo sombreros = $165

prendas totales = 37

Sistemas de ecuaciones:

$x + y = 37$ ------------------------- *Ecuación 1*

$1316x + 165y = 26823$ ----------- *Ecuación 2*

Resolviendo el sistema por eliminación

Multiplicar (*Ec 1*) por (-1316) → $-1{,}316x - 1{,}316y = -48{,}692$

Multiplicar (*Ec 2*) por (1)	→	1,316x + 165y = 26,823
Sumar ambas ecuaciones	→	-1151y = -21869
		$y = \frac{-21869}{-1151}$
Despejar *x*	→	y = 19
Sustituir *y=19* en Ec 1	→	x + 19 = 37
Despejar *y*	→	x = 37 – 19 $x = 18$

Por lo tanto, la solución es:

x = 18 trajes

y = 19 sombreros

Comprueba la solución en cada una de las ecuaciones originales.

2. Entre Sofía y Rodrigo ahorran $5,000. Si lo que ahorró Sofía fueron $1304 más que lo que ahorró Rodrigo. ¿Cuánto ahorra cada uno?

Solución

Datos:

x = Ahorro de Sofía

y = Ahorro de Rodrigo

ahorro total = $5,000

x = $1304 + y

Sistemas de ecuaciones:

x + y = 5000 -------------- *Ecuación 1*

x – y = 1304 -------------- *Ecuación 2*

Resolviendo por eliminación

	→	x + y = 5000
	→	x – y = 1304
Sumar ambas ecuaciones	→	2x = 6304
		$x = \frac{6304}{2}$
Despejar *x*	→	x = 3152
Sustituir x=3152 en Ec 1	→	3152 + y = 5000
Despejar *y*	→	$\boxed{\begin{array}{c} y = 5000 - 3152 \\ y = 1848 \end{array}}$

Por lo tanto, la solución es:

x = $3,152 Ahorro de Sofia

y = $1,848 Ahorro de Rodrigo

Comprueba la solución en cada una de las ecuaciones originales.

Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas

1. Un comerciante invirtió $18,950 para comprar trajes y sombreros. Cada traje costó $1100 y cada sombrero $150, en total fueron 25 prendas. ¿Cuántos trajes y cuántos sombreros compró?
2. Entre Sofía y Rodrigo ahorran $15,000. Si lo que ahorró Sofía fueron $3500 más que lo que ahorró Rodrigo. ¿Cuánto ahorra cada uno?
3. Paco tiene en su monedero $172 en billetes de 2 y 10 pesos. Si dispone de 34 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?

4. Un camión de entrega de paquetería llega a un almacén con 10 paquetes chicos y 7 grandes. El costo total del flete es de $567 pesos. Si el flete de un paquete grande es de $13 pesos más que el de un paquete chico. ¿Cuál es el costo del flete de cada paquete?

Sistemas de ecuaciones 3x3

Ejemplos

1. Resolvamos utilizando el método de eliminación

$4x + y - 3z = 11$ -------- *Ecuación 1*

$2x - 3y + 2z = 9$ --------- *Ecuación 2*

$3x + 4y - 2z = -2$ --------- *Ecuación 3*

Solución

De la Ecuación 1 y Ecuación 2 se elimina x

Multiplicar (*Ec 1*) por (2) → $8x + 2y - 6z = 22$

Multiplicar (*Ec 2*) por (-4) → $-8x + 12y - 8z = -36$

Sumar ambas ecuaciones → $14y - 14z = -14$ ------- *Ec 4*

De la Ecuación 2 y Ecuación 3 se elimina la misma variable x

Multiplicar (*Ec 2*) por (3) → $6x - 9y + 6z = 27$

Multiplicar (*Ec 3*) por (-2) → $-6x - 8y + 4z = 4$

Sumar ambas ecuaciones → $-17y + 10z = 31$ ------- *Ec 5*

De la Ecuación 4 y Ecuación 5 se elimina y

Multiplicar (*Ec 4*) por (17) → $238y - 238z = -238$

Multiplicar (*Ec 5*) por (14) → $-238y + 140z = 434$

Sumar ambas ecuaciones	→	$-98z = 196$
Despejar z	→	$z = 196/-98 = -2$

Sustituir $z=-2$ en Ec 4	→	$14y - 14(-2) = -14$
Despejar y	→	$14y + 28 = -14$ $14y = -14 - 28$ $14y = -42$ $y = \frac{-42}{14} = -3$

Sustituir $y=-3$, $z=-2$ en Ec 1	→	$4x + (-3) - 3(-2) = 11$
Despejar y	→	$4x - 3 + 6 = 11$ $4x = 11 + 3 - 6$ $4x = 8$ $x = \frac{8}{4} = 2$

Por lo tanto, la solución es: $x = 2;\ y = -3;\ z = -2$. Comprueba la solución en cada una de las ecuaciones originales.

2. Resolvamos el siguiente sistema por eliminación

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$x - 2y + 3z = 9$ ---------- *Ecuación 1*

$-x + 3y = -4$ ---------- *Ecuación 2*

$2x - 5y + 5z = 17$ --------- *Ecuación 3*

Solución

De la Ecuación 1 y Ecuación 2 se elimina x

$$\begin{array}{lrl}
 & \rightarrow & x - 2y + 3z = 9 \\
 & \rightarrow & -x + 3y \quad = -4 \\
\hline
\text{Sumar ambas ecuaciones} & \rightarrow & y + 3z = 5 \text{ ------- } Ec\ 4
\end{array}$$

De la Ecuación 2 y Ecuación 3 se elimina la misma variable x

$$\begin{array}{lrl}
\text{Multiplicar } (Ec\ 2) \text{ por } (2) & \rightarrow & -2x + 6y \quad = -8 \\
\text{Multiplicar } (Ec\ 3) \text{ por } (1) & \rightarrow & 2x - 5y + 5z = 17 \\
\hline
\text{Sumar ambas ecuaciones} & \rightarrow & y + 5z = 9 \text{ ------- } Ec\ 5
\end{array}$$

De la Ecuación 4 y Ecuación 5 se elimina y

$$\begin{array}{lrl}
\text{Multiplicar } (Ec\ 4) \text{ por } (1) & \rightarrow & y + 3z = 5 \\
\text{Multiplicar } (Ec\ 5) \text{ por } (-1) & \rightarrow & -y - 5z = -9 \\
\hline
\text{Sumar ambas ecuaciones} & \rightarrow & -2z = -4
\end{array}$$

Despejar z → $z = \frac{-4}{-2} = 2$

Sustituir $z=2$ en Ec 4 → $y + 3(2) = 5$

Despejar y → $\boxed{\begin{array}{l} y + 6 = 5 \\ y = 5 - 6 \end{array}}$

$$\boxed{y = -1}$$

Sustituir $y = -1$, $z = 2$ en Ec 1 $\rightarrow$ $x - 2(-1) + 3(2) = 9$

Despejar y $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x + 2 + 6 = 9 \\ x = 9 - 2 - 6 \\ x = 1 \end{array}}$

Por lo tanto, la solución es: $x = 1;\ y = -1;\ z = 2$. Comprueba la solución en cada una de las ecuaciones originales.

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas

1. $\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}$

2. $\begin{array}{c} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{array}$

Problemas que se modelan con un sistema de ecuaciones lineales 3×3.

Ejemplos

1. En una competición deportiva celebrada en un IES participaron 50 atletas distribuidos según la edad, en tres categorías: Infantiles, Cadetes y Juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en una unidad al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

Planteamiento

x = Nº de atletas infantiles		$x + y + z = 50$		$x + y + z = 50$
y = Nº de atletas cadetes	→	$2x = y + 1$	→	$2x - y = 1$
z = Nº de atletas juveniles		$2x = 5z$		$2x - 5z = 0$

Solución

De la Ecuación 1 y Ecuación 2 se elimina *x*

Multiplicar (*Ec 1*) por (-2) → $-2x - 2y - 2z = -100$

→ $2x - y = 1$

Sumar ambas ecuaciones → $-3y - 2z = -99$ ------- *Ec 4*

De la Ecuación 2 y Ecuación 3 se elimina la misma variable *x*

Multiplicar (*Ec 2*) por (-1) → $-2x + y = -1$

→ $2x - 5z = 0$

Sumar ambas ecuaciones → $y - 5z = -1$ ------- *Ec 5*

De la Ecuación 4 y Ecuación 5 se elimina *y*

→ $-3y - 2z = -99$

Multiplicar (*Ec 5*) por (3) → $3y - 15z = -3$

Sumar ambas ecuaciones → $-17z = -102$

Despejar *z* → $z = 6$

Sustituir “z” en Ec 5 → $y - 5(6) = -1$

Despejar *y* → $\boxed{\begin{array}{l} y - 30 = -1 \\ y = -1 + 30 \end{array}}$

$$\boxed{y = 29}$$

Sustituir "y" en Ec 2 → $2x - 29 = 1$

Despejar *y* → $\boxed{\begin{array}{l} 2x = 1 + 29 \\ 2x = 30 \\ x = \frac{30}{2} = 15 \end{array}}$

Conclusión, en la categoría infantil hubo 15 atletas, en la categoría cadete hubo 29 atletas y en la juvenil, 6 atletas

2. En una empresa trabajan 48 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace una quinta parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día se lo hacen el triple de los que se lo hacen el tercer día. Determina el número de empleados que pasaron la revisión en cada día.

Planteamiento

x = Nº de empleados el 1er día		$x + y + z = 48$		$x + y + z = 48$
y = Nº de empleados el 2do día	→	$x = \frac{1}{5}(y + z)$	→	$5x - y - z = 0$
z = Nº de empleados el 3er día		$y = 3z$		$y - 3z = 0$

Solución:

De la Ecuación 1 y Ecuación 2 se elimina *x*

Multiplicar (*Ec 1*) por (-5) → $-5x - 5y - 5z = -240$

→ $5x - y - z = 0$

Sumar ambas ecuaciones → $-6y - 6z = -240$ ------- *Ec 4*

De la Ecuación 3 y Ecuación 4 se elimina *y*

Multiplicar (*Ec 3*) por (6)	→	$6y - 18z = 0$
	→	$-6y - 6z = -240$
Sumar ambas ecuaciones	→	$-24z = -240$
Despejar *z*	→	$z = 10$
Sustituir "z" en Ec 3	→	$y - 3(10) = 0$
Despejar *y*	→	$\boxed{y - 30 = 0 \quad y = 30}$
Sustituir "y" y "z" en Ec 2	→	$x + 30 + 10 = 48$
Despejar *y*	→	$\boxed{x = 48 - 30 - 10 \quad x = 8}$

Conclusión, el Nº de empleados que pasaron la revisión el 1er día fue de 8, el 2do día fue de 30 y el 3er día fue de 10.

Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones 3x3

1. En una competición deportiva celebrada en un IES participaron 32 atletas distribuidos según la edad, en tres categorías: Infantiles, Cadetes y Juveniles. El triple del número de atletas infantiles, por una parte, excede en 4 unidades al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el séxtuple del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

2. En una empresa trabajan 54 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace una quinta parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día

se lo hacen el doble de los que se lo hacen el tercer día. Determina el número de empleados que pasaron la revisión en cada día.

Autoevaluación de la unidad 4

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que se indica

a) Igualación

$$5x - 2y = -45$$

$$7x - 8y = -89$$

R. $x = -7,\ y = 5$

b) Sustitución

$$4x - 2y = 8$$

$$5x - 3y = 9$$

R. $x = -6,\ y = 2$

c) suma y resta

$$5x + 3y = 9$$

$$2x - 4y = 14$$

R. $x = 3,\ y = -2$

2. La suma de las edades de Miguel y Pedro es 97. Dentro de 4 años la edad de Pedro será cuatro veces la edad de Miguel. ¿Qué edades tienen ambos?

R. Miguel 17 años, Pedro 80 años

3. Un camión de entrega de paquetería llega a un almacén con 11 paquetes chicos y 6 grandes. El costo total del flete es de $525 pesos. Si el flete de un paquete grande es de $11 pesos más que el de un paquete chico. ¿Cuál es el costo del flete de cada paquete?

R. Paquete chico $27, paquete grande $38

4. Paco tiene en su monedero $210 en billetes de 5 y 20 pesos. Si dispone de 15 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada clase? Seis billetes de $5, nueve billetes de $20

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & + & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

R. $x =- 1,\ y = 1,\ z = 2$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & + & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

R. $x =- 1,\ y = 1,\ z = 2$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ 4x & + & 4y & - & z & = & -2 \end{array}$$

R. $x =- 1,\ y = 1,\ z = 2$

6. En una competición deportiva celebrada en un IES participaron 33 atletas distribuidos según la edad, en tres categorías: Infantiles, Cadetes y Juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en 2 unidades al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el cuádruple del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

R. En la categoría infantil hubo 10 atletas, en la categoría cadete hubo 18 atletas y en la juvenil, 5 atletas

7. En una empresa trabajan 125 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace una cuarta parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día se lo hacen el cuádruple de los que se lo hacen el tercer día. Determina el número de empleados que pasaron la revisión en cada día.

R. El N.º de empleados que pasaron la revisión el 1er día fue de 25, el 2do día fue de 80 y el 3er día fue de 20.