

ENCCH
plantel ORIENTE

**GUÍA PARA EL EXAMEN
EXTRAORDINARIO
DE MATEMÁTICAS III**
PROGRAMA ACTUALIZADO

ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
PEDRO MENDOZA ALVAREZ

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza
CICLO 2025 - 2026

ENCCH

plantel ORIENTE

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS III

PROGRAMA ACTUALIZADO

**ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
PEDRO MENDOZA ALVAREZ**

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza
CICLO 2025 - 2026

INTRODUCCIÓN

El presente documento tiene el propósito de guiar al alumnado —en particular a los del plantel Oriente— en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas III (última modificación: julio de 2024) del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Esta guía ha sido elaborada por un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH, quienes compartimos el interés de apoyar al alumnado alumnos que, por diversas razones, adeudan dicha asignatura.

Su contenido se basa y cubre los aprendizajes y la temática del programa vigente de la asignatura antes señalada. Asimismo, cumple con las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario, según el Glosario de Términos del Protocolo de Equivalencias del Colegio.

Cada unidad se subdivide en tres secciones:

La primera sección presenta los conceptos clave de la unidad, partiendo de los aprendizajes y la temática, e incluye el desarrollo disciplinario y didáctico. Se utilizan explicaciones teóricas formales, figuras (todas elaboradas por los autores), y una amplia variedad de ejemplos prácticos resueltos, con el fin de que el alumno se apropie de los conceptos y haga un uso correcto de los algoritmos y conocimientos correspondientes. En el desarrollo disciplinario, también se propone un conjunto de ejercicios para que el estudiante practique lo aprendido.

La segunda sección continúa con el refuerzo de los temas mediante ejercicios adicionales y problemas de aplicación.

La tercera sección incluye las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2.

La cuarta sección propone un examen de autoevaluación —con sus respectivas soluciones— para que el alumnado pueda medir los conocimientos y habilidades adquiridos.

En la parte final de la obra se presentan las referencias bibliográficas que el alumnado puede consultar para profundizar en los temas de su interés. Estas referencias también pueden servir de apoyo a los profesores para enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abordados en la guía.

LOS AUTORES





Esta guía ha sido diseñada y escrita para que la utilices como apoyo y complemento sustantivo en tu proceso de preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas III. Su propósito central pretende proporcionarte un marco disciplinario preciso que te permita, según tus necesidades específicas, repasar y apropiarte de los conocimientos necesarios, explorar y comprender los conceptos básicos que pudieron quedar pendientes, y practicar de manera intensiva y profunda los algoritmos y procedimientos de mayor relevancia dentro del estudio de la resolución de triángulos y de la Geometría Analítica a nivel bachillerato. Para aprovechar al máximo este recurso, debes seguir una metodología de estudio activa y reflexiva.

Estrategia de Estudio y Enfoque en la Lectura

Se te recomienda que, antes de intentar resolver cualquier problema o actividad propuesta, leas con atención la sección teórica correspondiente o la parte específica de tu interés. Es imprescindible que tengas presente que la lectura de textos matemáticos difiere significativamente de la lectura de otros materiales, como una novela, un periódico o incluso libros de otras disciplinas. Los textos matemáticos requieren un nivel de atención y procesamiento distinto: las partes de interés suelen leerse y releerse varias veces para lograr una comprensión cabal. No se trata de una lectura pasiva, sino de una interacción constante con los conceptos.

Pon especial énfasis en el análisis de los ejemplos totalmente resueltos. No los observes simplemente; reconstruye activamente su resolución. Utiliza lápiz y papel para seguir cada paso a medida que lees, reconstruyendo los procedimientos. Acto seguido, intenta resolver por tu cuenta los ejercicios propuestos en la sección. Siguiendo esta metodología, optimizarás tu tiempo de estudio e incrementarás sustancialmente tu comprensión conceptual y tu habilidad en la aplicación de los algoritmos.

Del Conocimiento Superficial a la Comprensión Profunda.

En un primer acercamiento a cualquier unidad, es útil memorizar las definiciones y propiedades sin olvidar los supuestos o hipótesis que los validan y esforzarse por captar la esencia de los conceptos. Sin embargo, es un error común y grave tratar los ejercicios resueltos que observes como simples reglas o patrones fijos para memorizar. Las matemáticas no se reducen a la memorización; son, en esencia, el arte de modelar situaciones y, posteriormente, resolver problemas. Por tanto, ¡no se trata de memorizar problemas resueltos!, pero sí de comprender el por qué de su uso y forma de aplicación.

Para lograr una comprensión significativa y duradera de una unidad o tema, es imprescindible que te sumerjas en la práctica de modelar y resolver problemas, tantos como te sea posible. Intenta escribir tus soluciones de una forma lógica, ordenada y detallada, paso a paso. Comprende que, por lo general, resolver un problema matemático implica realizar varios intentos. No te desanimes ni te rindas si no logras resolverlo en los primeros intentos. Estos intentos iniciales están directamente relacionados con la comprensión profunda del problema, lo que a su vez requiere leer su enunciado varias veces y relacionarlo inteligentemente con los conocimientos que ya posees de tus cursos previos de matemáticas, así como con los ejemplos resueltos de esta guía.

Perseverancia y Desarrollo del Razonamiento

Lucha con cada problema hasta resolverlo. Esta perseverancia es formativa. Una vez que hayas experimentado este proceso de lucha intelectual y éxito final varias veces, comenzarás a comprender verdaderamente el papel fundamental de las matemáticas en el desarrollo de tus procesos mentales y de aprendizaje, fortaleciendo tu pensamiento lógico, analítico y creativo.

Sobre las Respuestas y la Autoevaluación

Las respuestas a todos los ejercicios y a las preguntas de los exámenes de autoevaluación propuestos se encuentran en la tercera sección de cada unidad. Es importante señalar que, en caso de que tu respuesta a un ejercicio difiera de la que te proporcionamos, no concluyas de inmediato que estás en un error. Existe la posibilidad de que tu respuesta y la propuesta sean equivalentes, estando vinculadas mediante ciertas transformaciones algebraicas, simplificaciones o consideraciones geométricas. Ambas podrían ser correctas. Te recomendamos contrastar cuidadosamente tu procedimiento con el sugerido para identificar posibles desvíos o confirmar la validez de tu enfoque alternativo. Esta comparación crítica es en sí misma una valiosa herramienta de aprendizaje.

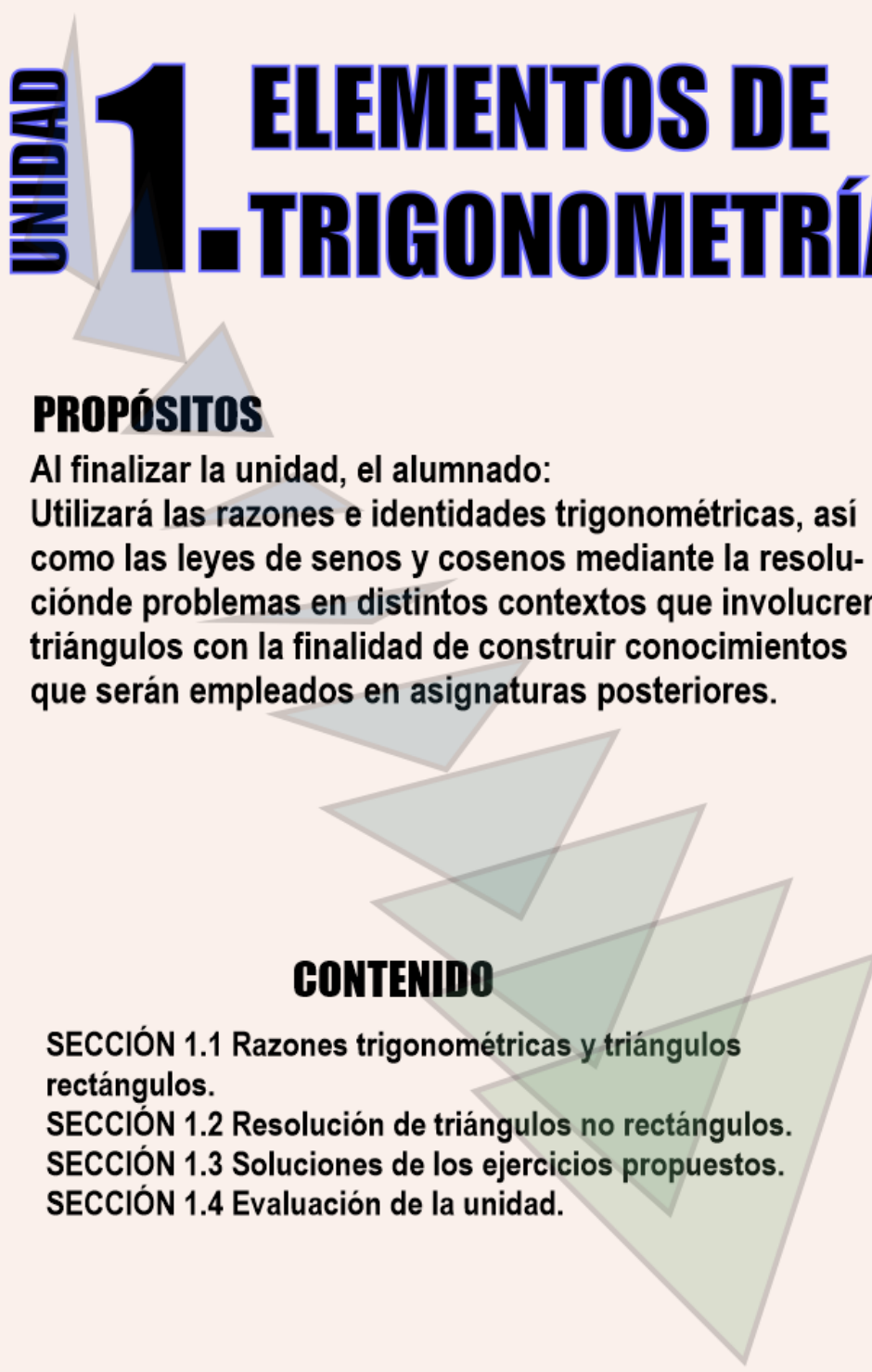
GUÍA PARA EXAMEN EXTRAORDINARIO

Es el documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.



CONTENIDO

1. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA	1
1.1 Razones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos	3
1.2 Resolución de triángulos no rectángulos	17
1.3 Soluciones de los ejercicios propuestos	27
1.4 Evaluación de la unidad	31
2. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA	35
2.1 Puntos y segmentos de recta en el plano cartesiano	37
2.2 Lugares geométricos en el plano cartesiano	49
2.3 Soluciones de los ejercicios propuestos	53
2.4 Evaluación de la unidad	55
3. LA LÍNEA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA	59
3.1 Ecuaciones y formas de la línea recta en el plano cartesiano	61
3.2 Líneas rectas en el plano cartesiano	69
3.3 Soluciones de los ejercicios propuestos	81
3.4 Evaluación de la unidad	85
4. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA	89
4.1 Ecuaciones y elementos de la parábola en el plano cartesiano	91
4.2 Parábolas en el plano cartesiano	103
4.3 Soluciones de los ejercicios propuestos	115
4.4 Evaluación de la unidad	121
5. LA CIRCUNFERENCIA, LA ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS	125
5.1 La circunferencia, elementos y ecuaciones	127
5.2 Ecuaciones y elementos de la elipse en el plano cartesiano	139
5.3 Soluciones de los ejercicios propuestos	153
5.4 Evaluación de la unidad	157
BIBLIOGRAFÍA	161



UNIDAD

1. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumnado:

Utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

CONTENIDO

SECCIÓN 1.1 Razones trigonométricas y triángulos rectángulos.

SECCIÓN 1.2 Resolución de triángulos no rectángulos.

SECCIÓN 1.3 Soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 1.4 Evaluación de la unidad.



CONCEPTOS CLAVE

Ángulo. Figura plana formada por la “abertura” de dos semirrectas que se intersecan en un punto que se denomina vértice, su amplitud o medida se mide en grados (o en radianes).

Triángulo. Figura geométrica formada por tres segmentos de recta determinados por tres puntos (llamados vértices) no colineales.

Triángulo rectángulo. Triángulo con un ángulo interior recto (de amplitud 90°).

Cateto opuesto. En un triángulo rectángulo y seleccionado uno de sus ángulos agudos, el lado que no forma parte de este ángulo.

Cateto adyacente. En un triángulo rectángulo y seleccionado uno de sus ángulos agudos, el lado de menor longitud que forma parte del ángulo que fue seleccionado.

Hipotenusa. En un triángulo rectángulo, el lado de mayor longitud.

Razón. Comparación de dos cantidades por medio de una división.

Razón trigonométrica. Comparación, por medio de una división, de las longitudes de dos lados de un triángulo.

Razón trigonométrica inversa. El ángulo que corresponde a la razón de las longitudes de dos lados de un triángulo.

Triángulo oblicuo. Triángulo que no tiene ángulo recto.

Triángulo resuelto. Cuando se conocen las amplitudes de sus tres ángulos interiores y las longitudes de sus tres lados.

Ángulo de elevación. Ángulo medido hacia arriba desde el rayo horizontal (la horizontal).

Ángulo de depresión. El ángulo medido hacia abajo desde el rayo horizontal.

Ley. Propiedad o norma que describe el comportamiento de la combinación un grupo de elementos en una estructura matemática.

Identidad. Igualdad algebraica que contiene variables y se verifica para cualquier valor que se asigne a la(s) variable(s).

Teorema de Pitágoras. Propiedad que establece la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

1.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

1. Reconoce que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un
2. Infiere que las razones trigonométricas son invariantes en triángulos semejantes.
3. Calcula los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30° , 45° y 60° .
4. Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.
5. Deduce algunas identidades trigonométricas fundamentales.
6. Emplea las identidades trigonométricas fundamentales para mostrar la equivalencia de expresiones trigonométricas.

4 UNIDAD 1 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Las razones trigonométricas se definen con base a las razones de dos los lados de un triángulo rectángulo. La **figura 1.** muestra los elementos de un triángulo rectángulo (lados y ángulos) que se vinculan en la definición de las razones trigonométricas.

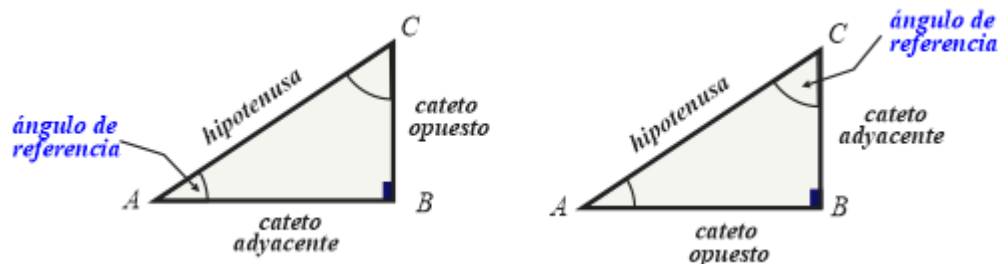


FIGURA 1.

En la **figura 1.**

- Las letras mayúsculas representan los ángulos interiores (o a sus amplitudes o medidas) del triángulo.
- Las letras minúsculas representaremos a los lados (o a sus longitudes o medidas).
- Seleccionado un ángulo (representado con cierta letra mayúscula), el lado que no forma parte de él (se dice que se le opone) está representado con la misma letra pero minúscula.
- Una vez seleccionado un ángulo agudo, utilizaremos la notación:
 co al cateto opuesto, co al cateto adyacente y con h a la hipotenusa.

Observa la **figura 2.**

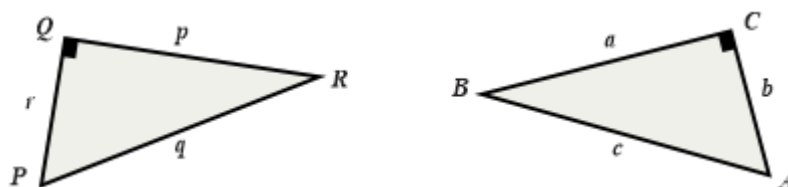


FIGURA 2.

DEFINICIÓN 1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea A es la amplitud de un ángulo agudo (interior y no recto) de un triángulo rectángulo, entonces

$$\text{seno } A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{cosecante } A = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$

$$\text{coseno } A = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{tangente } A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

$$\text{cotangente } A = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$

$$\text{secante } A = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

Compactemos la notación empleada en **definición 1**.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} A = \frac{co}{h} & \operatorname{csc} A = \frac{h}{co} & \cos A = \frac{ca}{h} \\ \sec A = \frac{h}{ca} & \operatorname{tg} A = \frac{co}{ca} & \operatorname{ctg} A = \frac{ca}{co}, \end{array}$$

en donde los símbolos co , ca y h tienen un significado dual (con ellos nos referiremos tanto al segmento de recta como a su longitud).



EJEMPLO 1. CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

a. En la figura los valores de las razones trigonométricas son:

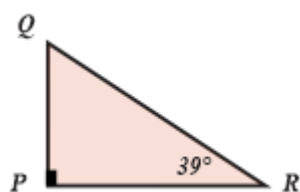


FIGURA 3.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} A = \frac{3}{5} = 0.6 & \cos A = \frac{4}{5} = 0.8 & \operatorname{tg} A = \frac{3}{4} = 0.75 \\ \operatorname{ctg} A = \frac{4}{3} = 1.\bar{3} & \sec A = \frac{5}{4} = 1.25 & \operatorname{csc} A = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \end{array}$$

b. Para el triángulo rectángulo

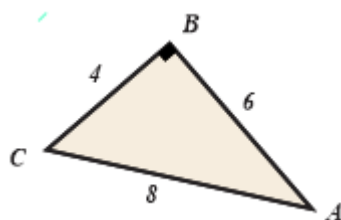


FIGURA 4.

$$\begin{array}{ll} \cos 34^\circ = \frac{8}{9.65} & \operatorname{csc} 56^\circ = \frac{9.65}{8} \\ \operatorname{sen} 56^\circ = \frac{8}{9.65} & \sec 34^\circ = \frac{9.65}{8} \end{array}$$

Con un valor específico de una razón trigonométrica podemos calcular la amplitud del ángulo que la define, en este proceso se utiliza la razón trigonométrica inversa.

DEFINICIÓN 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea un triángulo rectángulo tal que r es la razón entre las longitudes de los lados que constituyen al ángulo agudo A con medida (o amplitud) $m\angle A$:

- Si $\operatorname{sen} A = r$, entonces $m\angle A = \operatorname{ang} \operatorname{sen} r$, o bien $m\angle A = \operatorname{sen}^{-1} r$
- Si $\cos A = r$, entonces $m\angle A = \operatorname{ang} \cos r$, o bien $m\angle A = \cos^{-1} r$
- Si $\operatorname{tg} A = r$, entonces $m\angle A = \operatorname{ang} \operatorname{tg} r$, o bien $m\angle A = \operatorname{tg}^{-1} r$

6 UNIDAD 1 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Las otras tres razones trigonométricas también tiene asociada una razón trigonométrica inversa, sin embargo, su utilidad es limitada.

El cálculo de las razones trigonométricas inversa, se realiza utilizando una calculadora científica o alguna APP como Geogebra, Symbolab Calculator, entre otras. En el caso de una calculadora científica el proceso se realiza digitando una de las tres opciones; ten en cuenta que digitar:

shift relación ángulo exe

inv relación ángulo exe

2nd relación ángulo exe

exe equivale a =



EJEMPLO 2. CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. Cálculo de razones trigonométricas inversas

a. Si $\cos 0^\circ = 1$, entonces $\text{ang } \cos 1 = 90^\circ$

b. Si $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\text{ang } \sin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

c. cuando $\cos 60^\circ = 0.5$, entonces $\text{ang } \cos 0.5 = 60^\circ$

d. Si $\tan 45^\circ = 1$, entonces $\text{ang } \tan 1 = 45^\circ$

e. Si $\cos A = 0.20$, entonces $m\angle A = \text{ang } \cos 0.20 = 78.46$

f. Si $\tan C = 3.7$, entonces $m\angle C = \text{ang } \tan 3.7 = 74.88$

Todo triángulo incluye tres lados y tres ángulos interiores y se considera resuelto cuando son conocidas las medidas de estos elementos y en su resolución son útiles las propiedades:

i. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° (la suma de las amplitudes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°).

ii. El teorema de Pitágoras.

Por otra parte, el proceso de resolución de un triángulo rectángulo se sustenta en relacionar tres de sus elementos por medio de una razón trigonométrica (dos conocidos y uno desconocido).



EJEMPLO 3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

a. Resolución del triángulo rectángulo de la **figura 5**.

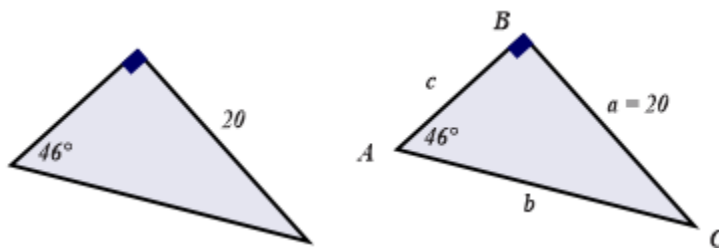


FIGURA 5.

i. $46^\circ + m\angle C = 90^\circ$, de donde $m\angle C = 34^\circ$

ii. La relación *seno* vincula los elementos $m\angle A = 46^\circ$ y $c = 20$ con b , entonces,

$$\text{sen} 46^\circ = \frac{20}{b}, \text{ o bien } b = \frac{20}{\text{sen} 46^\circ} = \frac{20}{0.7193} = 27.80$$

iii. La relación *coseno* vincula los elementos $m\angle A = 46^\circ$ y $b = 27.80$ con c , entonces

$$\cos 46^\circ = \frac{c}{27.80}, \text{ o bien, } c = (27.80) \cos 46^\circ = 19.31$$

iv. Resumen:

$$m\angle A = 46^\circ, m\angle B = 90^\circ, m\angle C = 34^\circ, a = 20, b = 27.80 \text{ y } c = 19.31$$

b. Resolución del triángulo rectángulo de la **figura 6**.

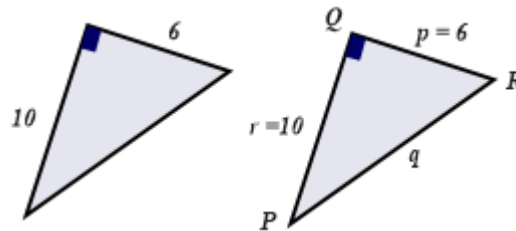


FIGURA 6.

i. La relación *tangente* vincula los elementos conocidos (lados) $r = 10$ y $p = 6$ con el elemento (ángulo) desconocido $m\angle P$, entonces,

$$\text{tg } P = \frac{6}{10} = 0.6, \text{ entonces } m\angle P = \text{ang } \text{tg } 0.6 = 30.96^\circ$$

ii. $30.96^\circ + m\angle R = 90^\circ$, de donde $m\angle R = 59.04^\circ$

iii. La relación *seno* vincula los elementos conocidos $m\angle P$ y $p = 6$ con q , entonces

$$\text{sen } 30.96^\circ = \frac{6}{q}, \text{ o bien } q = \frac{6}{\text{sen } 30.96^\circ} = 11.663$$

iv. Resumen:

$$m\angle P = 30.96^\circ, m\angle Q = 90^\circ, m\angle R = 59.04^\circ, p = 6, q = 11.663 \text{ y } r = 10$$

c. Resolución del triángulo rectángulo de la **figura 7**.

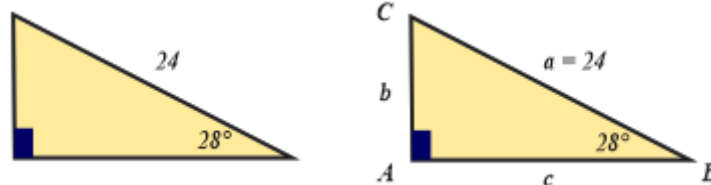


FIGURA 7.

i. La amplitud del ángulo $\angle B$ es

$$m\angle B = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

ii. Con la relación *seno* vincula el elemento desconocido c y $a = 24$, entonces $\operatorname{sen} 28^\circ = \frac{b}{24}$, luego

$$b = (24) \operatorname{sen} 28^\circ = (24)(0.532) = 11.26$$

iii. La relación *coseno* vincula el lado desconocido c y $a = 24$, entonces $\cos 28^\circ = \frac{c}{24}$, luego

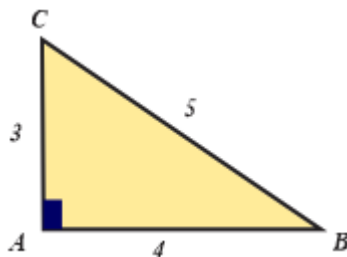
$$c = (24) \cos 28^\circ = (24)(0.88) = 21.19$$

iv. Resumen:

$$m\angle A = 90^\circ, m\angle B = 28^\circ, m\angle C = 62^\circ, a = 24, b = 7.44 \text{ y } c = 21.19$$

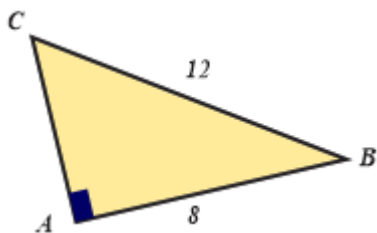
SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 1

1. Calcula todas las razones trigonométricas (valores) del ángulo B

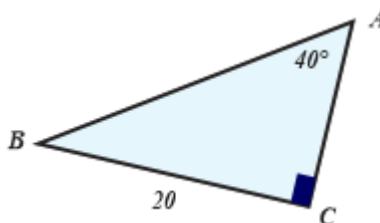


2. Resuelve los triángulos.

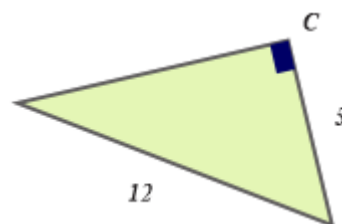
a.



b.



c.



La construcción de modelos basados en triángulos rectángulos apoya la resolución de problemas relacionados con “sitios” inaccesibles”, vinculado con ello se encuentran los conceptos de “ángulo de elevación” y “ángulo de depresión”. Si un ángulo se mide “por debajo” de la horizontal del punto de observación se llama ángulo de depresión, en caso de que se mida hacia arriba de la horizontal se conoce como ángulo de elevación, observa la **figura 8**.



FIGURA 8.


EJEMPLO 4. APLICACIONES
a. ALTURA A LA QUE VUELA UN ÁGUILA

Una persona (O) sabe que el ángulo de elevación al lugar donde se encuentra un gavián (G) es 48° , la observación la efectúa a 1.7 metros del piso. La sombra (S) del gavián se proyecta verticalmente sobre el suelo a una distancia de 8 metros del observador, ¿a qué altura se encuentra el águila?

- Trazamos una figura que muestre esta situación.
- Sea h la longitud de la altura.
- La razón trigonométrica que relaciona el ángulo de elevación, la altura del águila y la distancia entre la sombra del águila y el observador es la tangente, por tanto $\operatorname{tg} 48^\circ = \frac{h-1.7}{8}$,

entonces

$$h - 1.7 = (8) \operatorname{tg} 48^\circ \text{ metros,}$$

luego

$$h = 1.7 + (8) \operatorname{tg} 48^\circ = 10.58 \text{ metros.}$$

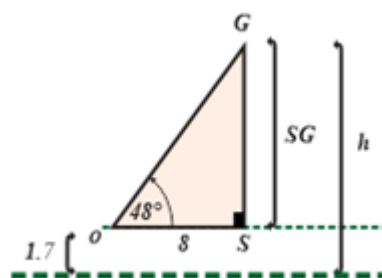


FIGURA 9.

b. DISTANCIA A UN AUTOBÚS

Un observador (O) se encuentra en la cima de una torre, a una altura (visual) de 65 metros, observa un autobús (A) con un ángulo de depresión de 39° . ¿A qué distancia se encuentra el camión del pie de la torre (B)?

- La figura ilustra la situación.
- Sea d la distancia entre el camión y el pie de la torre.

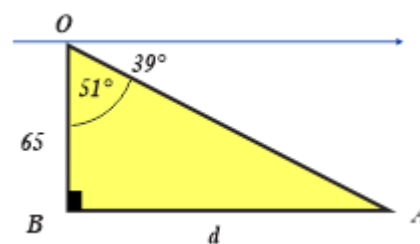


FIGURA 10.

- La razón trigonométrica que relaciona el ángulo de depresión, la distancia entre el camión y el pie de la torre, y su altura es la tangente, entonces

$$\operatorname{tg} 51^\circ = \frac{d}{65}, \text{ y } d = 65 \operatorname{tg} 51^\circ = 80.27 \text{ metros.}$$

c. ÁREA Y VOLUMEN DE UNA CASA DE CAMPAÑA PIRÁMIDAL CON BASE CUADRADA

Calcularemos el volumen y el área de una casa de campaña con forma de pirámide regular y base cuadrada. Cada lado de la base mide 10 unidades y las caras forma un ángulo de 75° respecto su la base.

i. La **figura 11**. muestra la forma piramidal de la casa de campaña.

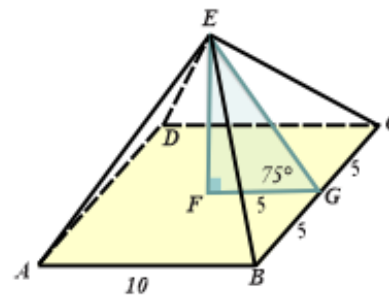


FIGURA 11.

ii. El volumen de una pirámide se calcula con la relación

$$V = \frac{1}{3} (\text{área de la base}) (\text{altura}),$$

por tanto, requerimos calcular la longitud de la altura. La base del triángulo mostrado en la figura

(color verde) mide $|FG| = 5$ unidades; por tanto $\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{|EF|}{5}$, así

$$h = |EF| = 5 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 18.66 \text{ y } V = \frac{1}{3} (10)^2 (18.66) = 62 \text{ unidades cúbicas.}$$

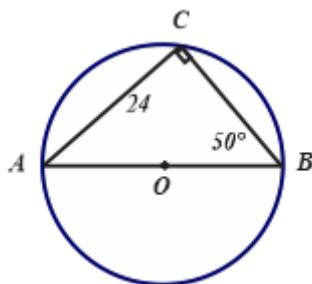
ii. El de una cara triangular es $A_{BEG} = \frac{1}{2} (10) \left(\frac{5}{\cos 75^\circ} \right) = 96.59$ unidades cuadradas.

El área de la pirámide es cuatro veces el área de una cara más el área de la base, es decir

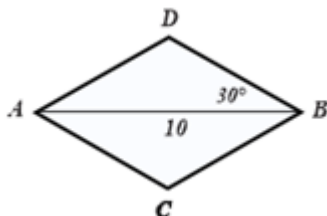
$$A_{\text{piramide}} = 4(96.59) + 10^2 = 586.37 \text{ unidades cuadradas.}$$

**SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 2**

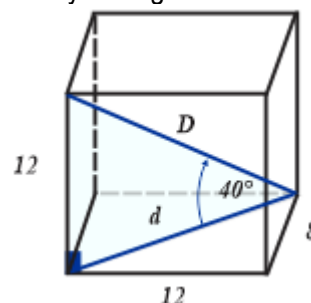
1. Calcula el perímetro de la circunferencia.



2. Obtén el área y el perímetro del rombo.



3. Calcula la amplitud del ángulo que forman: la diagonal de la base y la diagonal del ortoedro.



4. Para subir un objeto a una carretera se utiliza una placa metálica como rampa, la longitud de esta es 10 metros. El ángulo que forma la placa con la carretera es 25° ¿A qué altura se encuentra la carretera respecto al objeto?
5. Cuando los rayos del Sol tienen una inclinación de 52° sobre la horizontal, un árbol proyecta un sombra de 4 metros de longitud sobre el piso desde su base. Calcula la altura del árbol.
6. Una persona, cuyos ojos se encuentran a 1.7 metros de sus pies determina que la medida del ángulo de elevación del asta bandera de San Ángel es 58° , la medición la efectúa desde una loma de 4 metros de altura y a una distancia de 15 metros del pie del asta. Determina la altura del asta bandera.
7. Dos lanchas A y B parten de la misma bahía situada en un punto O . Sus desplazamientos tienen direcciones “rectilíneas” perpendiculares. La lancha A se desplaza al norte a una velocidad de 11 kilómetros por hora, mientras la lancha B se desplaza al oeste a una velocidad de 18 kilómetros por hora. ¿Qué ángulos forma la trayectoria (respecto a la dirección de sus desplazamientos) que los une después de transcurrida media hora? (distancia es igual a la velocidad por tiempo).



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

En matemáticas, una identidad es una relación de igualdad entre dos expresiones que es verdadera para todos los valores asignados a las variables para los cuales están definidas ambas expresiones.

DEFINICIÓN 3. IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una “igualdad” de dos expresiones que involucran razones trigonométricas que es válida para todas las asignaciones posibles al ángulo que dependen, recibe el nombre de identidad trigonométrica.

Antes definimos:

$$\operatorname{sen} A = \frac{co}{h}, \cos A = \frac{ca}{h}, \operatorname{tg} A = \frac{co}{ca}, \operatorname{ctg} A = \frac{ca}{co}, \sec A = \frac{h}{ca} \text{ y } \csc A = \frac{h}{co}, \text{ donde:}$$

co y ca representan las longitud del cateto opuesto y adyacente respectivamente, y h la longitud de la hipotenusa.

DEFINICIÓN 4. IDENTIDADES RECÍPROCAS

- a. Si $\csc A \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} A = \frac{1}{\csc A}$, o bien $\csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$, siempre que $\operatorname{sen} A \neq 0$
- b. Si $\sec A \neq 0$, entonces $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, o bien $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, siempre que $\cos A \neq 0$
- c. Si $\operatorname{ctg} A \neq 0$, entonces $\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$, o bien $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$, si $\operatorname{tg} A \neq 0$

Observa: 1. $tg A = \frac{co}{ca} = \frac{\frac{co}{h}}{\frac{ca}{h}} = \frac{sen A}{cos A}$ y 2. $ctg A = \frac{c.a}{c.o} = \frac{\frac{ca}{h}}{\frac{co}{h}} = \frac{cos A}{sen A}$

DEFINICIÓN 4. IDENTIDADES DE COCIENTE

a. $tg A = \frac{sen A}{cos A}$, siempre que $cos A \neq 0$ b. $ctg A = \frac{cos A}{sen A}$, siempre que $sen A \neq 0$

Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se relacionan con el teorema de Pitágoras; en

el triángulo de la figura 1. $sen A = \frac{a}{b}$, $cos A = \frac{c}{b}$, o

bien, $a = b \cdot sen A$ y $c = b \cdot cos A$; asimismo,

$$b^2 = a^2 + c^2 \text{ (Teorema de Pitágoras).}$$

Por tanto,

$$b^2 = b^2 \cdot sen^2 A + b^2 \cdot cos^2 A, \text{ o bien } 1 = sen^2 A + cos^2 A$$

Si dividimos $1 = sen^2 A + cos^2 A$ por $sen^2 A$ o por $cos^2 A$ obtenemos las otras dos identidades trigonométricas de la **definición 5**.

DEFINICIÓN 5. IDENTIDADES PITAGÓRICAS

a. $sen^2 A + cos^2 A = 1$ b. $1 + tg^2 A = sec^2 A$ c. $1 + ctg^2 A = csc^2 A$

En lo sucesivo se utiliza indistintamente:

$$sen^2 A = (sen A)^2, \quad cos^2 A = (cos A)^2, \quad tg^2 A = (tg A)^2, \text{ etcétera.}$$

Otro grupo de identidades trigonométricas, cuya deducción requiere del uso de aspectos geométricos un poco más elaborados, pero de gran importancia se encuentran en la **definición 6**.

DEFINICIÓN 6. IDENTIDADES DE SUMA DE ÁNGULOS

a. $sen(A \pm B) = sen A cos B \pm cos A sen B$

b. $cos(A \pm B) = cos A cos B \mp sen A sen B$

c. $tg(A + B) = \frac{tg A + tg B}{1 + tg A tg B}$

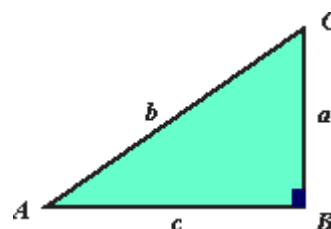


FIGURA 12.

Aplicando las identidades trigonométricas de las *definiciones 1. a 5.* es posible deducir y/o simplificar otras identidades trigonométricas.



EJEMPLO 5. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

a. $1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 2$

Verificación:

AFIRMACIÓN

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A &= 1 + \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

RAZÓN

Rescribiendo en términos de seno y coseno.

Simplificando

b. $\operatorname{tg} A + \sec A = \frac{1}{\sec A - \operatorname{tg} A}$

Verificación.

AFIRMACIÓN

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A + \sec A &= (\operatorname{tg} A + \sec A) \frac{(\operatorname{tg} A - \sec A)}{(\operatorname{tg} A - \sec A)} \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{tg} A - \sec A} \\ &= \frac{\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A}{\sec A - \operatorname{tg} A} \\ &= \frac{1}{\sec A - \operatorname{tg} A} \end{aligned}$$

RAZÓN

Multiplicando y dividiendo por el binomio conjugado.

Operando algebraicamente.

Multiplicando y dividiendo por menos uno.

Identidad pitagórica

c. $(\operatorname{sen}^2 A)(1 + \operatorname{ctg}^2 A) = 1$ verificación.

AFIRMACIÓN

$$\begin{aligned} &= (\operatorname{sen}^2 A) \left(\csc^2 A \right) \\ &= \operatorname{sen}^2 A \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} \\ &= 1 \end{aligned}$$

RAZÓN

Identidad pitagórica.

Identidad recíproca.

Simplificación.

14 UNIDAD 1 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

d. $tg^2 A - sen^2 A = (sen^2 A)(tg^2 A)$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$tg^2 A - sen^2 A = \frac{sen^2 A}{cos^2 A} - sen^2 A$$

Identidad de cociente.

$$= (sen^2 A) \left(\frac{1}{cos^2 A} - 1 \right)$$

Factorización

$$= (sen^2 A)(sec^2 A - 1)$$

Identidad recíproca.

$$= (sen^2 A)(tg^2 A)$$

Identidad pitagórica.

e. Verificaremos la identidad: $\frac{cos A}{1 - tg A} + \frac{sen A}{1 - ctg A} = cos A + sen A$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$\frac{cos A}{1 - tg A} + \frac{sen A}{1 - ctg A} = \frac{cos A}{1 - \frac{sen A}{cos A}} + \frac{sen A}{1 - \frac{cos A}{sen A}}$$

Identidades de cociente

$$tg A = \frac{sen A}{cos A} \text{ y } ctg A = \frac{cos A}{sen A}$$

$$= \frac{cos A}{\frac{cos A - sen A}{cos A}} + \frac{sen A}{\frac{sen A - cos A}{sen A}}$$

Ejecución de “quebrados”.

$$= \frac{cos^2 A}{cos A - sen A} + \frac{sen^2 A}{sen A - cos A}$$

Simplificación.

$$= \frac{cos^2 A - sen^2 A}{cos A - sen A}$$

Simplificación.

$$= \frac{(cos A - sen A)(cos A + sen A)}{cos A - sen A}$$

Factorización en binomios conjugados.

$$= cos A + sen A$$

Simplificación.

f. $1 - cos^4 A = sen^2 A(1 + cos^2 A)$, verificación:

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$1 - cos^4 A = (1 - cos^2 A)(1 + cos^2 A)$$

Factorización como binomios conjugados.

$$= sen^2 A(1 + cos^2 A)$$

Identidad pitagórica.

g. $\frac{1}{1 + cos A} = csc^2 A - (csc A)(ctg A)$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$\frac{1}{1 + cos A} = \frac{1}{(1 + cos A)(1 - cos A)}$$

Neutro multiplicativo

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos A}{1 - \cos^2 A} && \text{Producto de binomios conjugados} \\
 &= \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen}^2 A} && \text{Identidad pitagórica} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} - \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \frac{1}{\operatorname{sen} A} && \text{Operaciones aritméticas.} \\
 &= \csc^2 A - (\operatorname{ctg} A)(\csc A) && \text{Identidades: recíprocas, identidades de cociente.}
 \end{aligned}$$

$$\text{h. } \sec^2 A + \csc^2 A = (\sec^2 A)(\csc^2 A)$$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$\begin{aligned}
 \sec^2 A + \csc^2 A &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A} + \frac{1}{\cos^2 A} && \text{Identidades recíprocas.} \\
 &= \frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{(\operatorname{sen}^2 A)(\cos^2 A)} && \text{Aritmética.} \\
 &= \frac{1}{(\operatorname{sen}^2 A)(\cos^2 A)} && \text{Identidad pitagórica} \\
 &= (\sec^2 A)(\csc^2 A) && \text{Identidades recíprocas.}
 \end{aligned}$$

$$\text{i. Verifiquemos: } \operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} 2A &= \operatorname{sen}(A + A) && \text{Suma de términos semejantes.} \\
 & && \text{Identidades de suma de ángulos:} \\
 &= (\operatorname{sen} A)(\cos A) + (\cos A)(\operatorname{sen} A) && \operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\
 &= 2(\operatorname{sen} A)(\cos A) && \text{Suma de términos semejantes.}
 \end{aligned}$$

$$\text{j. Verifiquemos: } \cos 2A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A$$

AFIRMACIÓN

RAZÓN

$$\begin{aligned}
 \cos 2A &= \cos(A + A) && \text{Propiedad de la suma.} \\
 &= (\cos A)(\cos A) - (\operatorname{sen} A)(\operatorname{sen} A) && \text{Identidades de suma de ángulos} \\
 & && \cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\
 &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A && \text{Simplificación.}
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$$

k. Verifiquemos: $\operatorname{tg} 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$

AFIRMACIÓN

$$\operatorname{tg}(A + A) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} A}$$

$$\operatorname{tg}(2A) = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}$$

Identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Simplificación.

RAZÓN

Identidad $\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$

Simplificación.


SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 3

1. Verifica las identidades.

a. $\operatorname{sen} A \sec A = \operatorname{tg} A$

b. $\cos A (\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A) = \csc A$

c. $\operatorname{sen}^2 A (1 + (\operatorname{ctg} A)^2) = 1$

d. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \sec A \csc A$

e. $\csc A + \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\csc A - \operatorname{ctg} A}$

f. $\csc A - \operatorname{sen} A = \cos A \operatorname{ctg} A$

g. $\operatorname{sen}^4 A - \cos^4 A = \operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A$

h. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \sec A \cdot \csc A$

i. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \sec A \cdot \csc A$

j. $\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \operatorname{tg}^2 A \cdot \operatorname{sen}^2 A$

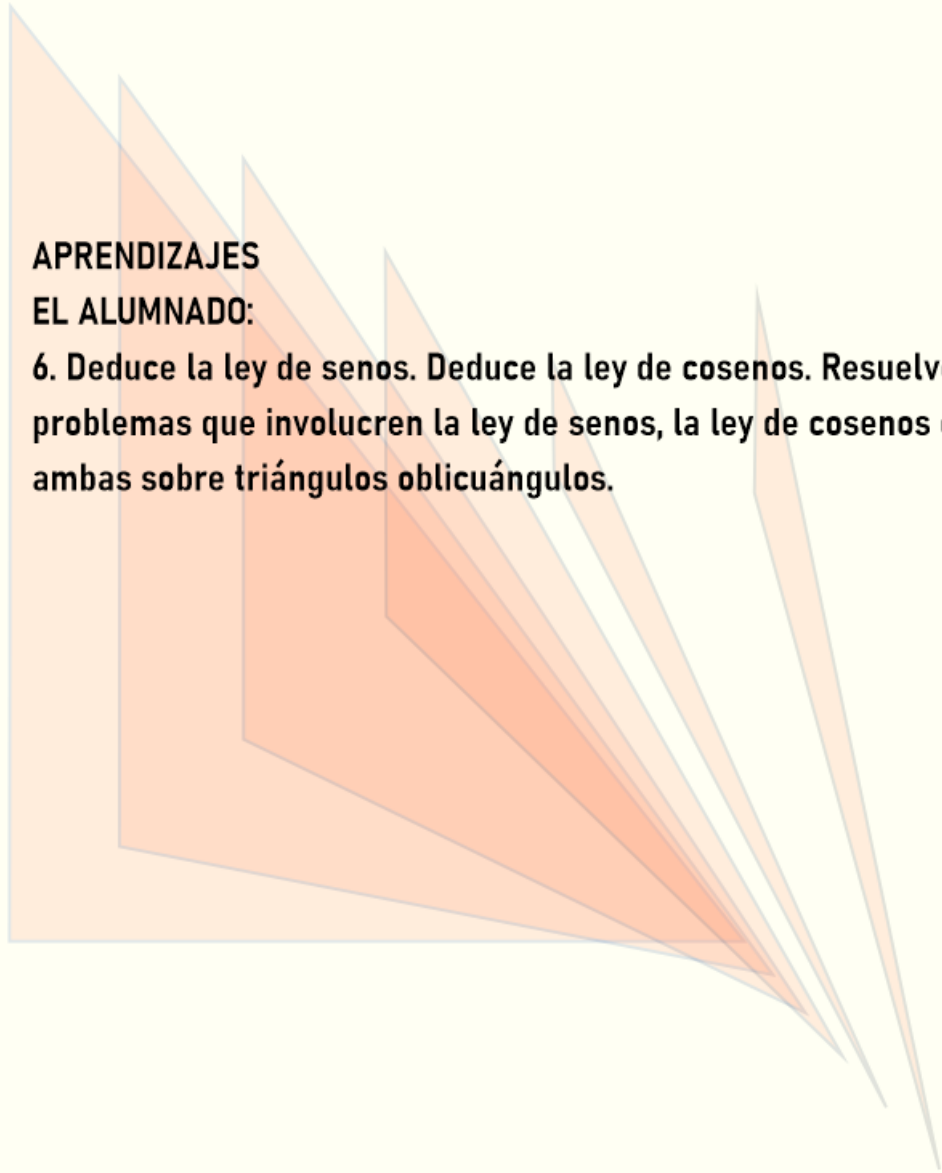
k. $1 - \operatorname{tg} A = \frac{\cos A - \operatorname{sen} A}{\cos A}$

1.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

6. Deduce la ley de senos. Deduce la ley de cosenos. Resuelve problemas que involucren la ley de senos, la ley de cosenos o ambas sobre triángulos oblicuángulos.



Las razones trigonométricas también son aplicables en la resolución de triángulos no rectángulos, sin embargo, su uso en la resolución de este tipo de triángulos requiere de trazos auxiliares lo que puede ser engorroso y complicado. El proceso utilizado en la resolución de triángulos no rectángulos se basa en las propiedades llamadas: ley de senos y ley de cosenos, estas propiedades pueden deducirse utilizando el teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y las alturas del triángulo de interés. La resolución de un triángulo no rectángulo se facilita con un uso adecuado de las propiedades 1., 2., y 3., propiedades que se refieren a la **figura 1.**

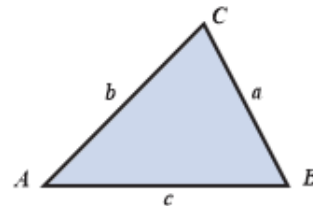


FIGURA 1.

PROPIEDAD 1. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

La ley de los senos garantiza que, en un triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

PROPIEDAD 2. LEY DE LOS SENOS

En el triángulo no rectángulo

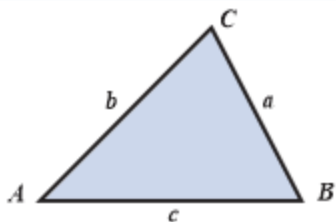


FIGURA 2.

se cumple la relación:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La ley de los cosenos afirma: “el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de la longitud de uno de ellos por la longitud de la proyección del otro lado sobre él.

PROPIEDAD 3. LEY DE LOS COSENOS

En el triángulo

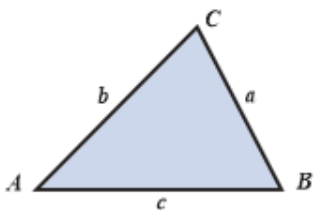


FIGURA 3.

se cumplen las relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

En la resolución de triángulos, la ley de los senos es útil si se conocen:

- i. La amplitudes de dos de los ángulos interiores y la longitud de un lado.
- ii. Las longitudes de dos lados y la amplitud de un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos.

La ley de los cosenos es aplicable si se conocen:

- i. La amplitud de un ángulo y las longitudes de los lados que lo forman.
- ii. Las longitudes de los tres lados.

En el **ejemplo 1**, presentamos la forma de el uso de las propiedades anteriores.



EJEMPLO 1. USO DE LA LEY DE SENOS Y DE LA LEY DE COSENOS

Resuelve los triángulos.

a.

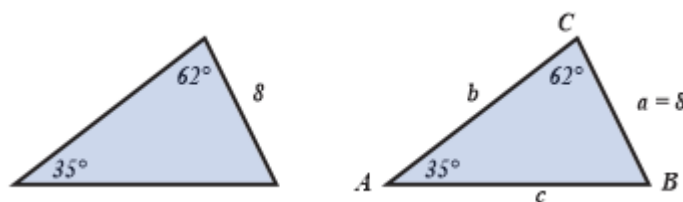


FIGURA 4.

La suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es 180° , entonces

$$35^\circ + m\angle B + 62^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow m\angle B = 83^\circ$$

Sustituimos los valores de los elementos conocidos en la ley de los senos, obtenemos

$$\frac{8}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 83^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 62^\circ},$$

por tanto:

i. con la parte $\frac{8}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 83^\circ}$ obtenemos $b = 8 \frac{\operatorname{sen} 83^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 8 \frac{0.9925}{0.5736} = 13.84$

ii. con la parte $\frac{8}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 62^\circ}$ obtenemos $c = 8 \frac{\operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 8 \frac{0.8829}{0.5736} = 12.31$

La tabla anexa sintetiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 8$	$b = 13.84$	$c = 12.31$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 35^\circ$	$m\angle B = 83^\circ$	$m\angle C = 62^\circ$

b.

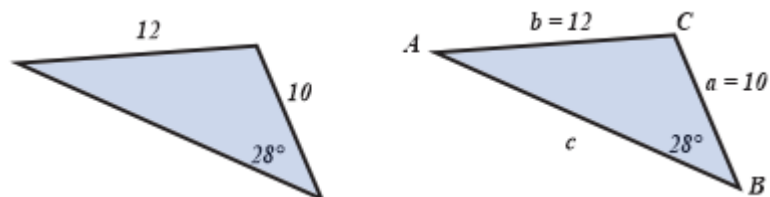


FIGURA 5.

Sustituimos los valores de los elementos conocidos en la ley de los senos, obtenemos

$$\frac{10}{\operatorname{sen} A} = \frac{12}{\operatorname{sen} 28^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} C^\circ},$$

por tanto,

Con la parte $\frac{10}{\operatorname{sen} A} = \frac{12}{\operatorname{sen} 28^\circ}$ obtenemos $\operatorname{sen} A = \frac{10 \operatorname{sen} 28^\circ}{12} = 0.3912$, por tanto,

$$m\angle A = \operatorname{angsen}(0.3912) = 23.03^\circ$$

Por otra parte, con

$$23.03^\circ + 28^\circ + m\angle C = 180^\circ$$

obtenemos

$$m\angle C = 180^\circ - 23.03^\circ - 28^\circ = 128.97^\circ$$

Con $\frac{12}{\operatorname{sen} 28^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 128.97^\circ}$ obtenemos $c = \frac{12 \operatorname{sen} 128.97^\circ}{\operatorname{sen} 28^\circ} = \frac{12(0.7771)}{0.4695} = 19.86$

La tabla sistematiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 10$	$b = 12$	$c = 19.86$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 23.03^\circ$	$m\angle B = 28^\circ$	$m\angle C = 128.97^\circ$

c. En el triángulo de la **figura 6**, se conocen las longitudes de los tres lados (inicialmente la ley de los senos carece de utilidad).

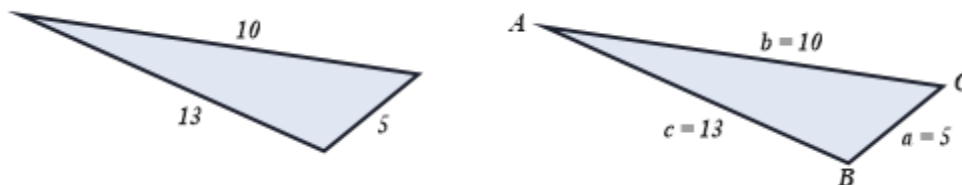


FIGURA 6.

En su resolución, primero aplicamos la ley de los cosenos para calcular $m\angle A$, obtenemos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{20^2 + 15^2 - 8^2}{2(20)(15)} = \frac{561}{600} = 0.935,$$

entonces

$$m\angle A = \cos^{-1} 0.935 = 20.77^\circ$$

La amplitud del $\angle B$ se calcula de la misma forma:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 15^2 - 20^2}{2(8)(15)} = \frac{-111}{240} = -0.4625,$$

por tanto,

$$m\angle B = \cos^{-1}(-0.4625) = 117.54^\circ$$

Dado que la suma las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo 180° obtenemos:

$$20.77^\circ + 117.54^\circ + m\angle C = 180^\circ,$$

entonces

$$m\angle C = 41.68^\circ$$

La siguiente tabla sintetiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 8$	$b = 20$	$c = 15$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 20.77^\circ$	$m\angle B = 117.55^\circ$	$m\angle C = 41.68^\circ$

d. En el triángulo de la **figura 7.**, inicialmente no es aplicable la ley de los senos (no se completa una razón), sin embargo, con la ley de los cosenos es posible determinar los valores de los elementos desconocidos.

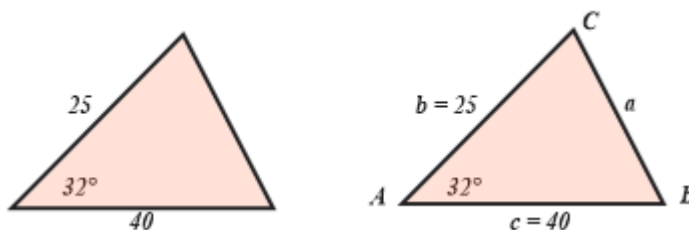


FIGURA 7.

La longitud del lado $\overline{BC}$ es

$$a^2 = 25^2 + 40^2 - 2(25)(40)\cos 32^\circ = 528.904, \text{ o bien } a = 22.998$$

La medida de $\angle C$ la obtenemos con la ley de los cosenos,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{529 + 625 - 1600}{2(22.998)(25)} = \frac{-446}{1150} = -0.388$$

y

$$m\angle C = \cos^{-1}(-0.388) = 112.8^\circ$$

Puesto que

$$32^\circ + m\angle B + 112.8^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow m\angle B = 35.2^\circ$$

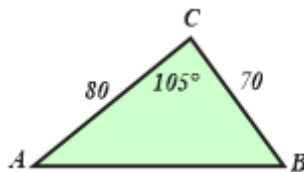
En la tabla anexamos los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 232.998$	$b = 25$	$c = 40$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 32^\circ$	$m\angle B = 35.2^\circ$	$m\angle C = 112.8^\circ$

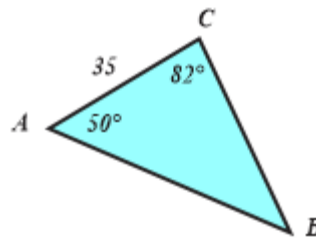
SECCIÓN 1.2 EJERCICIOS 1

1. Resolver aplicando la ley de senos y/o la ley de los cosenos o ambas.

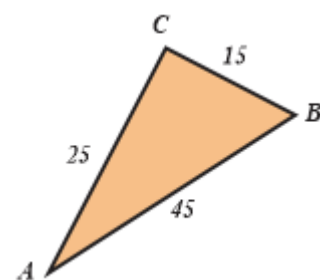
a.



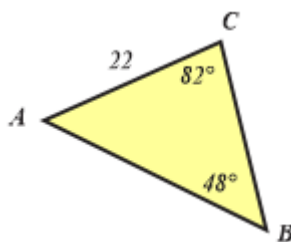
b.



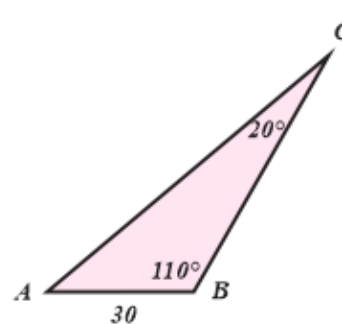
c.



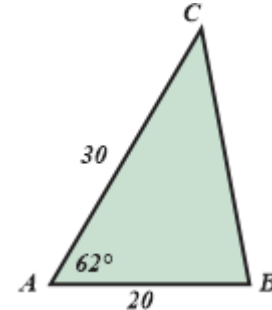
d.



e.



f.



El cálculo de longitudes en estructuras arquitectónicas (pirámides, edificios, puentes, ventanas) suele realizarse resolviendo uno o más triángulos oblicuángulos; los problemas que requieren el cálculo de distancias o longitudes de carácter inaccesible, por ejemplo, distancia a nubes, distancias entre cuerpos celestes suelen requerir en su estudio la resolución de triángulos oblicuángulos. En física es fundamental en la medición de distancias geográficas y establecimiento rutas, elementos de

tráfico, límites de velocidad, etcétera y esto puede requerir de la resolución de un triángulo oblicuángulo.



EJEMPLO 2. APLICACIONES DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Construye un modelo que describa la situación y dé respuesta a la pregunta.

a. Calcula la distancia que recorrió un estibador al subir y bajar una rampa con sección transversal triangular si su base mide 32 metros, el ángulo de inclinación de la subida es 40° y el de bajada es 30°

i. Modelamos la rampa con un triángulo no rectángulo.

ii. La **figura 8**. representa la rampa; la distancia recorrida por el estibador es la suma de las longitudes de los lados no horizontales de la rampa, es decir $D = a + b$.

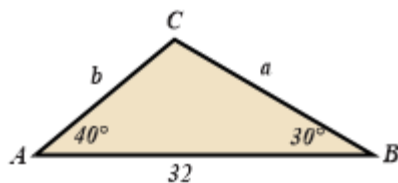


FIGURA 8.

iii. Con la propiedad $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ y los datos del problema obtenemos

$$m\angle C = 110^\circ$$

Calculemos a aplicando la ley de los senos, entonces

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{32}{\sin 110^\circ}, \text{ o bien } a = \frac{32}{\sin 110^\circ} \sin 40^\circ = 21.89$$

Calculemos b utilizando la ley de los senos, de

$$\frac{21.89}{\sin 40^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \text{ obtenemos } b = \sin 30^\circ \frac{21.89}{\sin 40^\circ} = 17.027$$

iv. Por tanto, el estibador recorre $D = 21.89 + 17.027 = 38.917$ metros.

b. Dos policías A y B observan un asalto en el punto C con ángulos de 45° y 65° respecto al segmento de línea recta que los. El policía A se encuentra a 8 metros del asalto. ¿A qué distancia se encuentran los policías?, ¿a qué distancia se encuentra el policía B del asalto?

La **figura 9**. es una imagen del modelo

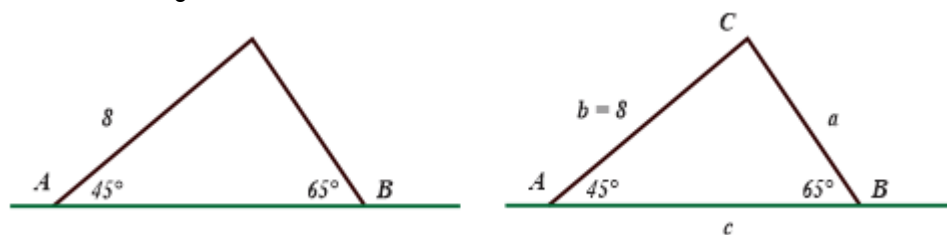


FIGURA 9.

24 UNIDAD 1 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

i. Con la propiedad $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ obtenemos $45^\circ + 65^\circ + m\angle C = 180^\circ$
 $m\angle C = 70^\circ$

ii. En el cálculo de la distancia entre los dos policías utilizamos la ley de los senos

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 70^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} 65^\circ}$$

por tanto,

$$c = \frac{8}{\operatorname{sen} 65^\circ} \operatorname{sen} 70^\circ = 8 \frac{0.940}{0.906} = 8.294$$

Los policías se encuentran a $c = 8.294$ metros.

iii. Calculemos la distancia entre el policía B y el sitio del asalto. Con la ley de los senos obtenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} 65^\circ}, \text{ entonces } a = \frac{8}{\operatorname{sen} 65^\circ} \operatorname{sen} 45^\circ$$

o bien

$$a = \frac{8}{0.9063} 0.7071 = 6.243$$

El policía B se encuentra a $a = 6.243$ metros del asalto.

c. Una paloma vuela de la copa del árbol A a la copa del árbol B (en línea recta) y posteriormente gira 60° y se dirige hacia el árbol C (en línea recta), que se encuentra a una distancia de 300 metros del árbol B . Si los árboles A y B se encuentran a una distancia de 700 metros.

¿Cuál es la distancia entre los árboles A y C ? ¿Cuál es la amplitud del ángulo que debe girar la paloma en el árbol para retornar a su punto de inicio?

i. La **figura 10.** es un esquema de la situación.

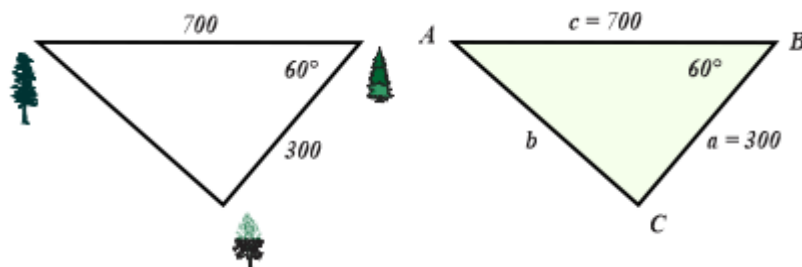


FIGURA 10.

ii. Con la ley de los cosenos calculamos la longitud del lado b

$$b^2 = 700^2 + 300^2 - 2(700)(300)\cos 60^\circ = 37000$$

luego

$$b = \sqrt{37000} = 608.276 \text{ metros.}$$

iii. Para calcular $m\angle C$, aplicamos la ley de los senos,

$$\frac{608.276}{\sin 60^\circ} = \frac{700}{\sin C}, \text{ por tanto, } \sin C = \frac{700}{608.276} \sin 60^\circ$$

Luego

$$\sin C = 0.9969 \text{ y } m\angle C = \arcsin 0.9969 = 85.5^\circ \text{ (respecto a } \overline{AB}).$$

iv. La paloma recorre

$$b = \sqrt{37000} = 608.276 \text{ metros,}$$

gira en C

$$m\angle C = 85.5^\circ \text{ (respecto a } \overline{AB}).$$

d. Una torre tiene altura de 76 metros y el piso a su derecha tiene está inclinado positivamente 8° .

¿Cuál es la longitud de un cable de soporte si une el punto más alto de la torre con un punto que se encuentra a 10 metros a la derecha de su base y sobre el piso inclinado? ¿Cuál es la longitud de otro cable de soporte, si este se fija a la mitad de la torre y se asegura en un punto a 15 metros a la izquierda de su base?

i. Los cables de soporte y el eje de la torre forman dos triángulos, uno es rectángulo y el otro no es rectángulo.

ii. La **figura 11**. muestra los cables de soporte de la torre y los triángulos que generan.

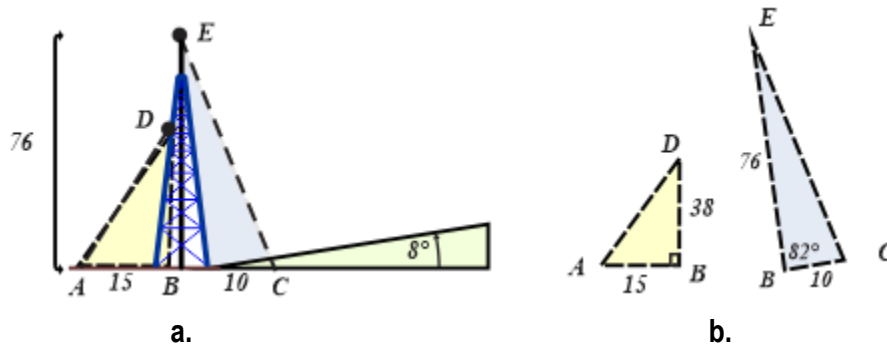


FIGURA 11.

iii. Sea b la longitud del cable que va del punto C al punto E , con la ley de los cosenos obtenemos:

$$b^2 = 10^2 + 76^2 - 2(10)(76)\cos 82^\circ = 5876 - 211.54 = 5664.46,$$

entonces

$$b = \sqrt{5664.46} = 75.26 \text{ metros.}$$

iv. La longitud l del cable que va del punto A al punto D , se calcula aplicando el teorema de Pitágoras,

$$l^2 = 15^2 + 38^2 = 1669, \text{ de donde } l = 40.85 \text{ metros.}$$

v. Las longitudes de los cables son

$$b = 75.26 \text{ metros y } l = 40.85 \text{ metros.}$$

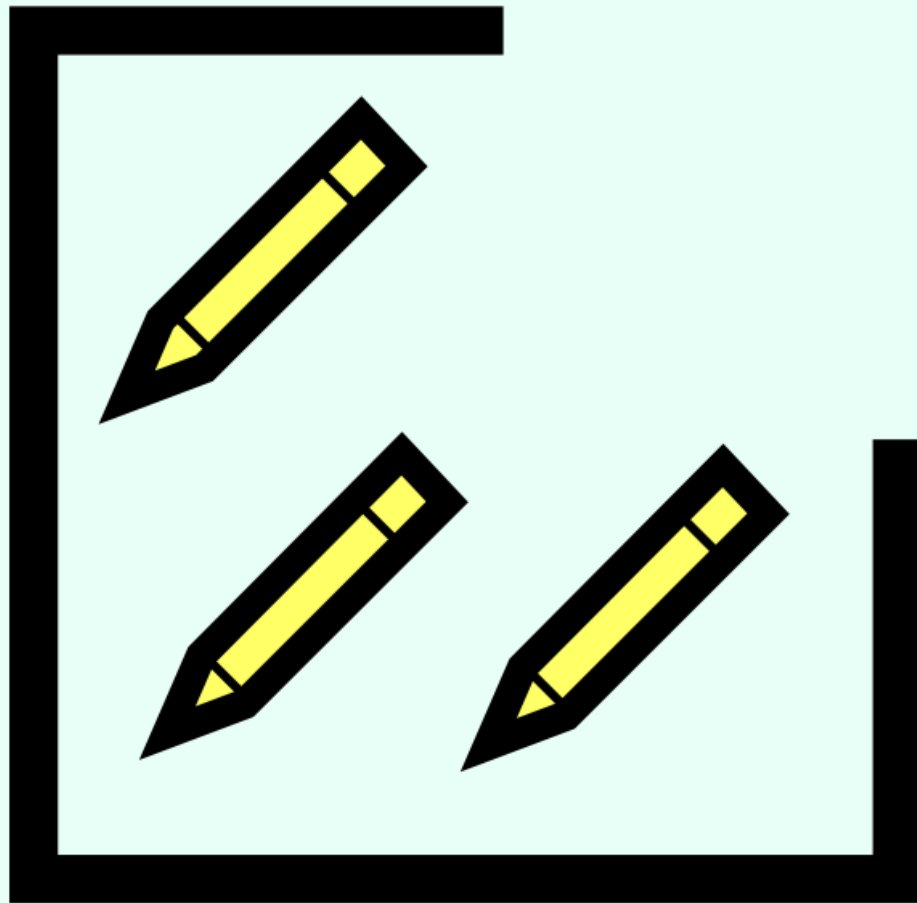



SECCIÓN 1.2 EJERCICIOS 2

1. La envergadura (distancia entre los puntos extremos de las alas delanteras) de un avión es 30 metros. Las alas delanteras de un avión forman ángulos de 30° respecto a la línea de la envergadura (línea media del fuselaje). Calcula la longitud máxima de cada ala.
2. Para medir la altura de la base de las nubes que cubren un helipuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 85° respecto a la horizontal. Un observador a 600 metros (del trabajador) mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y observa que tiene amplitud de 70° . Calcula la altura de la base de las nubes.
3. Un autobús se desplaza por una carretera (recta) en dirección “este” durante una hora, luego gira 60° y toma una carretera hacia el noreste por la que se desplaza durante 20 minutos. Si el autobús se desplaza a velocidad constante de 45 kilómetros por hora, ¿qué tan lejos está de su posición de inicio?
4. Un drón es observado simultáneamente por dos personas, una de ellas se encuentra en Iztapalapa y lo observa con un ángulo de elevación de 75° , la otra persona lo observa en Iztacalco con un ángulo de elevación 62° . Suponiendo que los puntos de observación se encuentran a 2.5 kilómetros, ¿a qué distancia se encuentra el drón de los puntos de observación?
5. Un jardinero planea construir una cerca triangular, si dos de los lados deben medir 30 y 40 metros, también, deben formar un ángulo de medida 70° . Calcula la longitud de la cerca.
6. Una persona observa la parte más alta de un cedro con un ángulo de 40° , si avanza en línea recta 2 metros hacia el cedro y vuelve a observar su punto más alto, el ángulo tiene amplitud de 60° . ¿Qué altura tiene el cedro?



1.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 1**

1.

a. $\operatorname{sen} B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{4}{3}$, $\sec B = \frac{5}{4}$ y $\operatorname{csc} B = \frac{5}{3}$

2.

a. $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{5}$, $m\angle A = 90^\circ$, $m\angle B = 41.81^\circ$ y $m\angle C = 48.19^\circ$

b. $a = 20$, $b = 23.835$, $c = 31.114$, $m\angle A = 40^\circ$, $m\angle B = 50^\circ$ y $m\angle C = 90^\circ$

c. $a = 5$, $b = \sqrt{119}$, $c = 12$, $m\angle A = 24.62^\circ$, $m\angle B = 65.38^\circ$ y $m\angle C = 90^\circ$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 2**

1. $p = 98.44$ unidades.

2. $A = 28.87$ unidades cuadradas y $p = 23.09$ unidades cuadradas.

3. 25.24°

4. $h = 4.23$ metros.

5. $h = 5.12$ metros.

6. $h = 29.70$ metros.

7. 121.43° y 148.49°

**SOLUCIONES****SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 3**

1.

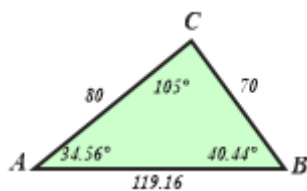
Varias.



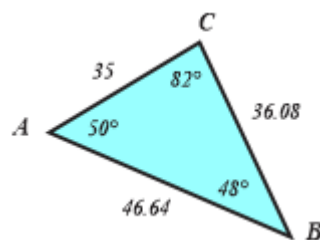
 SOLUCIONES SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 1

1.

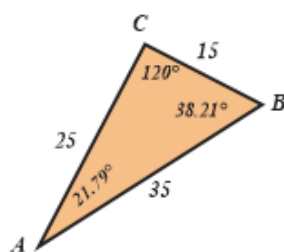
a.



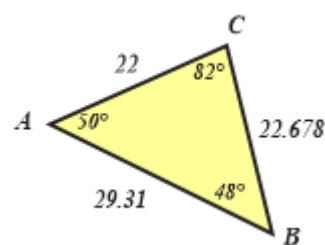
b.



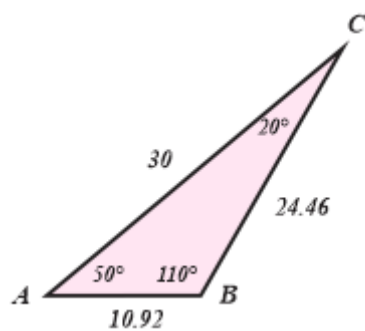
c.



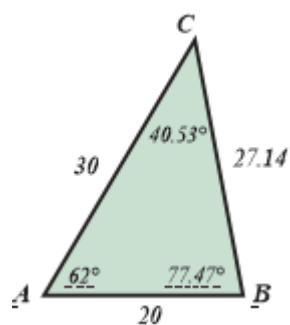
d.



e.



f.



 SOLUCIONES SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 2

 1. $10\sqrt{3}$ metros.

2. 2170 metros.

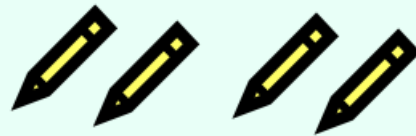
30 UNIDAD 1 ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

- 3.** 56.6 kilómetros.
- 4.** 3236 y 3541 kilómetros.
- 5.** 110.977 metros.
- 6.** 3.25 metros.



1.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD







UNIDAD 1 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se denominan los lados de un triángulo rectángulo?

2. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se identifica el cateto opuesto?

3. En un triángulo rectángulo, ¿qué nombre recibe la razón hipotenusa a cateto adyacente?

4. ¿Qué significa resolver un triángulo?

5. ¿Cuál es el significado de la razón inversa del *seno*?

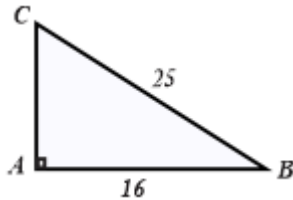
6. ¿Qué es un ángulo de elevación?

7. ¿Para qué amplitud de ángulo coinciden las razones *seno* y *coseno*?

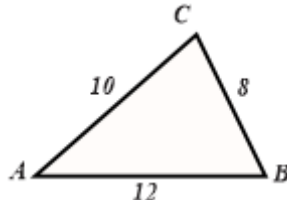
8. ¿Qué condición debe cumplirse para que la ley de los cosenos coincida con el teorema de Pitágoras?

DESARROLLOS OPERATIVOS

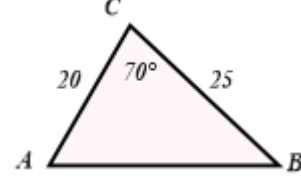
9. Resuelve.



10. Resuelve.



11. Resuelve.



12. Verifica la identidad

$$\frac{1}{\cos^2 A} - 1 = \operatorname{tg}^2 A$$

PARA PENSAR

13. Dos personas A y B observan la parte más alta de una antena con ángulos de elevación de 60° y 50° respectivamente. La longitud de la visual de la persona A mide 12 metros. Si la altura de los ojos de las personas es la misma, ¿a qué distancia se encuentran las personas?

14. Dos avenidas rectas se intersecan formando un ángulo de amplitud 40° . Sobre la primera de las avenidas se encuentra un edificio a 35 metros del punto de intersección de las avenidas, en la otra avenida está una tienda a 42 metros del punto de cruce de las avenidas. Calcula la distancia entre el edificio y la tienda.

15. Una antena está situada en la parte superior de un edificio de altura 45 metros. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación a los extremos superior e inferior de la antena son 65° y 48° . Calcula la longitud de la antena.

ESCALA

Preguntas 1 a 8., un punto cada una.

Problemas 9. a 11. tres puntos cada uno.

Problemas 13. a 15. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se necesita un mínimo de 19 puntos

UNIDAD 1 SOLUCIONES AL EXAMEN



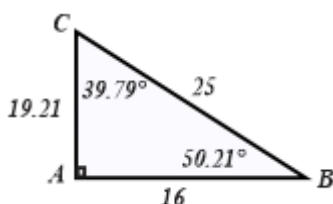
CONCEPTOS

1. Hipotenusa y catetos.
2. Es el lado del triángulo que no forma parte del ángulo al que es opuesto.
3. *secante*.
4. Conocer las amplitudes de sus tres ángulos interiores y las longitudes de sus tres lados.
5. Es la amplitud del ángulo al cual corresponde la razón seno.
6. Aquel ángulo que tiene como lado inicial la horizontal y se abre en forma positiva (hacia arriba).
7. Una ecuación que incluye razones trigonométricas y que es válida para cualquier ángulo.
7. 45°
8. El ángulo que incluye debe medir 90°

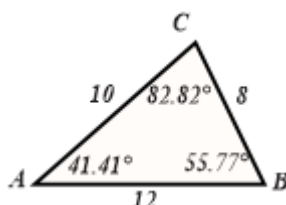


DESARROLLOS OPERATIVOS

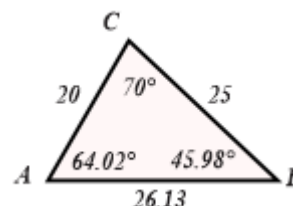
11.



12.



13.



14. Una forma es $\frac{1}{\cos^2 A} - 1 = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$



PARA PENSAR

13. 13.021 metros.
14. 27.14 metros.
15. 10.778 metros.



UNIDAD 2. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumnado:

Utilizará algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos a través del método analítico, para representar y analizar a las curvas y los objetos geométricos que, desde el punto de vista euclidiano, sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos.

CONTENIDO

SECCIÓN 2.1 Puntos y segmentos de recta en el plano cartesiano.

SECCIÓN 2.2 Lugares geométricos en el plano cartesiano.

SECCIÓN 2.3 Soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 2.4 Evaluación de la unidad.



CONCEPTOS CLAVE

Geometría Analítica. Estudia y establece las propiedades que vinculan la geometría plana y el álgebra.

Plano cartesiano. Está formado por dos líneas rectas numéricas tales que: son perpendiculares (horizontal y vertical) se intersectan en el número 0 y que generan cuatro cuadrantes.

Ejes coordenados. Las líneas rectas que generan el plano cartesiano.

Cuadrante. Las partes en que los ejes coordenados separan al plano cartesiano.

Punto. Se representa por el par ordenado (x, y) en donde (los números) x e y se denominan coordenadas; abscisa y ordenada, respectivamente.

Segmento rectilíneo. La sección de una línea limitada por dos de sus puntos.

Segmento rectilíneo dirigido. Cuando en un segmento rectilíneo se distingue el punto inicial del punto final.

Pendiente. Razón constituida por la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de los puntos que definen un segmento rectilíneo.

Angulo de inclinación. Ángulo con lado inicial en el eje de las abscisas y lado final en el segmento rectilíneo o su prolongación.

Razón. Comparación de las longitudes de dos segmentos rectilíneos utilizando una división.

Punto $p_r(x_r, y_r)$ de división de un segmento rectilíneo dirigido la razón r . Indica que un segmento rectilíneo ha sido dividido en $a+b$ partes. a partes hacia el punto inicial y b partes hacia el al punto final.

Lugar geométrico. Conjunto de puntos del plano cartesiano que satisfacen una condición específica.

2.1 PUNTOS Y SEGMENTOS DE RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

1. Ubica un punto en el plano cartesiano dadas sus coordenadas.
2. Obtiene las coordenadas de un punto dado en el plano cartesiano.
3. Identifica las abscisas y las ordenadas como distancias dirigidas en el plano cartesiano.
4. Traza un segmento en el plano cartesiano.
5. Describe las condiciones necesarias y suficientes para que otro estudiante pueda localizar un segmento en el plano.
6. Deduce la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos.
7. Resuelve problemas en los que se tenga que obtener la distancia entre dos puntos.
8. Calcula el ángulo de inclinación de un segmento a partir de las coordenadas de sus puntos extremos.
9. Calcula la pendiente de un segmento a partir de las coordenadas de sus puntos extremos.
10. Localiza un segmento dadas sus condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.
11. Obtiene las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada.
12. Obtiene las coordenadas de los extremos de un segmento, a partir de las coordenadas del punto que lo divide en una razón dada.

LONGITUD DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO EN $\mathbb{R}^2$

El plano cartesiano (representado por $\mathbb{R}^2$) se utiliza para referir la posición de objetos geométricos constituidos por puntos; se compone por dos líneas rectas perpendiculares (los ejes cartesianos), su punto de intersección se conoce como origen (se representa por $O(0, 0)$). En

el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (“erre dos” o “erre cruz erre”):

- i. La línea recta vertical es el “eje de las ordenadas” y suele representarse por la letra “Y”.
- ii. La línea recta horizontal es el eje “X” o “eje de las abscisas”.
- iii. Los ejes coordenados generan cuatro cuadrantes, que se enumeran como lo muestra la **figura 1**.
- iv. Cada punto del plano cartesiano tiene asociado un “par ordenado de números” representado por $p(x, y)$, en donde x es la abscisa e y la ordenada.

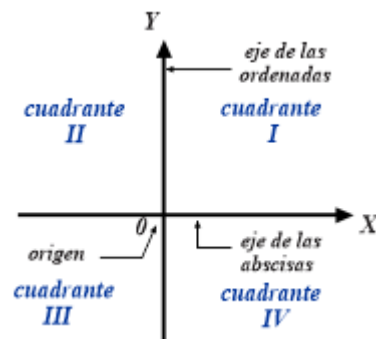


FIGURA 1.

La representación del punto $p_0(x_0, y_0)$ en el plano cartesiano, se consigue:

- i. Localizamos el número x_0 en el eje horizontal y el número y_0 en el eje vertical.
- ii. Imaginamos dos líneas rectas perpendiculares a los ejes coordenados que contengan a los números antes señalados, entonces el punto $p_0(x_0, y_0)$ se localiza en la intersección de las líneas rectas observa la **figura 2**.

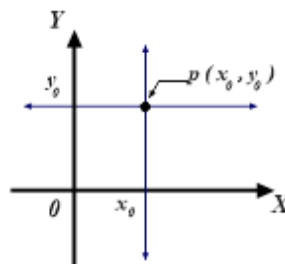


FIGURA 2.



EJEMPLO 1. REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

1. i. $p_1(4, 2)$: abscisa $x_1 = 4$, ordenada $y_1 = 2$, se encuentra en el cuadrante I
- ii. $p_2(-3, 5)$: abscisa $x_2 = -3$, ordenada $y_2 = 5$, se ubica en el cuadrante II
- iii. $p_3(-4, -3)$: abscisa $x_3 = -4$, ordenada $y_3 = -3$, pertenece al cuadrante III
- iv. $p_4(3, -5)$: abscisa $x_4 = 3$, ordenada $y_4 = -5$, se encuentra en el cuadrante IV

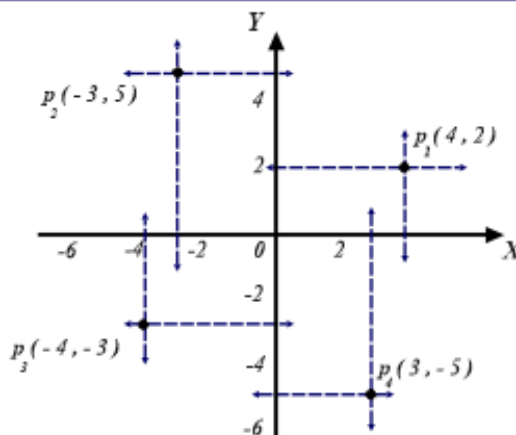


FIGURA 3.

Un “segmento rectilíneo” se interpreta como la parte de la línea recta limitada por dos de sus puntos, observa la **figura 4**. También, todo segmento de recta tiene asociada una longitud (medida) que corresponde a la distancia entre los dos puntos que lo definen.

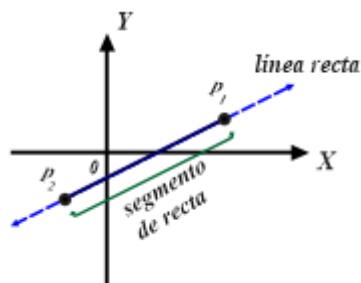


FIGURA 4.

La aplicación directa del teorema de Pitágoras justifica la **propiedad 1**.

PROPIEDAD 1. LONGITUD (MEDIDA) DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO O DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean

$$P_1 (x_1, y_1) \text{ y } P_2 (x_2, y_2)$$

dos puntos en el plano cartesiano, entonces, su distancia (o longitud del segmento rectilíneo que definen) es el número real no negativo

$$d (P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

La propiedad (fórmula)

$$d (P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

es equivalente a:

$$d (P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ o bien } d (P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$



EJEMPLO 2 LONGITUDES DE SEGMENTOS RECTILÍNEOS

a. Tracemos el segmento rectilíneo y calcula su longitud (medida).

$$P_1 (-2, 1) \text{ y } P_2 (1, 5)$$

es:

$$\begin{aligned} d (P_1, P_2) &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= 5 \end{aligned}$$

unidades.

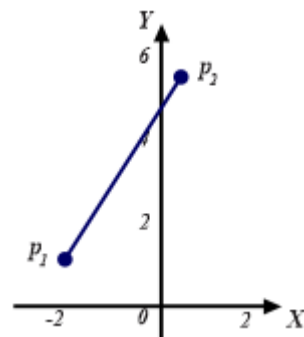


FIGURA 5.

b. Calculemos la distancia entre los puntos $P_1(-3, -2)$ y $P_2(4, 3)$

b. Calculemos la distancia entre los puntos

$P_1(-3, -2)$ y $P_2(4, 3)$

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (7)^2} \\ &= \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \end{aligned}$$

unidades.

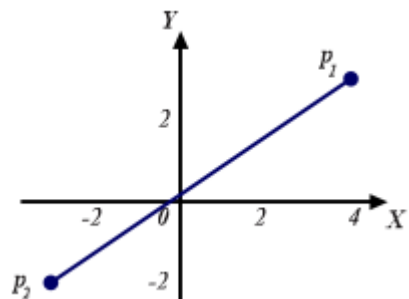


FIGURA 6.

c. La longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ es 2 unidades, sus extremos son los puntos $A(1, 2)$ y $P_2(x, 3)$, entonces la coordenada desconocida x se calcula como sigue.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= 2 = \sqrt{(x-1)^2 + (3-2)^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior obtenemos

$$4 = (x-1)^2 + 1, \text{ luego } (x-1)^2 = 3, \text{ entonces } x+1 = \sqrt{3} \text{ o } x+1 = -\sqrt{3},$$

por tanto

$$x = \sqrt{3} - 1, \text{ o bien } x = -\sqrt{3} - 1$$

d. Las proyecciones perpendiculares del punto $p(-3, 4)$ sobre los ejes coordenados son los puntos tiene longitudes:

Sobre el eje x , longitud 3, sus extremos son $p(-3, 0)$ y $p(0, 0)$

Sobre el eje y , longitud 4, sus extremos son $p(0, 4)$ y $p(0, 0)$



SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS 1

1.

a. Calcula la distancia entre los puntos $A(-1, 2)$ y $B(2, 6)$

b. Obtén la longitud del segmento de recta con extremos en los puntos $R(-4, 1)$ y $S(-2, 5)$

c. Un triángulo tiene vértices en los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(5, -2)$, trázalo y calcula su perímetro.

- d. Un segmento de recta mide 10 unidades, sus extremos son los puntos $R(-3, 0)$ y $S(x, 1)$, calcula la coordenada desconocida.
 - e. Un segmento de recta tiene longitud de 3 unidades, sus extremos son los puntos $A(1, y)$ y $B(-2, 5)$, calcula la coordenada desconocida.
 - f. Obtén los puntos de proyección sobre los ejes coordenados.
- i. $p(4, 2)$ ii. $r(-3, -5)$



INCLINACIÓN DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO EN IR^2

En el plano cartesiano, el ángulo asociado a un segmento rectilíneo:

- i. Tiene como lado inicial sobre eje de las abscisas.
- ii. Su amplitud se mide en sentido “antihorario” (levógiro).
- iii. Su lado terminal es el segmento rectilíneo (o su prolongación hasta el eje de las abscisas).
- iv. Su lado terminal es el segmento rectilíneo (o su prolongación hasta el eje de las abscisas).

Para representarlo utilizaremos el símbolo $\angle$, por ejemplo, representaremos al ángulo con vértice en el punto A simbólicamente por $\angle A$ y nos referiremos a su amplitud (o amplitud) utilizando el símbolo $m\angle A$, observa la **figura 7**.

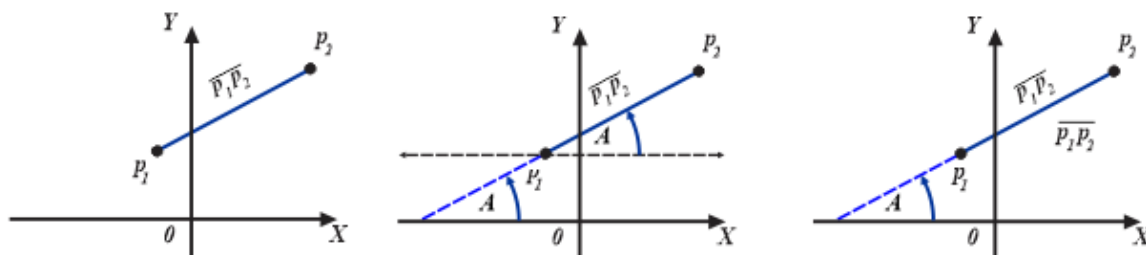


FIGURA 7.

El ángulo asociado a un segmento rectilíneo se define en términos del concepto de “pendiente”.

DEFINICIÓN 1. PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA

Sea el segmento de recta $\overline{p_1p_2}$ con extremos en los puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$, entonces

- a. Su pendiente es la razón: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, siempre que $x_1 \neq x_2$
- b. Si $x_2 = x_1$, la pendiente del segmento de recta no está definida (suele decirse que es infinita).
- c. Si $\angle A$ representa su ángulo de inclinación, entonces $m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ grados.

La **figura 8.** muestra el segmento $\overline{p_1 p_2}$ con relación a su ángulo de inclinación y el signo de la pendiente.

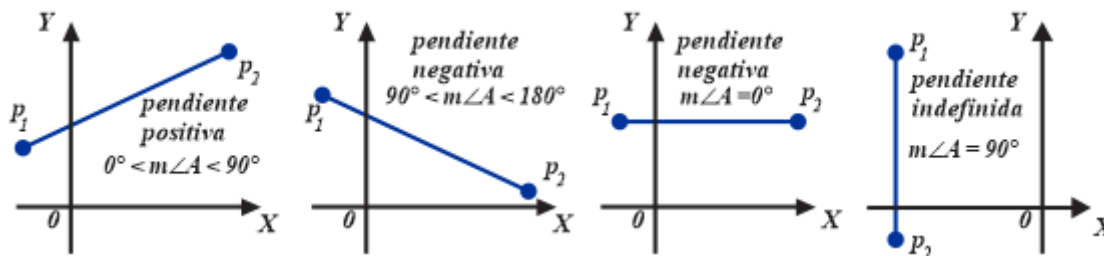


FIGURA 8.



EJEMPLO 3. PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA

a. En el segmento de recta $\overline{p_1 p_2}$ con extremos en los puntos $p_1(-2, 1)$ y $p_2(4, 5)$, entonces

$$x_1 = (-2), y_1 = 1, x_2 = 4 \text{ y } y_2 = 5,$$

por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{4 - (-2)} = \frac{2}{3},$$

su ángulo de inclinación mide

$$m\angle A = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 21.145^\circ$$

ii. Si los extremos de $\overline{RS}$ son los puntos $R(-3, 6)$ y $S(0, 6)$, entonces

$$x_1 = (-3), y_1 = 6, x_2 = 0 \text{ y } y_2 = 6,$$

luego

$m = \frac{6 - 6}{0 - (-3)} = 0$ y $m\angle A = \operatorname{tg}^{-1}(0) = 0$. Como consecuencia $\overline{RS}$ es paralelo al eje de las abscisas.

c. Los vértices de un triángulo son los puntos $R(1, 0)$, $S(3, 6)$ y $T(8, 2)$.

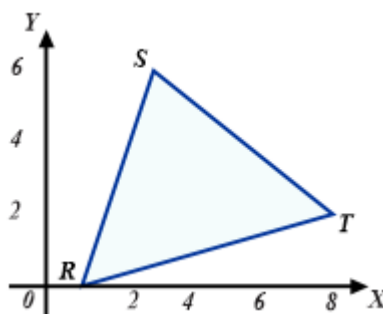


FIGURA 9.

Si denotamos con m_{RS} , m_{RT} y m_{ST} las pendientes de los lados $\overline{RS}$, $\overline{RT}$ y $\overline{ST}$, respectivamente, los valores de las pendientes y las amplitudes de los lados respecto al eje de las abscisas son:

para m_{RS} : $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $y_2 = 6$, luego la pendiente es

$$m_{RS} = \frac{6-0}{3-1} = 3 \text{ y } m\angle m_{RS} = \operatorname{tg}^{-1} 3 = 71.57^\circ,$$

para m_{RT} : $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 8$ y $y_2 = 2$, por tanto, la pendiente es

$$m_{RT} = \frac{2-0}{8-1} = \frac{2}{7} \text{ y } m\angle m_{RT} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{7} = 9.06^\circ,$$

para m_{ST} : $x_1 = 3$, $y_1 = 6$, $x_2 = 8$ y $y_2 = 2$, entonces

$$m_{ST} = \frac{2-6}{8-3} = -\frac{4}{5} \text{ y } m\angle m_{ST} = \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{4}{5} \right) = 218.66^\circ$$

d. Si el segmento de recta $\overline{BC}$ tiene un ángulo de inclinación (referido al eje de las abscisas) de amplitud

$$m\angle A = 45^\circ,$$

entonces

$$m = \operatorname{tg} (45^\circ) = 1, \text{ su pendiente es uno.}$$

e. Sea $\overline{DE}$ el segmento de recta $\overline{DE}$ con extremos en $D(-2, 4)$, $E(x, 8)$ y con ángulo de inclinación con $m\angle A = 45^\circ$, entonces

$$m = \operatorname{tg} (45^\circ) = 1, \text{ por tanto, } 1 = \frac{8-4}{x-(-2)}, \text{ es decir } x+2=4, \text{ o bien } x=2$$



SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS 2

1.

a. Calcula: la pendiente y el ángulo de inclinación, de los segmentos rectilíneos.

i. Extremos en los puntos $A(0, 2)$ y $B(1, -5)$

ii. Extremos en los puntos $P(2, -1)$ y $Q(6, 2)$

b. Calcula la coordenada desconocida.

i. Extremos en los puntos $A(x, 3)$, $B(2, 4)$ y $m\angle A = 45^\circ$

ii. Extremos en los puntos $M(-4, 2)$, $N(x, -6)$ y $m\angle A = 60^\circ$

iii. Extremos en los puntos $R(-4, y)$, $S(-1, 6)$ y $m\angle A = 30^\circ$

c.

i. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(x, 0)$, $B(6, 3)$. ¿Qué valor debe tomar la coordenada x para que sea vertical?

- ii. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(-2, 2)$, $B(4, y)$. ¿Cuál debe ser la coordenada y para que sea horizontal?
- iii. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(3, 0)$, $B(x, -3)$. ¿Cuál debe ser la coordenada x para que sea vertical?
- d. Un triángulo tiene vértices en los puntos $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$ y $C(4, 4)$, trázalo, calcula: la pendiente de cada lado y las amplitudes de los ángulos que forma cada lado respecto al eje de las abscisas.



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO EN EL PLANO CARTESIANO

Asignar una dirección a un segmento rectilíneo implica establecer el punto de inicio y el punto final, con los símbolos $\overrightarrow{AB}$ indicaremos que el segmento rectilíneo dirigido tiene punto inicial A y punto terminal B , observa la **figura 10**.

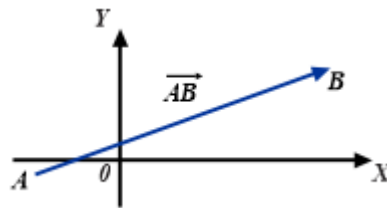


FIGURA 10.

Si se selecciona un punto $P_r(x_r, y_r)$ del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$, este queda dividido en los segmentos rectilíneos $\overrightarrow{AP_r}$ y $\overrightarrow{P_rB}$, consecuentemente es posible construir la razón

entre sus longitudes $r = \frac{|\overrightarrow{AP_r}|}{|\overrightarrow{P_rB}|}$ observa la **figura 11**.

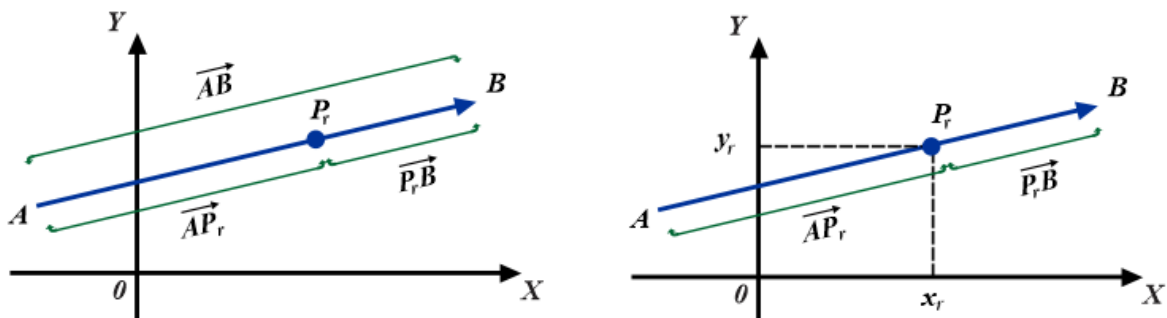


FIGURA 11.

El punto $P_r(x_r, y_r)$, se conoce como “punto de división del segmento rectilíneo en la razón r ” y sus coordenadas se determinan utilizando un proceso algebraico básico y las propiedades de semejanza de los triángulos.

PROPIEDAD 2. COORDENADAS DEL PUNTO p_r DE DIVISIÓN DE $\vec{P_1P_2}$ EN LA RAZÓN r

a. Sea $\vec{AB}$ con extremos en $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto $p_r(x_r, y_r)$ que divide a $\vec{AB}$ en la razón r son:

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \text{ y } y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

b. Si $r = \frac{1}{1} = 1$, entonces $p_r(x_r, y_r) = p_M(x_M, y_M)$ se denomina punto medio de $\vec{AB}$ sus coordenadas son

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ y } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



EJEMPLO 4. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO DIRIGIDO EN LA RAZÓN r

a. Sea el segmento rectilíneo $\vec{AB}$ con

$$A(-2, 2) \text{ y } B(6, 0) \text{ y } r = 2 = \frac{2}{1},$$

entonces el número de partes (congruentes) es $2 + 1$, observa la **figura 12**.

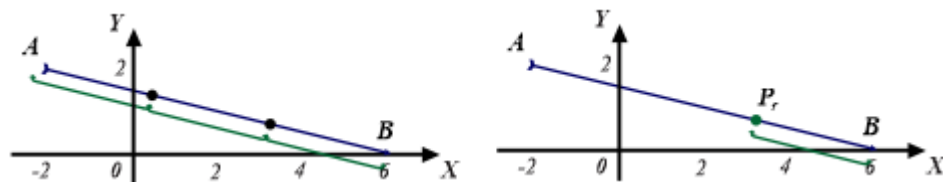


FIGURA 12.

b. Sea el segmento rectilíneo dirigido $\vec{VW}$ tal que $V(3, 2)$ y $W(-4, -2)$, y razón $r = 1 = \frac{1}{1}$, entonces $1 + 1 = 2$ indica que fue dividido en dos partes congruentes por P_r , que en este caso recibe el nombre de punto medio.

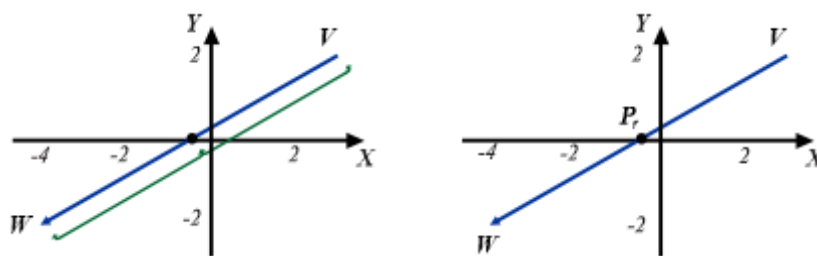


FIGURA 13.

El **ejemplo 5** muestra la forma de uso de la **propiedad 2**.



EJEMPLO 5. COORDENADAS DEL PUNTO DE DIVISIÓN

- a. El punto P_r divide a $\vec{AB}$ con $A(-2, -1)$ y $B(4, 3)$ en la razón $r=1$, trázalo y obtén las coordenadas de P_r

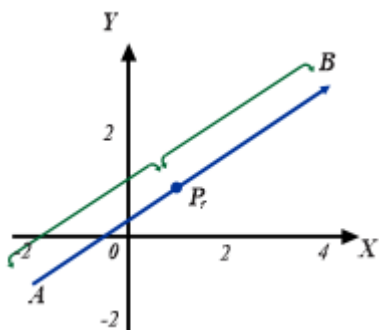


FIGURA 14.

Sean $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_1 = -1$, $y_2 = 3$,
sustituimos en:

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \text{ y } y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \text{ obtenemos,}$$

$$x_r = \frac{-2 + 1(4)}{1+1} = 1 \text{ e } y_r = \frac{-1 + 1(3)}{1+1} = 1,$$

entonces

$$P_r(1, 1)$$

- b. El punto P_r divide a $\vec{CD}$ con $C(-2, 4)$ y $D(5, 0)$ en la razón $r = \frac{1}{2}$, trázalo y obtén las coordenadas de P_r

Sean $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$,

sustituimos en: $x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ y $y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$,

obtenemos

$$x_r = \frac{-2 + \frac{1}{2}(5)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \text{ e } y_r = \frac{4 + \frac{1}{2}(0)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3},$$

$$\text{luego } P_r\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

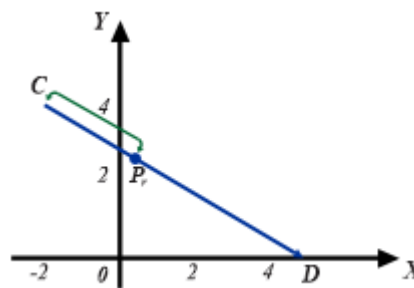


FIGURA 15.

c. El segmento rectilíneo $\vec{AB}$ tiene un extremo en $A(-6, -2)$ y punto medio en $P_m(2, 2)$, calcula las coordenadas del punto B
Puesto que

$$x_1 = -6, x_m = 2 \text{ y } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

entonces

$$2 = \frac{-6 + x_2}{2}, \text{ o bien } 4 = -6 + x_2, \text{ y } x_2 = 10$$

Similarmente, $y_1 = -2, y_m = 2$ y $2 = \frac{-2 + y_2}{2}$, entonces $4 = -2 + y_2$, por tanto $y_2 = 6$

El extremo solicitado del segmento rectilíneo $\vec{AB}$ es $B(10, 6)$



SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS 3

1.

- Los extremos del segmento rectilíneo $\vec{MN}$ son $M(-6, 2)$ y $N(2, -2)$, determina el punto $P_r(x_r, y_r)$ que lo divide en la razón $r = 1$
- Un segmento rectilíneo $\vec{AB}$ tiene extremos en $A(5, 3)$ y $B(-2, 8)$. Calcula las coordenadas de $P_r(x_r, y_r)$ que lo divide en la razón $r = \frac{3}{2}$
- Los extremos del segmento rectilíneo $\vec{RS}$ son $R(-6, 2)$ y $S(4, -2)$, determina el punto $P_r(x_r, y_r)$ que lo divide $\vec{AB}$ en la razón $r = 2$

2.

- El trayecto entre los puntos $A(2, 5)$ y $B(8, -1)$ es el segmento rectilíneo $\vec{AB}$, si el punto $P_r(x_r, y_r)$ se encuentra a un tercio del trayecto, ¿cuáles son sus coordenadas?
- Los puntos de un segmento rectilíneo $\vec{AB}$ son $A(2, 5)$ y $B(8, -1)$, si el punto $P_r(x_r, y_r)$ se encuentra al 25% del segmento rectilíneo, ¿cuáles son sus coordenadas?

c. Si $A(-1, 1)$ y $B(6, 15)$, ¿en qué razón divide el punto $P_r(2, 7)$ a $\vec{AB}$?

d. Si $A(-3, -2)$, $B(6, 1)$ y $P_r(3, 0)$ calcula r en $\vec{AB}$

e. El punto $P(5, 9)$ divide al segmento rectilíneo $\vec{AB}$ en la razón $r = \frac{2}{3}$, si $A(1, 3)$ determina las coordenadas del punto en B

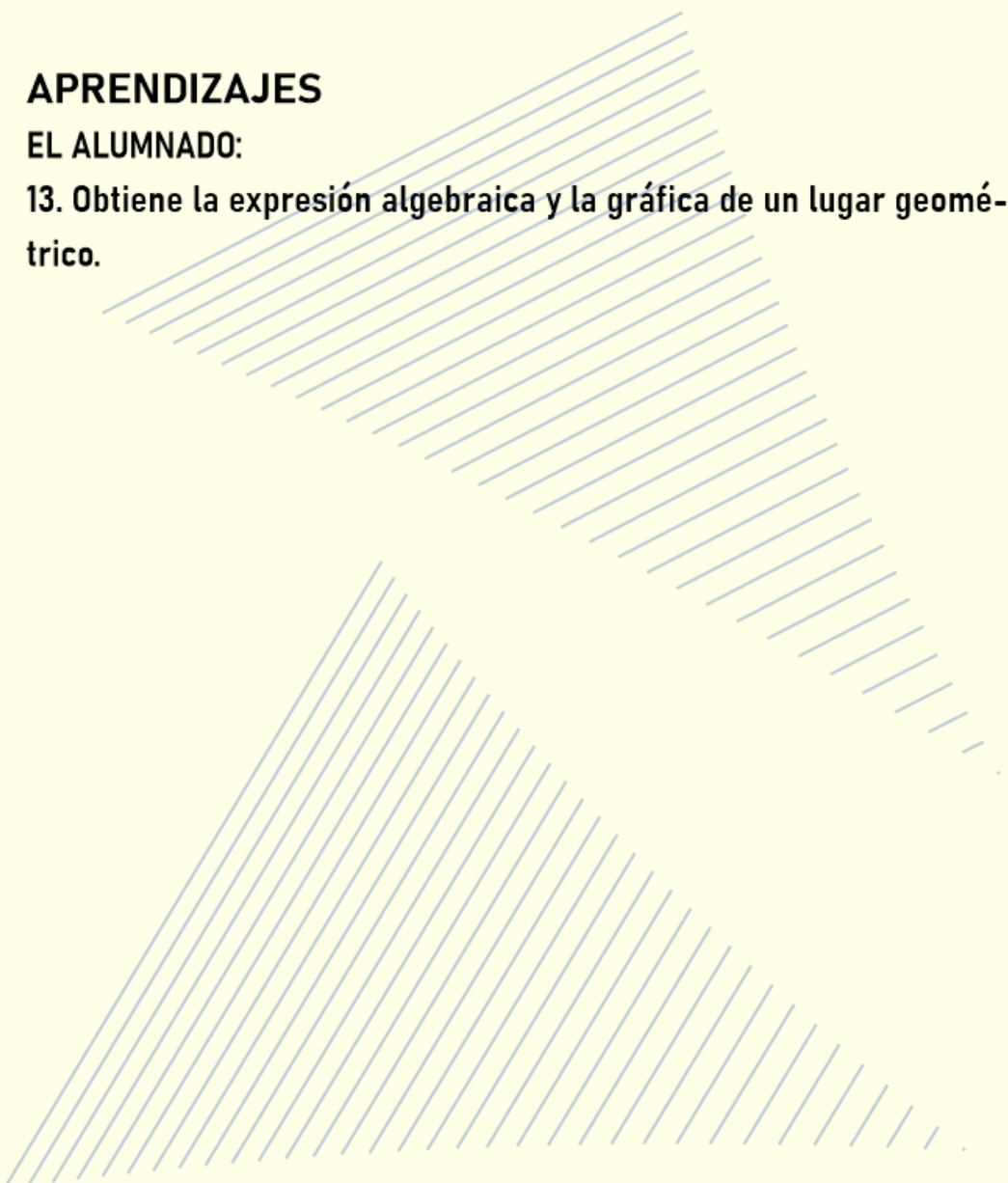


2.2 LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

13. Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

The page features two large, decorative triangular regions filled with parallel diagonal lines. One triangle is located in the upper right quadrant, and the other is in the lower left quadrant. Both triangles are oriented with their hypotenuses facing towards the center of the page.

La Geometría Analítica tiene como propósito establecer vínculos entre una ecuación algebraica y un conjunto de puntos en el plano cartesiano, es decir, asociar a una figura en el plano cartesiano una “ecuación algebraica” con las variables x e y y viceversa para una “ecuación” en las variables x e y identificar la figura que le corresponde en el plano cartesiano.

DEFINICIÓN 1. (LUGAR GEOMÉTRICO)

Un “lugar geométrico” es el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano que cumplen una condición (generalmente dada por una ecuación algebraica con dos variables) específica.

Con la expresión

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) = 0 \}$$

indicaremos formalmente un lugar geométrico del plano cartesiano, significa

“el conjunto de los puntos en el plano cartesiano que satisfacen la condición $p(x, y) = 0$ ”,

o bien,

“el conjunto de los puntos en el plano cartesiano, tales que, satisfacen la condición

$$p(x, y) = 0$$



EJEMPLO 1. EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

1. Analiza la curva en el plano cartesiano y obtén una relación (viable) entre las variables x e y

a.

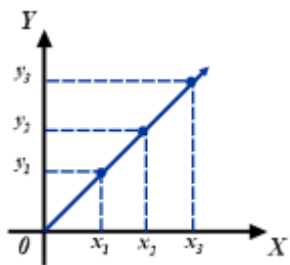


FIGURA 1.

Notemos que

$$p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2) \text{ y } p_{13}(x_3, y_3),$$

se encuentran en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ y a la misma distancia de los ejes coordenados, por tanto, $x = y$, con x, y no negativas. Formalmente,

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \text{ con } x, y \text{ no negativas} \}$$

b.

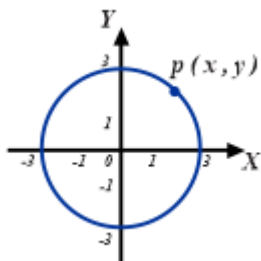


FIGURA 2.

Los puntos $p(x, y)$ se encuentran a tres unidades, del punto $O(0, 0)$, así

$$d(p, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3,$$

o bien

$$x^2 + y^2 - 9 = 0,$$

formalmente

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 9 = 0 \}$$

c.

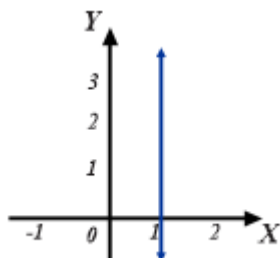


FIGURA 3.

Los puntos de la “curva” son de la forma $p(1, 0)$, por tanto

$$x = 1,$$

formalmente,

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 = 0 \}$$



EJEMPLO 2. LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO CARTESIANO

a. En

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 = 0 \},$$

de la condición

$$y - x^2 = 0$$

obtenemos

$$y = x^2$$

y tiene asignada la representación en el plano cartesiano mostrada en la **figura 4**.

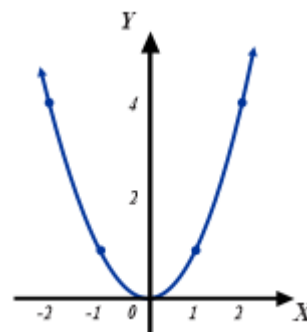


FIGURA 4.

b. Un punto $p(x, y)$ que se desplaza de manera que incluye al punto $p_0(0, 0)$ y que genera un segmento de recta con pendiente constante $m = 2$ cumple la condición

$$2 = \frac{y - 0}{x - 0},$$

o bien

$$2x = y, \text{ luego } y - 2x = 0$$

Formalmente

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0 \}$$

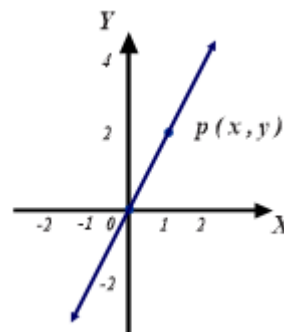


FIGURA 5.

c. Para determinar la expresión formal del lugar geométrico cuando el punto $p(x, y)$ se encuentra a la misma distancia (equidista) de los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ observemos:

$$d(P, A) = d(P, B), \text{ o bien } \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

$$\text{De } (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2$$

obtenemos

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 ; \text{ al}$$

simplificar da $x + y = 0$, así

$$LG = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x \}$$

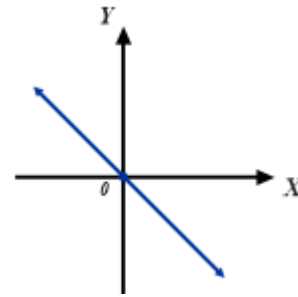


FIGURA 6.



SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS 1

1. Traza y escribe formalmente el lugar geométrico de los puntos $p(x, y)$ en el plano cartesiano:

a. $p(x, y)$ se desplaza de manera que la pendiente que determina con el punto fijo $B(-2, 3)$ se mantiene constante con valor $m = 1$

b. $p(x, y)$ que equidistan del punto fijo $C(0, 1)$ en 1 unidad.

c. $p(x, y)$ se encuentran a la misma distancia de los extremos del segmento rectilíneo definido por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(0, 2)$

d. $p(x, y)$ se encuentran en los cuadrantes II y IV , y equidista de los ejes cartesianos.

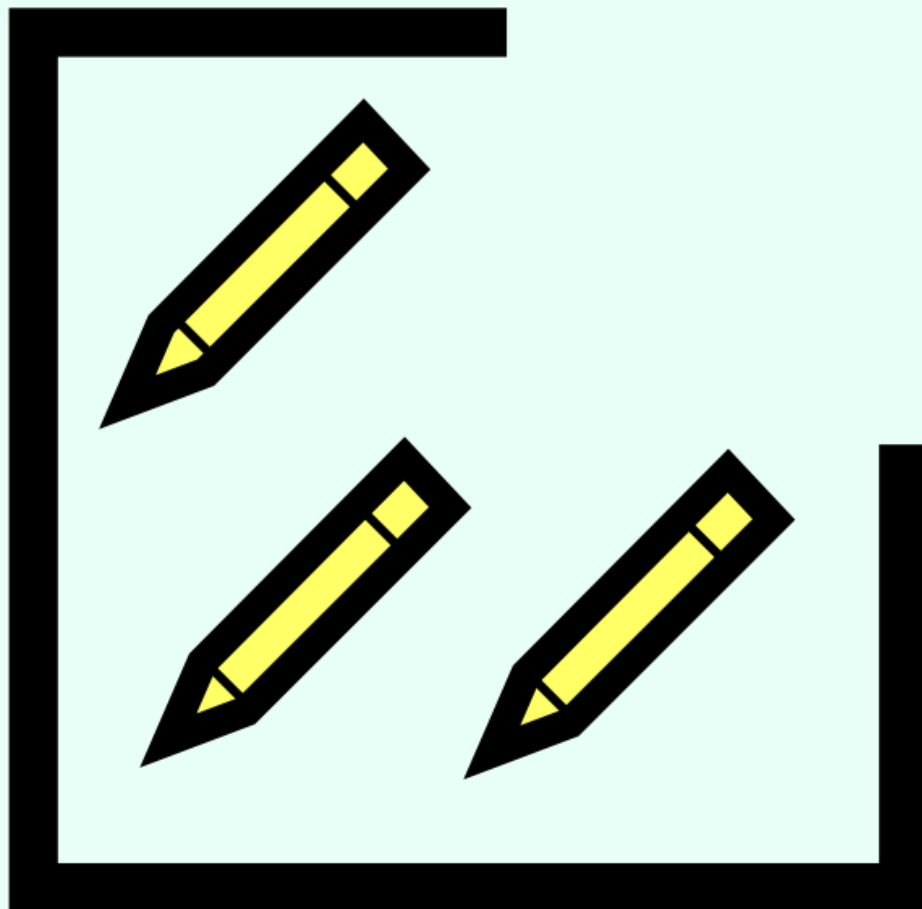
e. $p(x, y)$ tales que, la ordenada es variable y la abscisa tiene valor 4

f. La ordenada es el doble de la abscisa.

g. Define un segmento rectilíneo con pendiente $m = 2$ con el punto $p_0(1, 0)$



2.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1**

1.

a. $d = 5$ unidades.

b. $d = \sqrt{20}$ unidades.

c. $d = 2\sqrt{17} + \sqrt{34}$ unidades.

d. $x = -3 + 3\sqrt{11}$ y $x = -3 - 3\sqrt{11}$

e. $y = 5$

f. i. $p_x(4, 0)$ y $p_y(0, 2)$ ii. $p_x(-3, 0)$ y $p_y(0, -5)$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2**

1. a. i. $m = -7$ $m\angle\theta = 98.13^\circ$

ii. $m = \frac{3}{4}$ $m\angle\theta = 36.87^\circ$

b. i. $x = 1$

ii. $x = -4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}$

iii. $y = 6 - \sqrt{3}$

c. i. $x = 6$

ii. $x = 2$

iii. $x = 3$

d. 135° , 8.13° y 59.04°

**SOLUCIONES****SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 3**

1. a. $p(-2, 0)$

b. $p\left(\frac{4}{5}, \frac{28}{5}\right)$

c. $p\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

2. a. $p(4, 3)$

b. $p\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

c. $r = \frac{3}{4}$

d. $r = 2$

e. $B(11, 18)$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1**

1. a. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 5 = 0\}$ b. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y = 0\}$

c. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

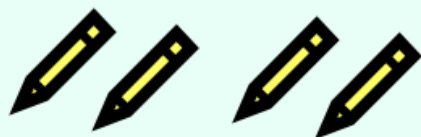
d. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \text{ o } x - y = 0\}$

e. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4 = 0\}$

f. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4 = 0\}$

g. $LG = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y - 2 = 0\}$

2.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD







UNIDAD 2 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se interpreta un punto en el plano cartesiano?

2. Define el ángulo de inclinación de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano.

3. ¿Cuál es la interpretación de la pendiente de un segmento rectilíneo?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de un segmento rectilíneo vertical?

5. ¿Si un segmento rectilíneo dirigido se divide en tres partes congruentes, entonces las razones entre los segmentos así generados son?

6. Define formalmente lugar geométrico del plano cartesiano.

DESARROLLOS OPERATIVOS

7. Calcula la longitud del perímetro del triángulo con vértices en los puntos

$$A(0, 0), B(2, 4), C(6, -6),$$

también calcula las pendientes de los lados.

8. Un triángulo con vértices en los puntos

$$A(-2, 0), B(1, 4), C(0, 6),$$

calcula los ángulos de inclinación de los lados así y como los puntos que trisecan el lado AB

9. Traza y escribe formalmente el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición:

Sea $A(4, -1)$, el punto $P(x, y)$ se desplaza de manera que todos los segmentos rectilíneos que definen tienen pendiente $m = -2$

PARA PENSAR

10. El perímetro de un cuadrado es $4\sqrt{8}$ unidades, si sus diagonales se encuentran sobre los ejes coordenados, ¿cuáles son sus vértices?

11. Determina la condición que satisface el lugar geométrico del plano cartesiano tal que: el desplazamiento del punto $p(x, y)$ forma segmentos rectilíneos con inclinaciones de -30° con el punto $p_1(x_1, y_1)$. Supón que uno de estos segmentos rectilíneos incluye al punto $(1, -1)$

ESCALA

Preguntas 1 a 6., un punto cada una.

Problemas 7. a 9. tres puntos cada uno.

Problemas 10. a 11. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 14 puntos

UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN



CONCEPTOS

1. Un par ordenado (de números reales).
2. Ángulo con lado inicial el eje de las abscisas, lado final: segmento rectilíneo y vértice el punto donde se interseca el eje de las abscisas y el segmento rectilíneo (o su prolongación).
3. Se relaciona con el ángulo de inclinación del segmento rectilíneo y proporciona una idea sobre su inclinación.
4. Está indefinida (o es infinita).
5. $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{1}$
6. $LG = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) = 0 \right\}$



DESARROLLOS OPERATIVOS

7. $d = \sqrt{20} + \sqrt{72} + \sqrt{116}$ unidades. $m_{AB} = 2$, $m_{AC} = -1$ y $m_{BC} = -\frac{5}{2}$ indefinida.
8. $m\angle AB = 53.13^\circ$, $m\angle BC = 116.57^\circ$, $m\angle AC = 71.57^\circ$
 $T_1 \left(-1, \frac{4}{3} \right)$, $T_2 \left(0, \frac{8}{3} \right)$
9. $LG = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y - 7 = 0 \right\}$



PARA PENSAR

10. $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$
11. $LG = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 1 = 0 \right\}$



UNIDAD 3. LA LÍNEA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumnado:

Transitará entre las representaciones gráfica y algebraica de la recta dados los diversos elementos que la definen, utilizando el método analítico que, en conjunto, le permitirá resolver problemas geométricos en diversos contextos.

CONTENIDO

SECCIÓN 3.1 Ecuaciones y formas de la línea recta en el plano cartesiano.

SECCIÓN 3.2 Líneas rectas el plano cartesiano.

SECCIÓN 3.3 Soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 3.4 Evaluación de la unidad.



CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano cartesiano que satisfacen cierta condición.

Línea recta. Lugar geométrico generado por dos puntos, uno fijo y otro que desplaza de manera que la pendiente que definen permanece constante.

Pendiente. Dados dos puntos, razón entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas.

Formas de una línea recta. Su representación algebraica.

Ángulo formado por dos líneas rectas. El ángulo agudo que definen las dos líneas rectas.

Distancia mínima entre una línea recta y un punto exterior. Longitud del segmento rectilíneo perpendicular a la línea recta, sus extremos: el punto exterior y un punto de la línea recta.

3.1 ECUACIONES Y FORMAS DE LA LÍNEA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

1. Conoce el origen del estudio de las secciones cónicas y su importancia.
2. Identifica los elementos que definen la línea recta.
3. Describe a la recta como un lugar geométrico, utilizando el concepto de pendiente.
4. Obtiene la ecuación de una línea recta, dadas dos condiciones.
8. Identifica los elementos que conforman la estructura de las diferentes ecuaciones de la línea recta (ordinaria o canónica, general y simétrica) y su importancia.
9. Transita en las diferentes formas de la ecuación de la línea recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).

En geometría analítica la línea recta se trata como un lugar geométrico, para definirla se utilizan: un punto fijo, un punto que se desplaza y la pendiente que generan los puntos antes señalados.

DEFINICIÓN 1. (LÍNEA RECTA)

La línea recta es el lugar geométrico generado por un punto fijo y un punto que se desplaza, de manera que la pendiente (de todos los segmentos de recta que generan) permanece constante.

Bajo las condiciones de la **definición 1.**, con $p_0 (x_0, y_0)$ como punto fijo, $p (x, y)$ como punto variable y m pendiente constante (invariante) se obtienen las ecuaciones de la **propiedad 1.**

PROPIEDAD 1. (ECUACIONES DE UNA LÍNEA RECTA)

a. $y - y_0 = m(x - x_0)$ es la “ecuación de la línea recta dado uno de sus puntos y su pendiente”.

b. $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$ es la “ecuación de la línea recta dados dos de sus puntos”.



EJEMPLO 1. FORMAS DE LA LÍNEA RECTA

a. Sean los puntos:

$$p_0 (2, -1) \text{ y } p_1 (-2, 7),$$

entonces

$$x_0 = 2, y_0 = -1, x_1 = -2, y_1 = 7, \text{ los sustituimos en } y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

y obtenemos

$$y + 1 = \frac{7 + 1}{-2 - 2} (x - 2), \text{ o bien } y + 1 = -2(x - 2)$$

b. Si

$$p_0 \left(1, \frac{1}{4}\right) \text{ y } p_1 \left(\frac{3}{4}, 2\right),$$

entonces

$$x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{3}{4}, y_1 = 2. \text{ Los sustituimos en } y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

y obtenemos

$$y - \frac{1}{4} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - 1} (x - 1), \text{ es decir } y - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}x$$

c. La pendiente $m = -\frac{3}{7}$ y el punto $p_0 (2, -4)$ determinan la línea recta de ecuación

$$y + 4 = -\frac{3}{7}(x - 2)$$

d. La pendiente $m = -2$ y el punto $p_0(-3, 1)$ determinan la línea recta de ecuación

$$y - 1 = -2(x + 3)$$

Podemos describir las ecuaciones $y - y_0 = m(x - x_0)$ y $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

(aplicando un proceso algebraico adecuado) en las formas que señala la **propiedad 2**, éstas formas reciben un nombre específico.

PROPIEDAD 2. (FORMAS DE UNA LÍNEA RECTA)

- a. Si A y B no son cero simultáneamente, entonces $Ax + By + C = 0$ es la “forma general de la línea recta”.
- b. $y = mx + b$ es la “forma pendiente ordenada al origen de la línea recta”.
- c. Si a y b son distintos de cero, la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la “forma simétrica de la línea recta”.

El **ejemplo 2** muestra el “tránsito” entre las distintas formas de la línea recta”.



EJEMPLO 2. FORMAS DE LA LÍNEA RECTA

Obtengamos las formas de la línea recta solicitada.

a. Los puntos $p_0(1, 4)$ y $p_1(-1, 2)$ determinan la línea recta con ecuación

$$y - 4 = \frac{2 - 4}{-1 - 1}(x - 1), \text{ o bien } y - 4 = 2(x - 1)$$

i. Para describirla en la forma general ($Ax + By + C = 0$):

Desarrollamos $y - 4 = 2(x - 1)$ y reacomodamos términos, obtenemos:

$$y - 4 = 2x - 2, \text{ o bien } 0 = 2x - y - 6, \text{ entonces}$$

$$2x - y - 6 = 0, \text{ con } A = 2, B = -1 \text{ y } C = -6$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen ($y = mx + b$)

Reacomodando $2x - y - 6 = 0$ y obtenemos la forma pendiente ordenada al origen:

$$y = 2x - 6, \text{ en donde } m = 2 \text{ y } b = -6$$

iii. Forma simétrica ($\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$).

Con $2x - y - 6 = 0$ obtenemos $2x - y = 6$, o bien $\frac{2x}{6} - \frac{y}{6} = 1$ y también $\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1$

b. La pendiente $m = \frac{2}{3}$ y el punto $p_0 (2, 2)$ determinan la línea recta de ecuación

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 2), \text{ por tanto:}$$

i. Forma general.

Desarrollando $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 2)$ da $3y - 6 = 2x - 4$, por tanto, $2x - 3y + 2 = 0$ con

$$A = 2, B = -3 \text{ y } C = 2$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen.

De $2x - 3y + 2 = 0$ obtenemos $3y = 2x + 2$, o bien $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, luego

$$m = \frac{2}{3} \text{ y } b = \frac{2}{3}$$

iii. Forma simétrica:

Si $2x - 3y + 2 = 0$, entonces $2x - 3y = -2$, dividimos cada término por -2 , da

$$-x + \frac{3}{2}y = 1, \text{ es decir } \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1, \text{ y } a = -1 \text{ y } b = \frac{2}{3}$$

c. Si $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, entonces:

i. Forma general:

Multiplicamos los términos de la ecuación por $(2)(4) = 8$, obtenemos

$$4x + 2y = 8 \Leftrightarrow 2x + 2y - 8 = 0$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{4} = -\frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 4$$



SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 1

1. Obtén las tres formas de las líneas rectas con las características indicadas.

a. Contiene los puntos $p_0 (1, 2)$ y $p_1 (-4, 4)$

b. Contiene los puntos $p_0 (3, -2)$ y $p_1 (4, 0)$

c. Contiene los puntos $p_0 (0, -4)$ y $p_1 (2, 6)$

- d. Tiene pendiente $m = 1$ y contiene el punto $p_0 (-2, 1)$
- e. La pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y contiene el punto $p_0 (-4, -3)$



El trazo de una línea recta (en el plano cartesiano) se efectúa utilizando cualquiera de sus formas algunos procesos para ello son los siguientes:

1. Forma general: Se seleccionan dos abscisas y se evalúan en la ecuación, se obtienen así dos de sus puntos.
2. Forma pendiente ordenada al origen: Se utiliza una abscisa, se evalúa en la ecuación para generar un punto, se utiliza la ordenada al origen y un punto antes obtenido.
3. Forma simétrica: Los divisores se localizan en los ejes coordenados y por los puntos que definen se traza la línea recta.



EJEMPLO 3. TRAZO DE UNA LÍNEA RECTA

- a. Trazo de la línea recta utilizando su forma general.

$$x - 2y + 4 = 0$$

- i. Sea $x = 0$, entonces, $0 - 2y + 4 = 0$
 $-2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$, por tanto la línea recta contiene al punto $A(0, 2)$

- ii. Sea $y = 0$, entonces $x - 2(0) + 4 = 0$,
 es decir,

$$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

La línea recta contiene al punto $B(-4, 0)$

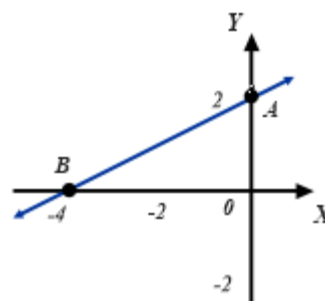


FIGURA 1.

- b. Trazo de una línea recta utilizando su forma pendiente ordenada al origen $y = -\frac{1}{3}x - 1$

- i. Contiene al punto (revisa la ordenada al origen)

$$A(0, -1)$$

- ii. Sea $y = 0$, entonces

$$0 = -\frac{1}{3}x - 1, \text{ es decir } x = -3$$

La línea recta contiene al punto

$$B(-3, 0)$$

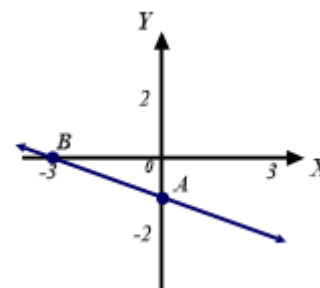


FIGURA 2.

c. Trazo de una línea recta utilizando su forma simétrica $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

Si $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$,

entonces línea recta contiene a los puntos

$$A(2, 0) \text{ y } B\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

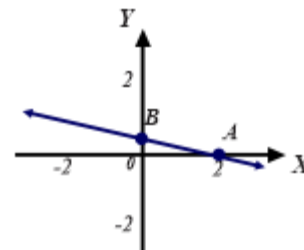


FIGURA 3.



SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 2

1. Trazo la línea recta.

a. $x + 2y + 4 = 0$

b. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

c. $2x - y + 2 = 0$

d. $y = \frac{3}{2}x - 1$

e. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

f. $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$

Con el eje de las abscisas y una línea recta podemos construir un ángulo en el plano cartesiano, este ángulo tiene lado inicial al eje de las abscisas y lado terminal a la línea recta.

DEFINICIÓN 2. (ÁNGULO ASOCIADO A UNA LÍNEA RECTA)

El ángulo asociado a una línea recta tiene:

Lado inicial, el eje de las abscisas.

Lado terminal, la línea recta.

Se mide en sentido levógiro (giro en sentido opuesto a las manecillas de un reloj) y es positivo.

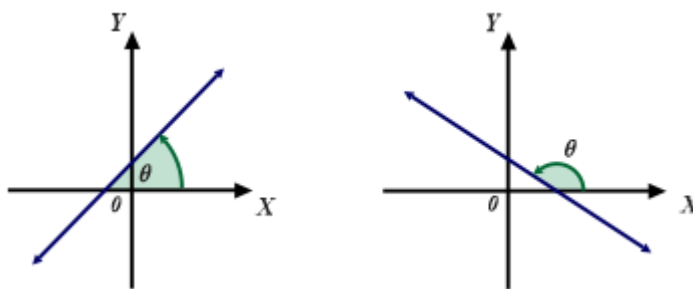


FIGURA 4.

El ángulo asociado a una línea recta se relaciona con su pendiente m ; puede justificarse fácilmente la afirmación:

Si $\angle\theta$ representa el ángulo de inclinación de una línea recta, entonces su amplitud (medida $M\angle\theta$) es el número $M\angle\theta = \text{tg}^{-1}(m)$ grados; cabe señalar que una línea recta vertical tiene asociado un ángulo de inclinación de 90° y a una línea recta paralela al eje de las abscisas un ángulo de medida 0° grados.

PROPIEDAD 3. (MEDIDA DEL ÁNGULO ASOCIADO A UNA LÍNEA RECTA)

La línea recta con pendiente m tiene asociado un ángulo de amplitud $M\angle\theta = \text{tg}^{-1}(m)$ grados.



EJEMPLO 4. ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA

a. La pendiente de $y = x - 4$ es $m = 1$, por tanto

$$M\angle\theta = \text{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$$

b. En $y = -x + \frac{3}{4}$ la pendiente es $m = -1$ y

$$M\angle\theta = \text{tg}^{-1}(-1) = 135^\circ$$

c. Si $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$, entonces $m = \frac{1}{2}$ (verifícalo) y

$$M\angle\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 63.435^\circ$$

d. $3x - 4y + 4 = 0$ tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$ (verifícalo), luego

$$M\angle\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.869^\circ$$

**SECCIÓN 3.1**
EJERCICIOS 3

1.

Calcula la medida del ángulo de inclinación de la línea recta con ecuación:

1. $x - 4y - 3 = 0$

2. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

3. Contiene a los puntos $A(3, 0)$ y $B\left(0, \frac{4}{3}\right)$ 

3.2 LINEAS RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

- 5. Determina el ángulo que se forma cuando dos líneas rectas se cortan, en términos de sus pendientes.**
- 6. Identifica cuando dos líneas rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.**
- 7. Determina las ecuaciones de líneas rectas paralelas o perpendiculares a otra dada.**
- 10. Calcula la distancia de un punto a una línea recta.**
- 11. Resuelve problemas en diferentes contextos, que involucran las distintas formas de la ecuación de la línea recta.**

Cuando dos líneas rectas se cortan (y no son paralelas), forman dos pares de ángulos "opuestos por el vértice", es decir, se crean dos ángulos agudos iguales entre sí y dos ángulos obtusos también iguales entre sí. De estos pares de ángulos, se define como el "ángulo entre las líneas rectas" al ángulo agudo, observa la **figura 1**.

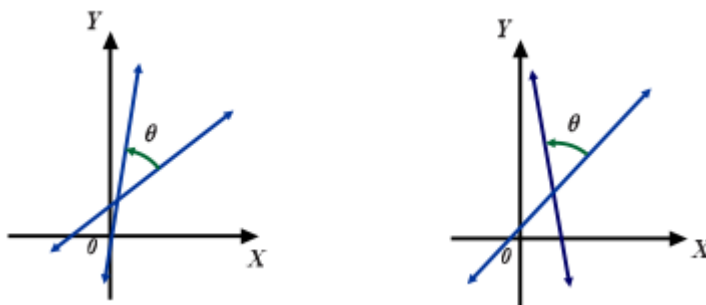


FIGURA 1.

Si dos líneas rectas L_1 y L_2 forman ángulos de medidas (amplitudes) $m\angle\theta_1$ y $m\angle\theta_2$, respectivamente, con respecto al eje x de manera que

$$0 < m\angle\theta_1 < m\angle\theta_2 \text{ y } 0 < m\angle\theta_2 - m\angle\theta_1 < \frac{\pi}{2},$$

el ángulo generado por las dos rectas tiene medida: $m\angle\theta = m\angle\theta_2 - m\angle\theta_1$, observa la **figura 2**.

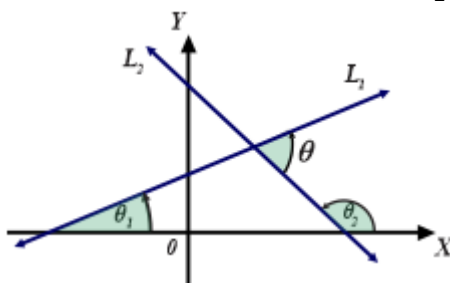


FIGURA 2.

Con la identidad trigonométrica referente a la "tangente de la diferencia de dos ángulos", obtenemos la **proposición 1**.

PROPIEDAD 1. (MEDIDA DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS LÍNEAS RECTAS)

Sean las líneas rectas L_1 y L_2 (no perpendiculares) con pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, y $\angle\theta$ el ángulo agudo que generan.

a. Si $m_1 \neq m_2$, entonces $m\angle\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|\right)$

b. Si $m_1 = m_2$, entonces $m\angle\theta = 0^\circ$ y,

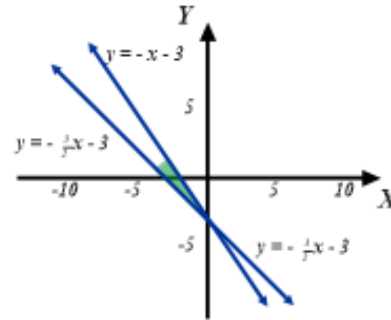
c. Si $m_1 \cdot m_2 \neq -1$, entonces $m\angle\theta = 90^\circ$

**EJEMPLO 1. MEDIDA DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS LÍNEAS RECTAS**

1. Las líneas rectas con ecuaciones $y = -x - 3$ y $y = -\frac{3}{2}x - 3$ tienen pendiente $m_1 = -1$ y $m_2 = -3/2$, respectivamente, por tanto, generan un ángulo con amplitud,

$$m\angle\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\left|\frac{\left(-\frac{3}{2}\right) - (-1)}{1 + (-1)\left(-\frac{3}{2}\right)}\right|\right)$$

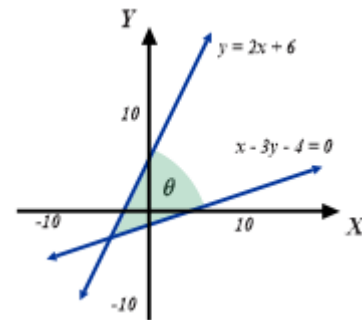
$$= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 11.31^\circ$$

**FIGURA 3.**

2. Las pendientes de las líneas rectas con ecuaciones $y = 2x + 6$ y $x - 3y - 4 = 0$ son 2 y $1/3$, por tanto, la amplitud del ángulo que definen es:

$$m\angle\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\left|\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + (2)\left(\frac{1}{3}\right)}\right|\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\left|\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{2}{3}}\right|\right)$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$$

**FIGURA 4.****SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1**

1. Calcula la medida del ángulo que forman las líneas rectas con ecuaciones:

a. $x + y - 2 = 0$ y $x - 4y = 0$

b. $\frac{x}{6} - \frac{y}{5} = 1$ y $2x - 3y - 3 = 0$

c. $y = \frac{3}{2}x + 3$ y $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

d. $2x + y - 2 = 0$ y $y = -3x$

Con la **propiedad 3**, se generan nuevas líneas rectas.



EJEMPLO 2. LÍNEAS RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

1. Obtén la ecuación: de la línea recta paralela y de la línea recta perpendicular que contiene al punto indicado. Trázalas.

a. A $2x - 3y - 6 = 0$ y pasan por $p_0 (-1, -3)$

La pendiente de $2x - 3y - 6 = 0$ es $m = \frac{2}{3}$,

por tanto:

i. La línea recta paralela a ella tiene la misma

pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $p_0 (-1, -3)$,

luego

$y + 3 = \frac{2}{3}(x + 1)$, entonces $2x - 3y - 7 = 0$

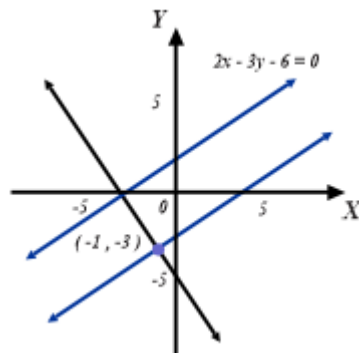


FIGURA 5.

ii. Pendiente de la línea recta perpendicular $m_{\perp} = -\frac{3}{2}$ y pasa por $p_0 (-1, -3)$, así

$$y + 3 = -\frac{3}{2}(x + 1) \text{ o bien } 3x + 2y + 9 = 0$$

b. A la línea recta de ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ y contiene al punto $p_0 (-1, 1)$

Si $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$, entonces $m = -3$, por tanto:

i. La línea recta paralela tiene ecuación

$$y - 1 = -3(x + 1), \text{ o bien } 3x + y = -2,$$

luego $\frac{x}{-2/3} + \frac{y}{-2} = 1$

ii. Para perpendicular $m_{\perp} = \frac{1}{3}$ y $p_0 (-1, 1)$,

su ecuación es $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$, o bien

$$3y - 3 = x + 1 \text{ y } x - 3y = -4,$$

en la forma simétrica $\frac{x}{-4} + \frac{y}{4/3} = 1$

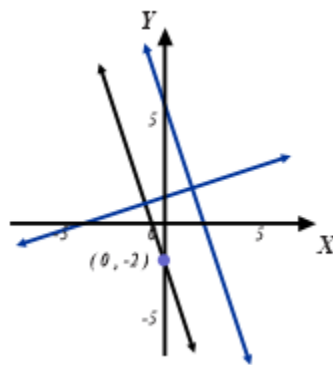


FIGURA 6.



SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS 2

1. Obtén las ecuaciones (generales) de: la línea recta paralela y de la línea recta perpendicular (en la forma en que se te presenta).

- a. A la línea recta con ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ y contiene al punto $p_0 (0, -2)$
- b. A la línea recta con ecuación $2x + 4y - 3 = 0$ y contiene al punto $p_0 (2, 1)$
- c. A la línea recta con ecuación $y = \frac{3}{5}x - 1$ y contiene al punto $p_0 (1, 1)$



INTERSECCIÓN DE DOS LÍNEAS RECTAS

En un contexto algebraico, las ecuaciones de un par de líneas rectas equivalen a un sistema de ecuaciones lineales, su solución (en caso de existir) corresponde al punto (puntos) de intersección de las líneas rectas.



EJEMPLO 3. INTERSECCIÓN DE DOS LÍNEAS RECTAS

En caso de existir obtén el punto de intersección.

- a. De las líneas rectas con ecuaciones $y = -2x - 3$ y $y = 4x - 2$

Algebraicamente equivalen al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

Igualándolas obtenemos la ecuación

$$-2x + 6 = 4x - 2, \text{ entonces } 8 = 6x \text{ y } x = \frac{4}{3}$$

La sustitución de $x = \frac{4}{3}$ en la segunda ecuación da $y = 4\left(\frac{4}{3}\right) - 2$, o bien $y = \frac{10}{3}$

Las líneas rectas con ecuaciones $y = -2x - 3$ y $y = 4x - 2$ se intersecan en $I_0 \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3} \right)$

- b. De las líneas rectas con ecuaciones $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ y $x + y = 1$

Algebraicamente equivalen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Sustituimos $y = -x + 1$ en $2x - 3y - 6 = 0$ obtenemos

$$2x - 3(-x + 1) - 6 = 0, \text{ entonces } 5x = 9 \text{ y } x = \frac{9}{5}$$

Si sustituimos $x = \frac{9}{5}$ en $y = -x + 1$ obtenemos $y = -\frac{9}{5} + 1 = -\frac{4}{5}$

Las líneas rectas se intersecan en $I_0 \left(\frac{9}{5}, -\frac{4}{5} \right)$

c. De las líneas rectas con ecuaciones $x + y + 1 = 0$ y $3x + 3y - 1 = 0$

Podemos tratarlas como sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$

$$\text{Si } \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}, \text{ entonces } \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}, \text{ o bien } \begin{cases} -3x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

La suma de las ecuaciones conduce a la **contradicción** $-4 = 0$, entonces

“las líneas rectas con ecuaciones $x + y + 1 = 0$ y $2x + 2y - 1 = 0$ no se intersecan”.

d. Obtén el punto de intersección de las líneas rectas con ecuaciones

$$3x + 3y - 3 = 0 \text{ y } 2x + 2y - 2 = 0$$

Con ambas ecuaciones formamos el sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ entonces } \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ o bien } \begin{cases} 6x + 6y - 6 = 0 \\ -6x - 6y + 6 = 0 \end{cases}$$

La suma de las dos últimas ecuaciones conduce a la identidad $0 = 0$, esto significa que ambas ecuaciones representan a la misma línea recta.

SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS 3

1. En caso de existir obtén el punto de intersección.

a. $x + y + 4 = 0$ con $x - 3y - 2 = 0$

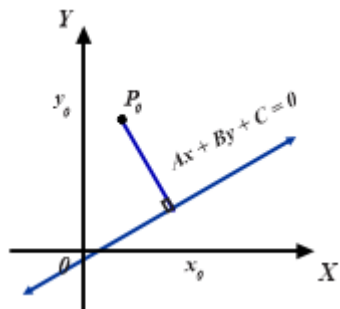
b. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1$ con $y = -2x + 1$

c. $y = \frac{1}{2}x + 2$ con $x - 2y - 3 = 0$

d. $x - 3y + 1 = 0$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA LÍNEA RECTA

La distancia entre la línea recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ y un punto $P_0 (x_0, y_0)$, (no perteneciente a ella) se interpreta como: la longitud del segmento rectilíneo perpendicular a ella y que tiene sus extremos en $P_0 (x_0, y_0)$ y ella.

**FIGURA 7.**

La **propiedad 4.** contiene los elementos necesarios en el cálculo de la distancia entre un punto y una línea recta.

PROPIEDAD 4. (DISTANCIA MÍNIMA ENTRE UNA LÍNEA RECTA Y UN PUNTO)

La distancia mínima entre la línea recta R con ecuación

$$Ax + By + C = 0 \text{ y el punto } P_0 (x_0, y_0),$$

es

$$d = |RP_0| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

el signo del numerador se toma de manera que d sea positiva.

**EJEMPLO 5. LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO**

a. La distancia entre la línea recta con ecuación $4x + 3y + 8 = 0$ y el punto $P_0 (0, 4)$ es

$$d = \frac{|(4)(0) + (3)(4) + (8)|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = 4 \text{ unidades.}$$

b. Para calcular la distancia entre la línea recta de ecuación $y = -2x$ y el punto $P_0 (-2, -2)$; rescribimos $y = -2x + 3$ en la forma general $2x + y = 0$, por tanto

$$d = \frac{|(2)(-2) + (1)(-2) + (0)|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \text{ unidades.}$$



SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS 4

1. Calcula la distancia entre la línea recta y el punto.

a. $2x + 5y + 5 = 0$ y el punto $p_0(2, 2)$

b. $2x + 3y + 1 = 0$ y el punto $p_0(0, -2)$

c. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ y el punto $p_0(1, 3)$

d. $y = \frac{1}{4}x + 4$ y el punto $p_0(4, -1)$



Los segmentos de recta (o líneas rectas) notables asociadas a triángulos están definidas en términos de los puntos medios de los lados o de intersecciones de líneas rectas que los contienen.

Altura. Segmentos de línea recta perpendicular a un lado (o a su prolongación) de un triángulo con extremos en un vértice y el lado opuesto. Las alturas concurren en un punto llamado ortocentro.

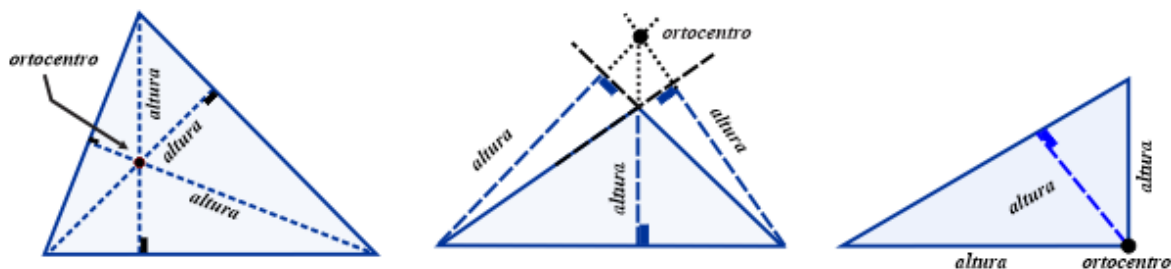


FIGURA 8.

Medianas. Segmento de recta con extremos en un vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice; las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro.

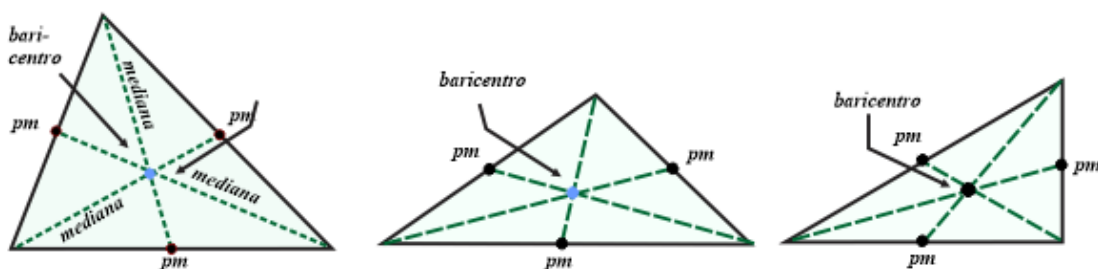


FIGURA 9.

Mediatriz. Línea recta que tienen un extremo en el punto medio a un lado y es perpendicular a este. Las mediatrices de un triángulo concurren en el punto llamado circuncentro.

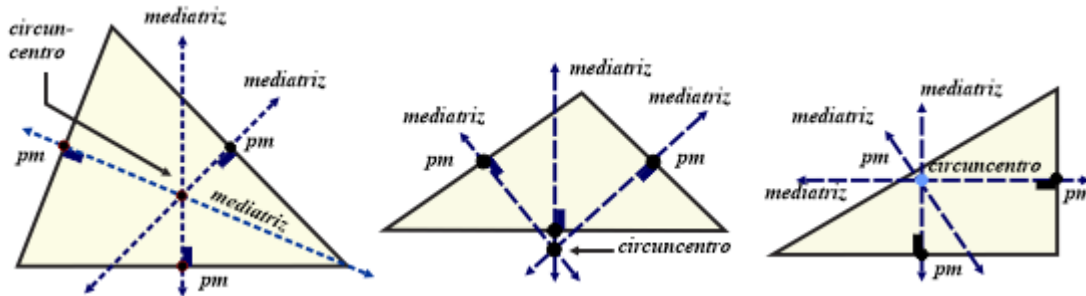


FIGURA 10.


EJEMPLO 4. LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-4, 0)$, $B(0, 6)$ y $C(6, 4)$, observa la **figura 11**.

a. Las pendientes de los lados son:

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{3}{2}, \quad m_{AC} = \frac{0-4}{-4-6} = \frac{2}{5} \text{ y}$$

$$m_{BC} = \frac{4-6}{6-0} = -\frac{1}{3}$$

Los lados tienen puntos medios

$$PM_{AB} \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = PM_{AB}(-2, 3)$$

$$PM_{AC} \left(\frac{6-4}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = PM_{AC}(1, 2)$$

$$PM_{BC} \left(\frac{0+6}{2}, \frac{6+4}{2} \right) = PM_{BC}(3, 5)$$

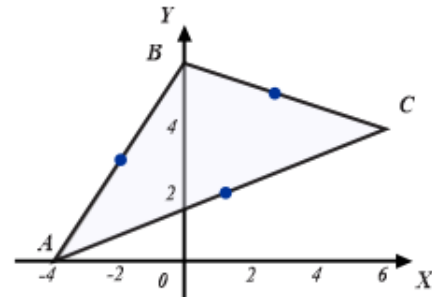


FIGURA 11.

b. Las ecuaciones de las líneas rectas de las que forman parte las alturas perpendiculares a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (o a sus prolongaciones) y el ortocentro.

Altura perpendicular a $\overline{AB}$

Si $m_{AB} = \frac{3}{2}$, entonces $m_{\perp AB} = -\frac{2}{3}$

Con

$$m_{\perp AB} = -\frac{2}{3}, \quad C(6, 4) \text{ y la ecuación punto pendiente } y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 6),$$

o bien

$$3y - 12 = -2x + 12 \text{ en la forma general } 2x + 3y - 24 = 0$$

Altura perpendicular a $\overline{AC}$

Si $m_{AC} = \frac{2}{5}$, entonces $m_{\perp AB} = -\frac{5}{2}$.

Con $m_{\perp AB} = -\frac{5}{2}$, $B(0, 6)$ y la ecuación pendiente ordenada al origen obtenemos

$$y - 6 = -\frac{5}{2}(x - 0), \quad y - 6 = -\frac{5}{2}x,$$

o bien

$$5x + 2y - 12 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y - 24 = 0 \\ 5x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

es el punto llamado ortocentro

$$OR\left(-\frac{12}{11}, \frac{96}{11}\right)$$

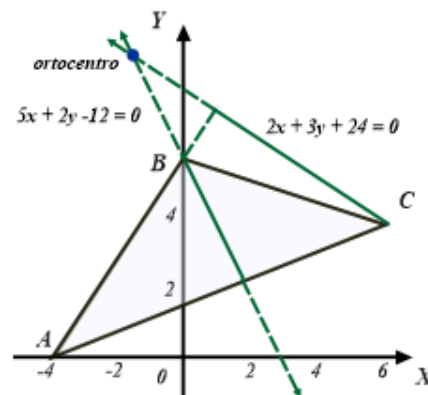


FIGURA 12.

c. Las ecuaciones de las líneas rectas que forman parte de las medianas y que contienen a los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y el baricentro.

Con $PM_{AB}(-2, 3)$, el vértice $C(6, 4)$ y la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos:

$$y - 4 = \frac{4 - 3}{6 + 2}(x - 6), \text{ luego } y - 4 = \frac{1}{8}(x - 6),$$

o bien

$$8y - 32 = x - 6, \text{ en la forma general es } x - 8y + 26 = 0$$

$PM_{AC}(1, 2)$, el vértice $B(0, 6)$ y la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos obtenemos

$$y - 6 = \frac{2 - 6}{1 - 0}(x - 0), \text{ luego } y - 6 = -4(x - 0)$$

o bien

$$4x + y - 6 = 0.$$

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 8y + 26 = 0 \\ 4x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

es el punto baricentro (centroide)

$$BA\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

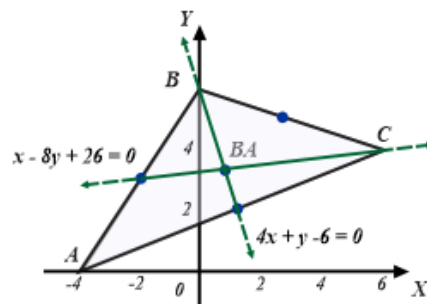


FIGURA 13.

d. Ecuaciones de las dos mediatrices que contienen a los vértices B y C . El circuncentro.

Con

$$m_{AB} = \frac{3}{2}$$

obtenemos

$$m_{\perp AB} = -\frac{2}{3}$$

Utilizamos

$$PM_{AB}(-2, 3), m_{\perp AB} = -\frac{2}{3}$$

y la ecuación punto pendiente de la línea recta obtenemos

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 2),$$

entonces

$$3y - 9 = -2x - 4$$

y la forma general es

$$2x + 3y - 5 = 0$$

Con

$$m_{AC} = \frac{2}{5}$$

obtenemos

$$m_{\perp AC} = -\frac{5}{2}$$

De

$$PM_{AC}(1, 2), m_{\perp AC} = -\frac{5}{2}$$

y la ecuación punto pendiente de la línea recta obtenemos la ecuación general

$$y - 2 = -\frac{5}{2}(x + 1),$$

$$2y - 4 = -5x + 5,$$

$$5x + 2y - 9 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 5x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

es el circuncentro

$$CR\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

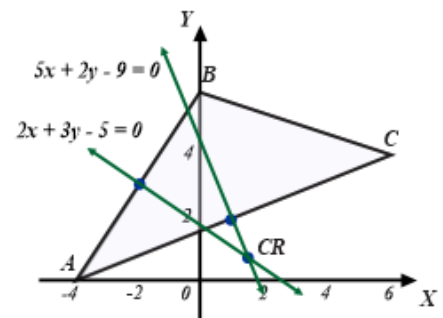


FIGURA 14.

**SECCIÓN 3.2**
EJERCICIOS 5

1. Los vértices de un triángulo son los puntos

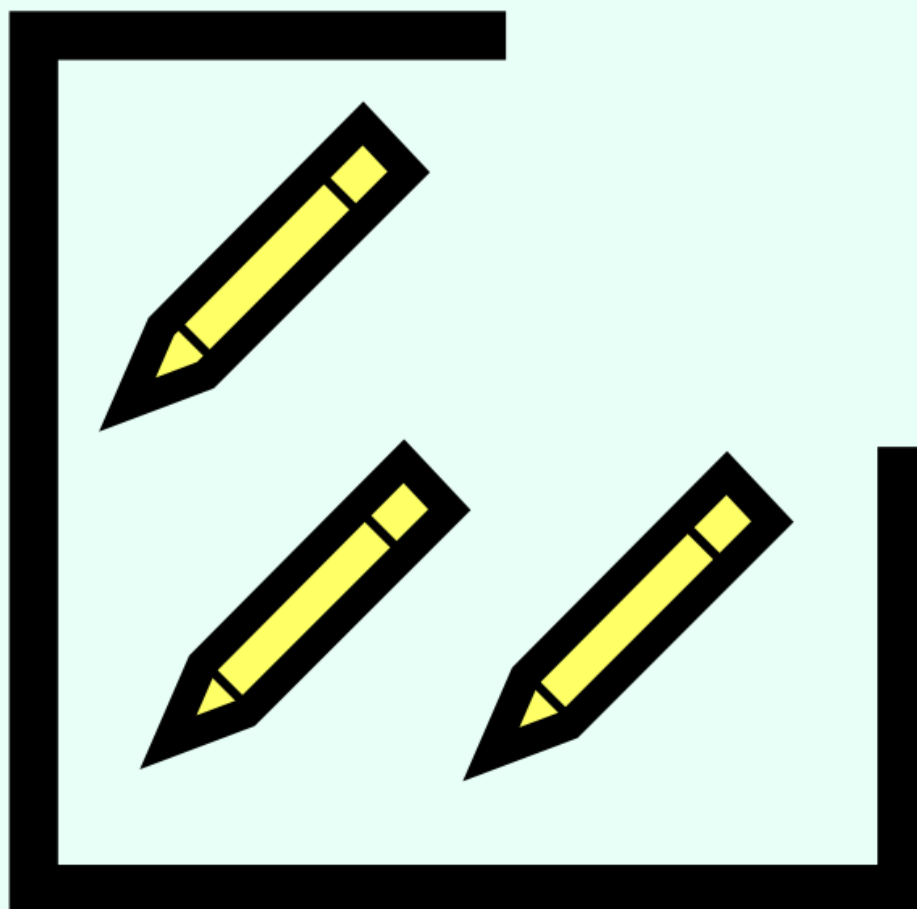
$$A(-2, 0), B(0, 4) \text{ y } C(6, 0)$$

obten.

- a. Puntos medios y pendientes de los lados
- b. Alturas (forma general) y ortocentro
- c. Medianas (forma general) y baricentro.
- d. Mediatrices (forma general) y circuncentro.



3.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1**

1. a. $6x + 7y - 4 = 0$, $\frac{x}{2/3} + \frac{y}{4/7} = 1$, $y = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{7}$

b. $2x - y - 8 = 0$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-8} = 1$, $y = 2x - 8$

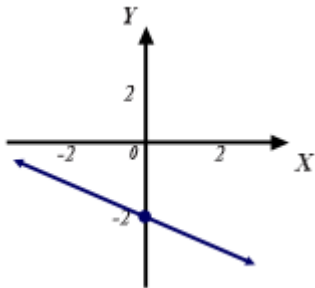
c. $x - y + 3 = 0$, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$, $y = x + 3$

d. $5x - y - 4 = 0$, $\frac{x}{4/5} + \frac{y}{-4} = 1$, $y = 5x - 4$

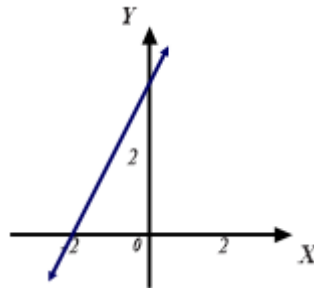
e. $2x + 3y + 17 = 0$, $\frac{x}{-17/2} + \frac{y}{-17/3} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 2**

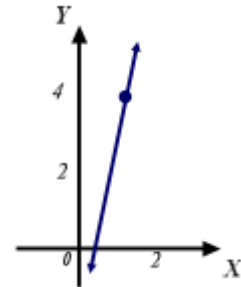
a.



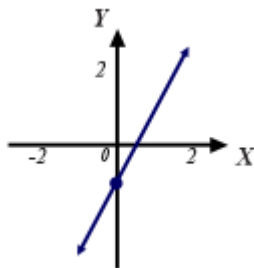
b.



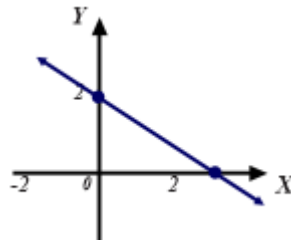
c.



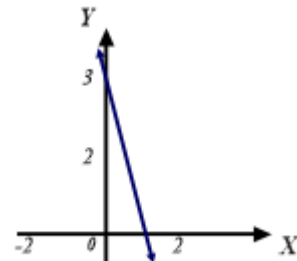
d.



e.



f.



 SOLUCIONES **SECCIÓN 3.1**
EJERCICIOS 3

1.

a. $m\angle\theta = 14.04^\circ$

b. $m\angle\theta = 123.69^\circ$

c. $m\angle\theta = 156.04^\circ$



 SOLUCIONES **SECCIÓN 3.2**
EJERCICIOS 1

1.

a. $m\angle\theta = 59.04^\circ$

b. $m\angle\theta = 6.12^\circ$

c. $m\angle\theta = 82.87^\circ$

d. $m\angle\theta = 8.13^\circ$



 SOLUCIONES **SECCIÓN 3.2**
EJERCICIOS 2

1.

a. Paralela $\frac{x}{-4/3} + \frac{y}{-2} = 1$, perpendicular $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

b. Paralela $x + 2y - 4 = 0$, perpendicular $2x - y - 3 = 0$

c. A Paralela $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$, perpendicular $y = -\frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$



 SOLUCIONES **SECCIÓN 3.2**
EJERCICIOS 3

1.

a. $I_0 \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right)$

b. $I_0 \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$

c. No se intersecan. d. $I_0 \left(\frac{11}{7}, \frac{6}{7} \right)$



**SOLUCIONES****SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 4**

1.

a. $d = \frac{19}{\sqrt{29}}$ unidades.

b. $d = \frac{5}{\sqrt{13}}$ unidades.

c. $d = \frac{1}{5}$ unidades.

d. $d = \frac{24}{\sqrt{17}}$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 5**

1.

a. $m_{AB} = 2$ $m_{AC} = 0$ $m_{BC} = -\frac{2}{3}$. $PM_{AB}(-1, 2)$, $PM_{AC}(2, 0)$ y $PM_{BC}(3, 2)$

b. $3x - 2y + 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$, $x + 0y + 0 = 0$,
 $OR(0, 3)$

c. $2x - 5y + 4 = 0$, $2x + 7y - 12 = 0$ y $2x + y - 4 = 0$

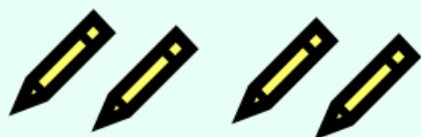
$BA\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

d. $x + 2y - 3 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$ y $x - 2 = 0$

$CR\left(2, \frac{1}{2}\right)$



3.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD







UNIDAD 3 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se interpreta una línea recta en el plano cartesiano?

2. ¿En qué forma puede representarse una línea recta?

3. ¿Qué pares de elementos definen una línea recta?

4. ¿Cómo se define el ángulo de inclinación asociado a una línea recta?

5. ¿Cómo se define el ángulo que determinan dos líneas rectas?

6. ¿Qué condiciones cumple una línea recta vertical?

7. ¿Cómo se define la distancia mínima entre una línea recta y un punto?

DESARROLLOS OPERATIVOS

Sea el triángulo con vértices en los puntos

$$A(-4, 0), B(0, 2), C(2, -4).$$

8. Calcula la ecuación de la línea recta (forma simétrica) que contiene al lado $\overline{BC}$

9. Calcula la ecuación de la línea recta (forma pendiente ordenada al origen) que contiene a la altura de la que forma parte al vértice $A(-4, 0)$

10. Calcula la amplitud del ángulo que forman las líneas rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$
11. Calcula la distancia mínima entre el lado $\overline{AB}$ y el vértice $C(2, -4)$
12. Una línea recta contiene a los puntos $A(-1, 2)$, $B(1, -2)$, otra línea recta tiene ecuación $2x + 3y + 8 = 0$,
¿en qué punto se intersecan?

PARA PENSAR

13. Obtén la forma general de la línea recta perpendicular a
 $Ax + By + C = 0$

que contiene al punto $R(p, q)$

14. Obtén la distancia entre las líneas rectas con ecuaciones
 $3x - 4y + 4 = 0$ y $9x - 12y - 4 = 0$

ESCALA

Preguntas 1 a 6., un punto cada una.

Problemas 7. a 9. tres puntos cada uno.

Problemas 10. a 11. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 12 puntos

UNIDAD 3 SOLUCIONES AL EXAMEN**CONCEPTOS**

1. El lugar geométrico que definen dos puntos, uno fijo y uno que se desplaza sin que cambie la pendiente
2. General, simétrica, pendiente-ordenada al origen.
3. Pueden ser dos puntos o puede ser un punto fijo y una pendiente.
4. Tiene lado inicial en el eje de las abscisas, su lado terminal es la línea recta, su vértice son las líneas rectas antes señaladas.
5. El ángulo positivo y agudo que determinan.
6. ¿Qué condiciones cumple una línea recta vertical?
Tiene pendiente "indefinida".
7. Longitud del segmento rectilíneo perpendicular a la línea recta y con extremos en el punto y la línea recta.



DESARROLLOS OPERATIVOS

8. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$
 $\frac{1}{3}$

9. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

10. 60.26°

11. $\frac{14}{\sqrt{5}}$ unidades.

12. $I(2, -4)$



PARA PENSAR

13. $Bx - Ay + qA - pB = 0$

14. $\frac{16}{15}$ unidades.



UNIDAD

4. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumnado:
Identificará a la parábola en sus representaciones algebraica y geométrica, y transitará entre estas formas de representación. Resolverá problemas en el ámbito matemático y de contexto que involucren a la parábola y sus propiedades.

CONTENIDO

SECCIÓN 4.1 Ecuaciones y elementos de la parábola en el plano cartesiano.

SECCIÓN 4.2 Parábolas en el plano cartesiano.

SECCIÓN 4.3 Soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 4.4 Evaluación de la unidad.



CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano cartesiano que satisfacen cierta condición.

Parábola. Lugar geométrico generado por el desplazamiento de un punto de forma que su distancia a una línea recta fija (directriz) y a un punto fijo (foco) se mantiene constante.

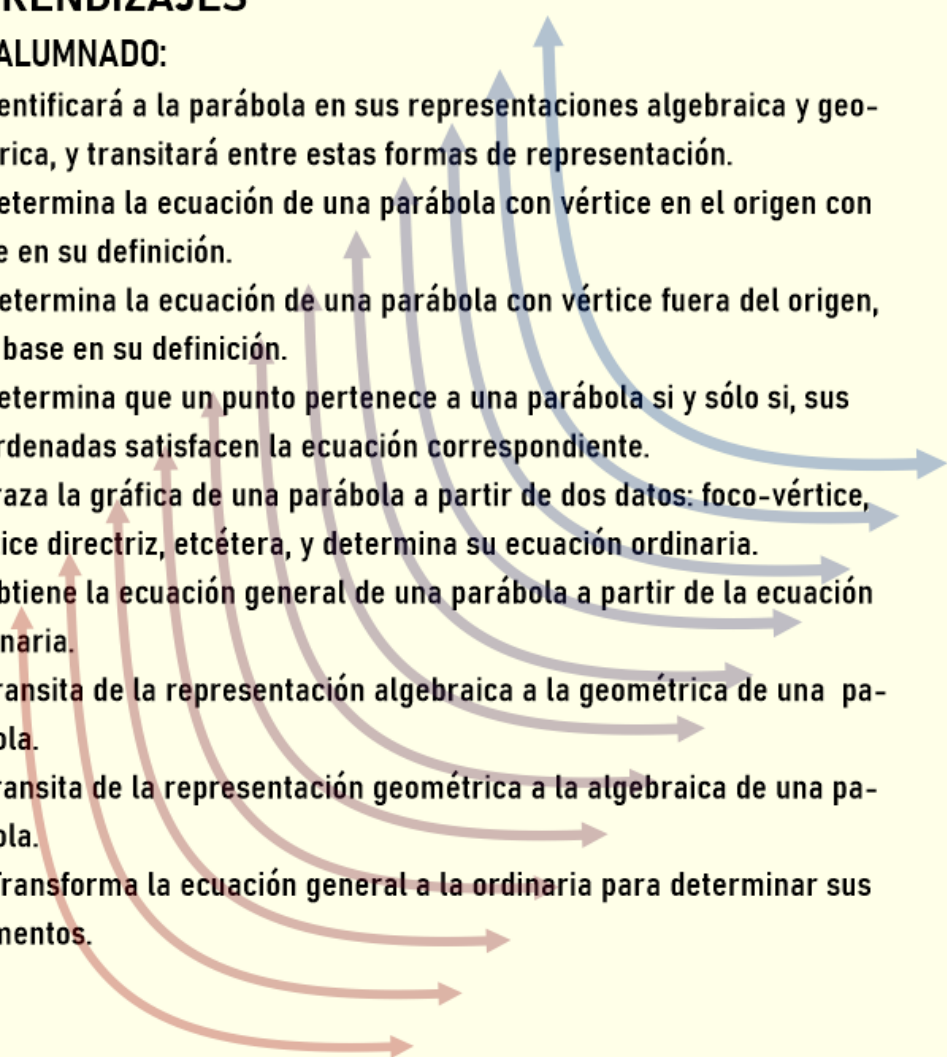
Eje de simetría. Línea recta que divide a una curva en dos partes congruentes.

Línea recta tangente a una curva. Línea recta que tiene un solo punto en común con la curva, el punto común se llama “punto de tangencia” o punto de contacto.

4.1 ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

1. Identificará a la parábola en sus representaciones algebraica y geométrica, y transitará entre estas formas de representación.
 3. Determina la ecuación de una parábola con vértice en el origen con base en su definición.
 4. Determina la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen, con base en su definición.
 5. Determina que un punto pertenece a una parábola si y sólo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
 6. Traza la gráfica de una parábola a partir de dos datos: foco-vértice, vértice directriz, etcétera, y determina su ecuación ordinaria.
 7. Obtiene la ecuación general de una parábola a partir de la ecuación ordinaria.
 8. Transita de la representación algebraica a la geométrica de una parábola.
 9. Transita de la representación geométrica a la algebraica de una parábola.
 10. Transforma la ecuación general a la ordinaria para determinar sus elementos.
- 

En el plano cartesiano el término parábola se vincula con el concepto de lugar geométrico. En **la figura 1.**, el punto $P(x, y)$ se desplaza equidistante (se encuentra a la misma distancia) del punto fijo $F(h, k)$ llamado foco y de la línea recta (fija D) conocida como directriz. Por tanto, se cumplen las igualdades $d_F = d_D$, $e_F = e_D$, $f_F = f_D$, $g_F = g_D$ (entre distancias) etcétera.

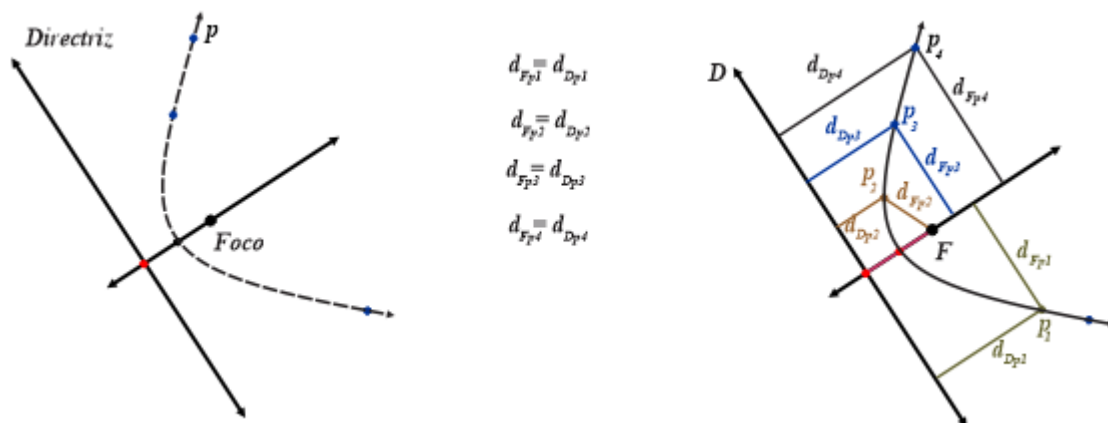


FIGURA 1.

DEFINICIÓN 1. (PARÁBOLA)

- La *parábola* es el lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos p en el plano cartesiano que equidistan de la línea recta fija D y del punto fijo F (que no está sobre la recta fija), simbólicamente, $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, F) = d(p, D) \}$
- El *punto fijo* F se llama *foco* y la *línea recta fija* D se llama *directriz*.
- El *punto medio* V del segmento rectilíneo (perpendicular a la directriz) con extremos en el punto F y en D es el *vértice*.
- La *línea recta que contiene al vértice y al foco* se llama “*eje focal*”.

Otros elementos de una parábola se muestran en la **figura 2.**

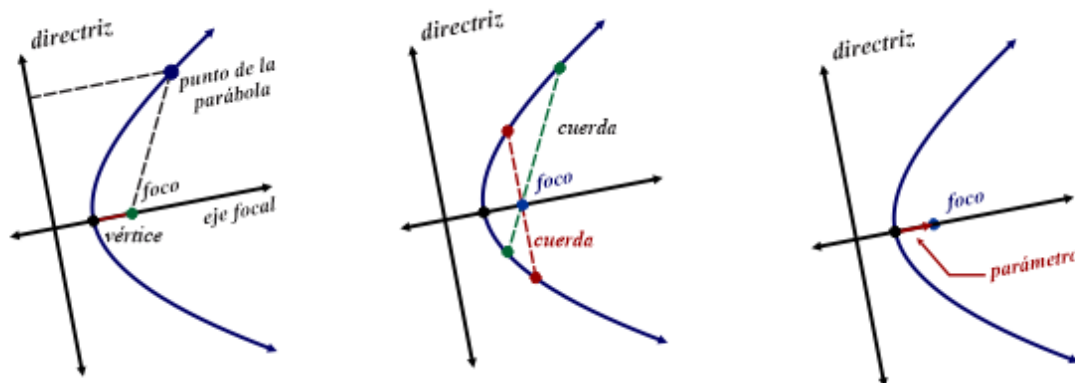


FIGURA 2.

- a. El segmento rectilíneo con extremos en dos puntos de la parábola se conoce como cuerda.
 - b. La cuerda paralela a la directriz y que contiene al foco se llama “lado recto”, su longitud se representa por LR y se puede justificar $LR = |4a|$
 - c. El segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{VF}$ perpendicular a la directriz y extremos en el vértice y el foco se denomina *parámetro*, su longitud se representa por a y llamaremos distancia focal.
- El parámetro (magnitud) define la “apertura de la parábola”:
- i. Si $a = 0$, el foco se encuentra en la directriz y todos los puntos de la parábola se encuentran sobre el eje focal.
 - ii. Al incrementar el valor de a , el foco se aleja de la directriz y la parábola se “abre”.
 - iii. Si el número a es “extremadamente grande”, la parábola es “casi” una línea recta perpendicular al eje focal.
 - iv. Si el número a es negativo, la parábola se “abre en sentido contrario” a lo señalado en los incisos anteriores.

Otras características de la parábola son:

- 1. Es una curva abierta.
- 2. Se extiende indefinidamente.
- 3. Las semi parábolas generadas el eje focal (de una parábola) son congruentes, es decir una parábola es simétrica respecto a su eje focal, **figura 3.**

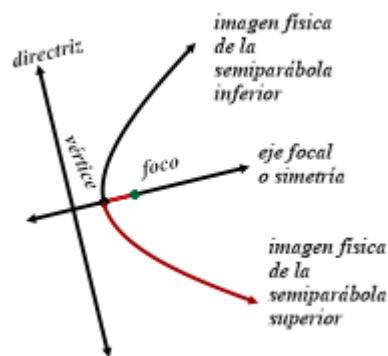


FIGURA 3.

Sólo trataremos parábolas con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados.



EJEMPLO 1. DEFINICIÓN DE PARÁBOLA

Obtengamos las ecuaciones de las parábolas en plano cartesiano.

- a. Sus puntos que equidistan de $F(0, -1)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y = -5$.

La distancia entre los puntos

$$P(x, y) \text{ y } F(0, -1)$$

es

$$d(p, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2}$$

La ecuación general de la directriz es

$$D: 0 \cdot x + y + 5 = 0 \text{ y}$$

su distancia al punto $P(x, y)$ es $d(p, D) = \frac{0(x) + 1(y) + (5)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = y + 5$

De la condición

$$d(p, F) = d(p, D)$$

obtenemos

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = y+5,$$

o bien,

$$x^2 + (y+1)^2 = (y+5)^2$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 + 10y + 25$$

o

$$x^2 - 8y - 24 = 0,$$

por último

$$x^2 = 8(y-3),$$

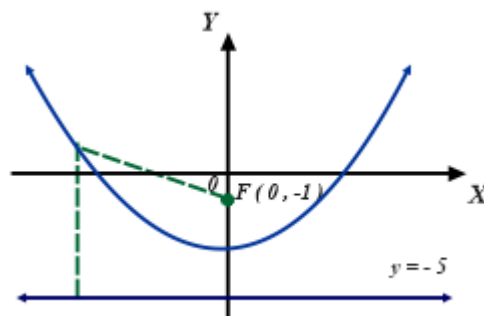


FIGURA 4.

b. $F(4, 2)$ y directriz con ecuación $x = -2$

Distancia entre

$$p(x, y) \text{ y } F(4, 2) \text{ es } d(p, F) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

Ecuación general de la directriz,

$$1 \cdot x + 0y + 2 = 0$$

Distancia entre $p(x, y)$ y la directriz,

$$d(p, D) = \frac{1(x) + 0(y) + (2)}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = x + 2$$

Con $d(p, F) = d(p, D)$ obtenemos

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = x+2, \text{ o bien } (x-4)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2$$

Desarrollamos y simplificamos,

$$x^2 - 8x + 16 + (y-2)^2 = x^2 + 4x + 4,$$

es decir

$$(y-2)^2 = 12x - 12 = 12(x-1),$$

por tanto

$$(y-2)^2 = -12(x-1),$$

entonces

$$y^2 - 12x - 4y + 16 = 0$$

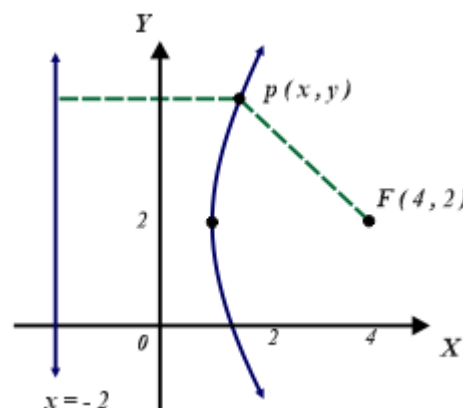


FIGURA 5.



SECCIÓN 4.1 EJERCICIOS 1

1. Obtén:

- La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(0, 0)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: x = 3$
- La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan del punto fijo $F(2, 0)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y = -1$
- La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(0, -4)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y = 0$

La formalización de los aspectos tratados en los problemas es la **definición 2**.

DEFINICIÓN 2. ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

EJE FOCAL:	VERTICAL $x = h$	HORIZONTAL $y = k$
VERTICE:	$V(h, k)$	$V(h, k)$
ECUACIÓN CARTESIANA:	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$(y - k)^2 = 4a(x - h)$
ECUACIÓN GENERAL	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$
APERTURA HACIA:	Arriba $a > 0$, abajo $a < 0$. Derecha $a > 0$, izquierda $a < 0$.	
FOCO:	$F(h, k + a)$	$F(h + a, k)$
DIRECTRIZ:	$y = k - a$	$x = h - a$
LONGITUD DEL LADO RECTO	$LR = 4a $	$LR = 4a $



EJEMPLO 2. DE ECUACIONES A ELEMENTOS

1. Obtengamos los elementos que constituyen a la parábola con ecuación dada.

a. Ecuación general $x^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. Para obtener la ecuación cartesiana:

- El término x^2 garantiza que la ecuación pertenece a una parábola con eje focal vertical.
- Separamos variables $x^2 - 2x = -4y + 11$
- Completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable x ,

$$x^2 - 2x + 1 = -4y + 11 + 1$$

factorizamos

$$(x-1)^2 = -4y + 12, \text{ es decir } (x-1)^2 = -4(x+3),$$

De la comparación de $(x-1)^2 = -4(x+3)$ con $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ obtenemos

$$h=1, k=-3 \text{ y } 4a=-4$$

Por tanto,

$$V(1, -3) \text{ y también } a=-1 \text{ (la parábola se abre hacia abajo).}$$

Sustituimos $a=-1$ en

$$F(h, k+a), y=k-a \text{ y también en } LR=|4a|$$

obteniendo:

el foco

$$F(h, k+a) = F(1, -3+(-1)) = F(1, -4),$$

la directriz

$$y=k-a=-3-(-1)=-2,$$

la longitud del lado recto

$$LR=|4(-1)(-1)|=4$$

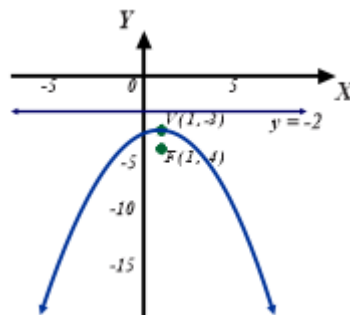


FIGURA 6.

b. Ecuación general $y^2 + 3y - 3x = 0$

Para obtener la ecuación cartesiana:

i. El término y^2 garantiza que la ecuación pertenece a una parábola con eje focal horizontal.

ii. Separamos variables $y^2 + 3y = 3x$

iii. Completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable y ,

$$y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

factorizamos

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 3x + \frac{9}{4}, \text{ es decir } \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 3\left(x + \frac{3}{4}\right),$$

De la comparación de $\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 3\left(x + \frac{3}{4}\right)$ con $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ obtenemos

$$h = -\frac{3}{4}, k = -\frac{3}{2} \text{ y } 4a = 3$$

Por tanto,

$V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ y también $a = \frac{4}{3}$ (la parábola se abre hacia la derecha).

Sustituimos $a = \frac{4}{3}$ en $F(h+a, k)$, $x = h-a$ y también en $LR = |4a|$,

obteniendo:

el foco

$$F(h+a, k) = F\left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right) = F\left(0, -\frac{3}{2}\right),$$

la directriz

$$x = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2},$$

la longitud del lado recto

$$LR = \left|4\left(\frac{3}{4}\right)\right| = 3$$

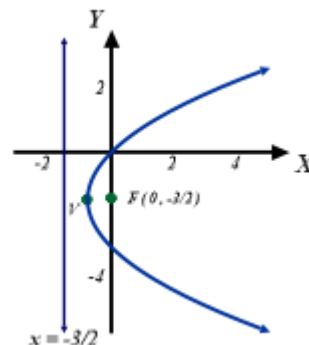


FIGURA 7.

c. Con ecuación cartesiana $(x+2)^2 = 8(y-1)$

Para obtener la ecuación general:

i. El término $(x+2)^2$ garantiza que la ecuación pertenece a una parábola con eje focal vertical.

ii. Desarrollamos el binomio cuadrático y el producto del miembro derecho

$$x^2 + 4x + 4 = 8y - 8$$

iii. Ordenamos términos y simplificamos

$$x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$$

De la comparación de $(x+2)^2 = 8(y-1)$ con $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ obtenemos

$$h = -2, k = 1 \text{ y } 4a = 8$$

Por tanto $V(-2, 1)$ y también $a = 2$ (la parábola se abre hacia arriba).

Sustituimos $a = 2$ en

$$F(h, k+a), y = k-a \text{ y también en } LR = |4a|$$

obtenemos

el foco

$$F(h, k+a) = F(-2, 1+2) = F(-2, 3),$$

la directriz

$$y = k - a = 1 - 2 = -1,$$

la longitud del lado recto

$$LR = |4(2)| = 8$$

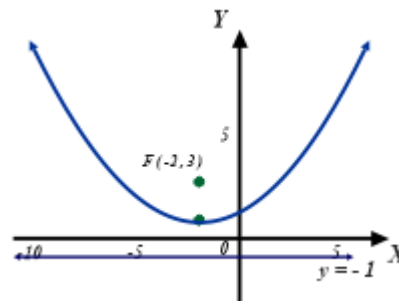


FIGURA 8.



SECCIÓN 4.1 EJERCICIOS 2

1. Obtén la ecuación faltante (cartesiana o general), los elementos y traza.

a. $(x-2)^2 = 4(y-3)$

b. $(y+2)^2 = -12\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c. $(x-3)^2 = -8(y+2)$

d. $y^2 - 6y + 2x + 11 = 0$

e. $x^2 + 8x - 4y + 16 = 0$

f. $x^2 - 3x + y - \frac{1}{4} = 0$



EJEMPLO 3. DE ELEMENTOS A ECUACIONES

1. Obtención de las ecuaciones (cartesiana y general) a partir de elementos de la parábola.

a. $F(3, 0)$, directriz con ecuación $x = -1$

i. El foco está a la derecha de la directriz, por tanto la ecuación de la parábola es de la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ y se abre a la derecha.

ii. La distancia (mínima) entre la directriz y el foco es 4 unidades por tanto, $V(1, 0)$ y $a = 2$

iii. Con $V(1, 0)$, $a = 2$ y $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ obtenemos la ecuación cartesiana $(y-0)^2 = 8(x-1)$

iv. Desarrollamos, reacomodamos términos en

$(y-0)^2 = 8(x-1)$ y obtenemos la ecuación general

$$y^2 - 8x + 8 = 0$$

v. Otros elementos de la parábola son

$$LR = |4a| = 8 \text{ y}$$

$$F(h+a, k) = F(1+2, 0) = F(3, 0)$$

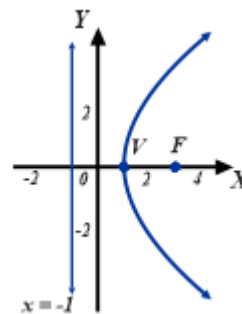


FIGURA 9.

b. $F(-2, 2)$, $a = -3$ y se abre a la izquierda.

i. La forma de la ecuación cartesiana es $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

ii. Vértice:

$$V(h+a, k) = V(-2 - (-3), 2) = V(1, 2)$$

iii. Con los elementos anteriores obtenemos la ecuación cartesiana $(y-2)^2 = -12(x-1)$

iv. Desarrollamos y reacomodamos términos en

$$(y-2)^2 = -12(x-1),$$

obtenemos

$$y^2 - 4y + 4 = -12x + 12, \text{ la ecuación general es}$$

$$y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$$

v. Otros elementos son:

$$\text{Directriz: } x = h - a = 1 - (-3) = 4$$

$$\text{Lado recto: } LR = |4a| = |4(-3)| = 12$$

c. $V(-1, 0)$, directriz con ecuación $y = -4$

La distancia entre la directriz y el vértice es $a = 4$

$$\text{Lado recto: } LR = |4a| = 16$$

Distancia entre vértice y foco: $a = 4$,

por tanto, $F(-1, 4)$

$$\text{Forma cartesiana } (x+1)^2 = 12(y-0)$$

Si $(x+1)^2 = 12(y-0)$, entonces

$$x^2 + 2x + 1 = 12y - 24,$$

o bien,

$$x^2 + 2x - 12y + 4 = 0$$

d. Eje focal vertical, $V(2, 3)$ y $a = -2$

El foco es el punto

$$F(2, 3-2) = F(2, 1)$$

La directriz tiene ecuación $y = 3 - (-2) = 5$

El lado recto mide $LR = |4a| = 8$

$$\text{Forma cartesiana } (x-2)^2 = -8(y-3)$$

Si $(x-2)^2 = -8(y-3)$,

entonces

$$x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$$

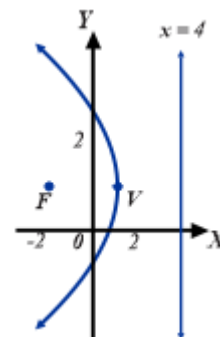


FIGURA 10.

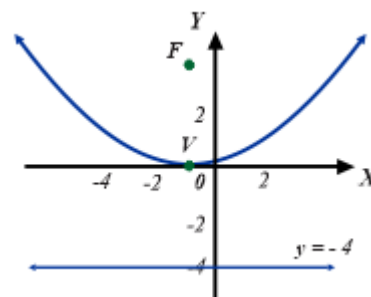


FIGURA 11.

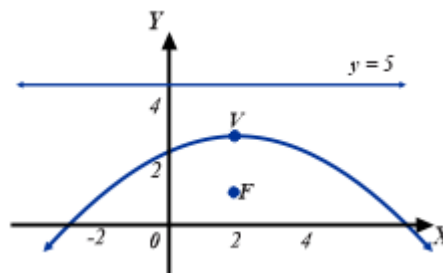


FIGURA 12.



SECCIÓN 4.1 EJERCICIOS 3

1. Obtén las ecuaciones (cartesiana y general) de la parábola, trázala.
 - a. $F(6, 0)$, directriz con ecuación $x = -2$
 - b. Eje focal horizontal, foco $F(-3, 2)$, lado recto de longitud 8 y se abre a la izquierda.
 - c. Eje focal horizontal, $V(2, 4)$ y $a = -2$
 - d. Eje focal vertical, foco $F(0, 6)$, $LR = 12$ y parámetro positivo.
 - e. Eje focal vertical, vértice $V(-2, -2)$, $LR = 3$ y parámetro positivo.
 - f. Abertura abajo, vértice $V(4, 4)$ y $LR = 12$



EJEMPLO 4. DEL PLANO A LAS ECUACIONES Y LOS ELEMENTOS

1. Obtén: las ecuaciones (cartesiana y general) y los elementos de la parábola.
 - a.

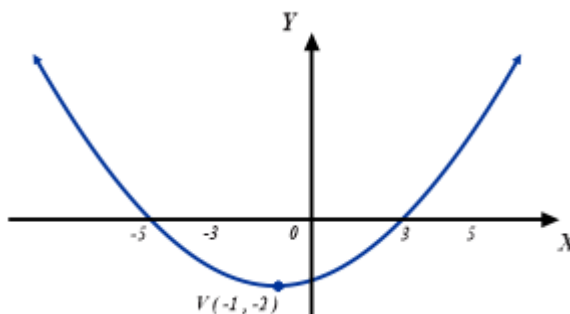


FIGURA 13.

En la figura observamos: $V(-1, -2)$ que contiene al punto $p(3, 0)$ y su eje focal es vertical, por lo que su ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$.

Sustituimos las coordenadas de

$$V(-1, -2) \text{ y } p(3, 0) \text{ en } (x - h)^2 = 4a(y - k)$$

obtenemos

$$(3 - (-1))^2 = 4a(0 - (-2)), \text{ o bien } 16 = 4a \text{ y } a = 4$$

Luego

$$F(h, k + a) = F(-1, -2 + 4) = F(-1, 2)$$

$$LR = |4a| = |4(4)| = 16$$

$$\text{directriz } y = k - a = -2 - 4 = -6$$

Las ecuaciones son:

Cartesiana $(x+1)^2 = 16(y+2)$

General $x^2 + 4x - 16y - 31 = 0$

b.

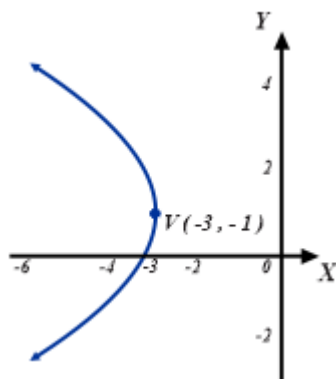


FIGURA 14.

En la figura observamos: $V(-3, -1)$ que la parábola contiene al punto $P\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ y su eje focal es horizontal (se abre a la derecha), por lo que su ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

Sustituimos las coordenadas de

$$V(-3, -1) \text{ y } P\left(-\frac{7}{2}, 0\right) \text{ en } (y-k)^2 = 4a(x-h)$$

obtenemos

$$(0 - (-1))^2 = 4a\left(-\frac{7}{2} - (-3)\right), 1 = 4a\left(-\frac{1}{2}\right), 1 = -2a, \text{ luego } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Así, } F(h+a, k) = F\left(-3 + \left(-\frac{1}{2}\right), -1\right) = F\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$$

$$LR = |4a| = \left|4\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 2$$

$$\text{directriz } x = h - a = -3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

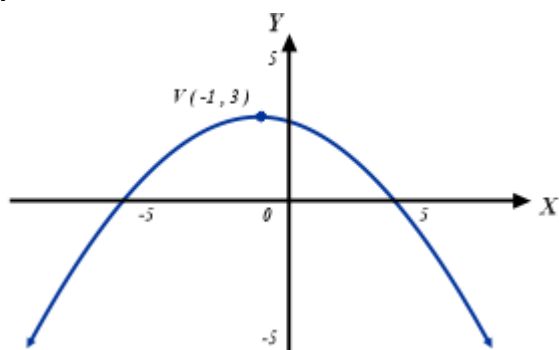
Las ecuaciones son: cartesiana $(y+1)^2 = -\frac{1}{2}(x+3)$

General $y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{5}{2} = 0$

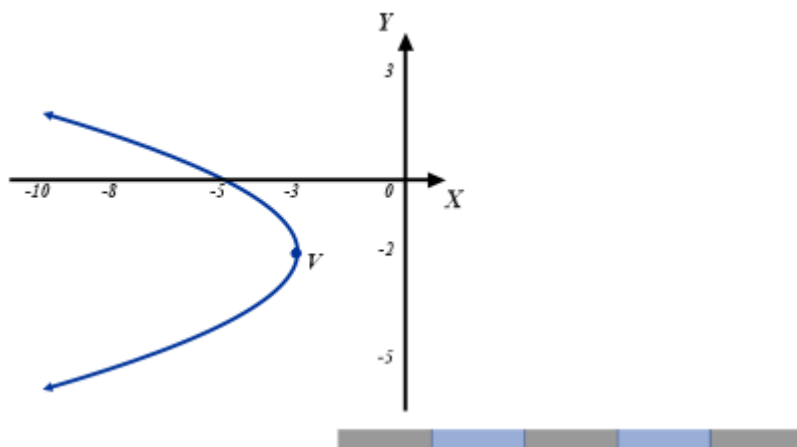
 SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 4

1. Obtén las ecuaciones y elementos de las parábolas.

a.



b.



4.2 PARÁBOLAS EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

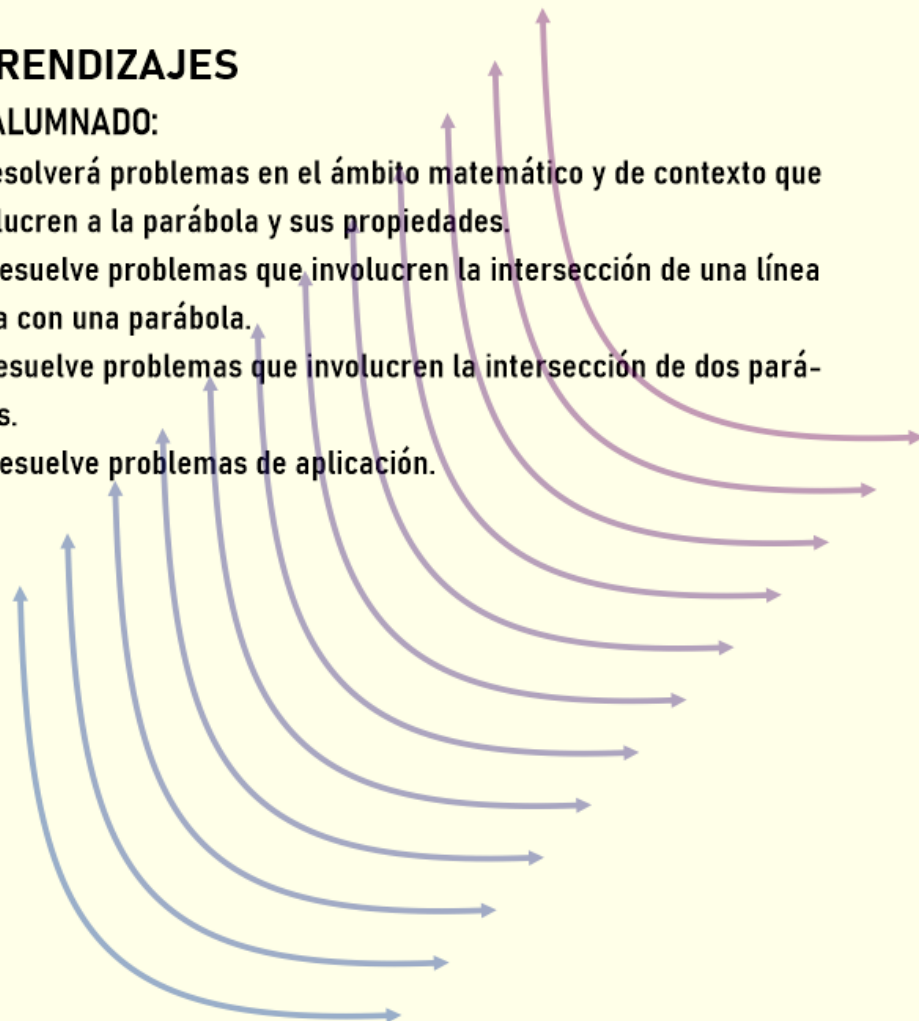
EL ALUMNADO:

2. Resolverá problemas en el ámbito matemático y de contexto que involucren a la parábola y sus propiedades.

10. Resuelve problemas que involucren la intersección de una línea recta con una parábola.

11. Resuelve problemas que involucren la intersección de dos parábolas.

12. Resuelve problemas de aplicación.



Las intersecciones (en caso de existir) entre una parábola y una recta se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones que generan, su resolución generalmente conduce a una ecuación de segundo grado. Esto puede dar como resultado 2, 1 (tangente) o 0 puntos de intersección, observa la **figura 1**.



FIGURA 1.

Por otra parte en el proceso de obtención de los puntos de intersección de parábolas, el sistema que generan se resuelve igualando sus ecuaciones, lo que típicamente resulta en una ecuación de hasta cuarto grado. Esta puede tener hasta 4 soluciones reales, representando los puntos donde las dos curvas se cruzan.



EJEMPLO 1. INTERSECCIONES

1. En caso de existir obtén los puntos de intersección.

a. Entre la parábola $(y - 2)^2 = 4x$ y la línea recta $2x - y - 2 = 0$

Generamos el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} (y - 2)^2 = 4x & \dots 1 \\ 2x - y - 2 = 0 & \dots 2 \end{cases}$$

De la ecuación (2) despejamos y , obtenemos

$y = 2x - 2$ y nombramos (3) a esta ecuación.

Sustituimos $y = 2x - 2$ en la ecuación

$$(y - 2)^2 = 4x$$

obtenemos

$$(2x - 2 - 2)^2 = 4x \Leftrightarrow (2x - 4)^2 = 4x \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 1) = 0,$$

por tanto, $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$

Con $y = 2x - 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ y $y = 2x - 2$

obtenemos

$$y_1 = 2(1) - 2 = 0 \text{ y } y_2 = 2(4) - 2 = 6$$

Los puntos de intersección son $p_1(1, 0)$ y $p_2(4, 6)$

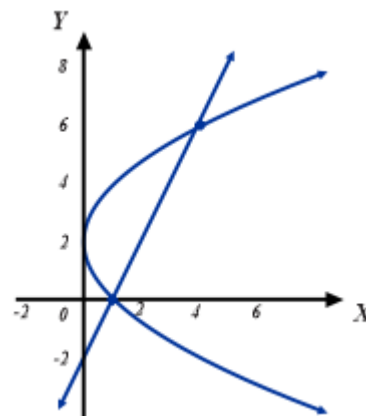


FIGURA 2.

b. Entre la parábola $(x-1)^2 = 3(y+1)$ y la línea recta $x+y=0$

Generamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (x-1)^2 = 3(y+1) & \dots 1 \\ x+y=0 & \dots 2 \end{cases}$ y lo resolvemos.

De la ecuación (2) despejamos y , obtenemos

$y = -x$, nombramos (3) a esta ecuación.

Sustituimos $y = -x$ en la ecuación (1)

$$(x-1)^2 = 3(-x+1)$$

obtenemos

$$x^2 - 2x + 1 = -3x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 1$$

Con

$$x_1 = -2, x_2 = 1 \text{ y } y = -x$$

obtenemos

$$y_1 = -(-2) = 2 \text{ y } y_2 = -(1) = -1$$

Los puntos de intersección son

$p_1(-2, 2)$ y $p_2(1, -1)$

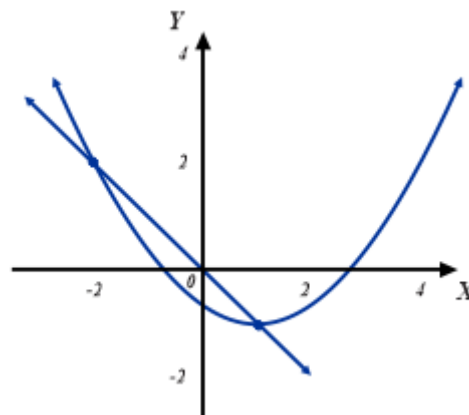


FIGURA 3.

c. Entre la parábola $(y-1)^2 = 4x$ y la línea recta $x+2y+2=0$

Generamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (y-1)^2 = 4x & \dots 1 \\ x+2y+2=0 & \dots 2 \end{cases}$ y lo resolvemos.

De la ecuación (2) despejamos x , obtenemos

$x = -2y - 2$, nombramos (3) a esta ecuación.

Sustituimos

$$x = -2y - 2$$

en la ecuación (1)

$$(y-1)^2 = 4(-2y-2),$$

desarrollamos y obtenemos

$$y^2 - 2y + 1 = -8y - 8$$

$$y^2 + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 = 0,$$

Luego

$$y = -3$$

Con

$$y = -3 \text{ y } x = -2y - 2$$

obtenemos

$$x = -2(-3) - 2 = 4$$

El único punto de intersección es

$p(4, -3)$

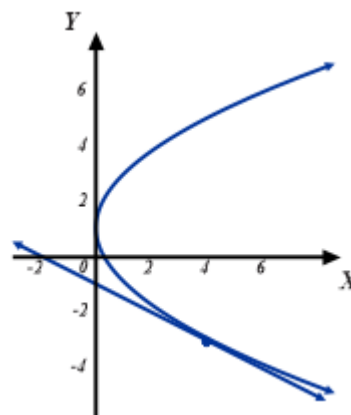


FIGURA 4.

d. De la parábola $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ y la línea recta $2x - 3y = 0$

Generamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 - 4x + 2y + 9 = 0 & \dots 1 \\ 2x - 3y = 0 & \dots 2 \end{cases}$$

y lo resolvemos.

De la ecuación (2) despejamos y , obtenemos

$$y = \frac{2}{3}x, \text{ nombramos (3) a esta ecuación.}$$

Sustituimos $y = \frac{2}{3}x$ en la ecuación (1)

$$\left(\frac{2}{3}x \right)^2 - 4x + 2\left(\frac{2}{3}x \right) + 9 = 0$$

$$\frac{4}{9}x^2 - 4x + \frac{4}{3}x + 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 81 = 0,$$

$$\text{Luego } x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4(4)(81)}}{8} = \frac{24 \pm \sqrt{-72}}{8}$$

$$\text{entonces } x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 648}}{8}, \text{ sin solución (real).}$$

Por tanto no existen puntos de intersección.

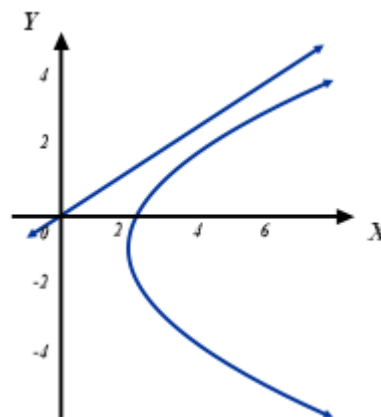


FIGURA 5.

e. Con las parábolas $x^2 - 4y = 0$ y $x^2 - 8y + 16 = 0$

Generamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 0 & \dots 1 \\ x^2 - 8y + 16 = 0 & \dots 2 \end{cases}$$

su solución es:

Multiplicamos la ecuación (1) por

-1 y la

sumamos a la ecuación (2),

obtenemos

$$-4y + 16 = 0,$$

por tanto

$$y = 4$$

Sustituimos $y = 4$ en la ecuación

(1),

$$x^2 - 4(4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = 4$$

Los puntos de intersección son

$$p_1(-4, 4) \text{ y } p_2(4, 4)$$

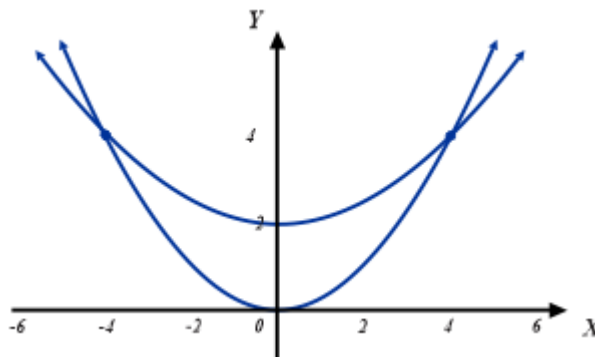


FIGURA 6.

f. De las parábolas con ecuaciones $(y-3)^2 = 4x$ y $(y+1)^2 = -4(x-2)$

En $(y+1)^2 = -4(x-2)$ despejamos $4x$,

$$4x = 8 - (y+1)^2$$

Con $(y-3)^2 = 4x$ y $4x = 8 - (y+1)^2$,

obtenemos, $(y-3)^2 = 8 - (y+1)^2$

Desarrollamos $(y-3)^2 = 8 - (y+1)^2$,

$$y^2 - 6y + 9 = 8 - y^2 - 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2y^2 - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y-1)^2 \Leftrightarrow y = 1$$

Sustituimos $y = 1$ en $4x = 8 - (y+1)^2$,

$$4x = 8 - (1+1)^2 \Leftrightarrow 4x = 8 - 4$$

$$4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

El (único) punto de intersección es

$$A(1, 1)$$

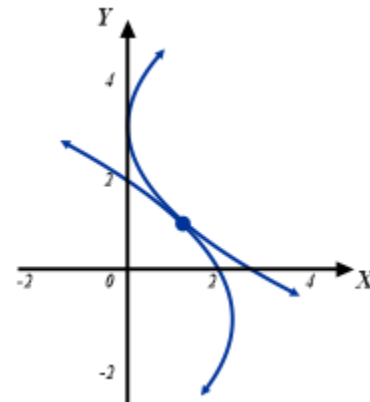


FIGURA 7.



SECCIÓN 4.2 EJERCICIOS 1

1. Determina los puntos de intersección de las curvas asociadas.

a. $(x-1)^2 = 5y$ (parábola) y $x + y - 1 = 0$ (línea recta).

b. $y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ (parábola) y $2x + 2y - 3 = 0$ (línea recta).

c. $x^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ (parábola) y $x - y + 4 = 0$ (línea recta).

2. Obtén los puntos de intersección de las parábolas.

a. $y^2 - 4x + 4 = 0$ y $y^2 + 2x - 2 = 0$

b. $(y-2)^2 = -5(x-1)$ y $(y-2)^2 = x-1$

c. $x^2 + 2x + y = 0$ y $x^2 + 6x - y = 0$

Ecuación de la línea recta tangente a una parábola. Para obtener la ecuación de la *línea recta tangente* a una parábola aplicaremos su propiedad geométrica:

“los puntos de una parábola equidistan de su foco y de su directriz”,

además:

1. El punto de tangencia T de una parábola y una línea recta, pertenece a ambas curvas.
2. Los segmentos de recta FT y DT son congruentes, por tanto, el triángulo FTD es isósceles.
3. Si M representa el punto medio del lado DF , entonces, la mediatriz MT es tangente a la parábola.

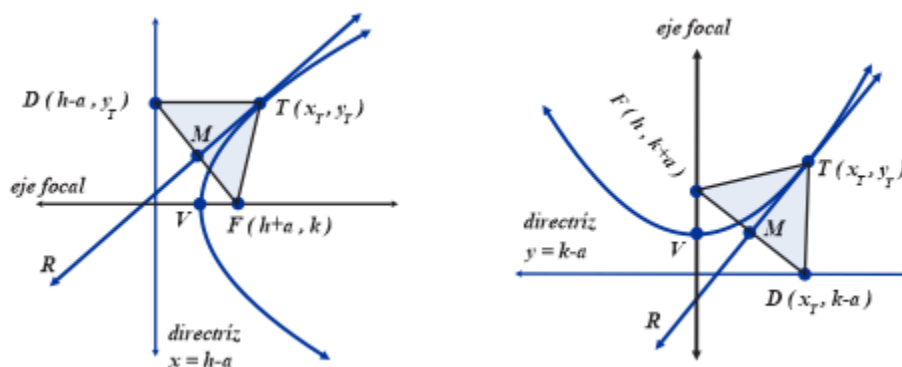


FIGURA 8.

PARÁBOLA CON EJE FOCAL HORIZONTAL: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

- a. Punto de tangencia $T(x_T, y_T)$
- b. Foco: $F(h+a, k)$
- c. Proyección del punto de tangencia en la directriz $D(h-a, y_T)$
- d. Punto medio M del segmento rectilíneo $\overline{FD}$ $M\left(h, \frac{y_T+k}{2}\right)$
- e. La línea recta tangente contiene a los puntos $M\left(h, \frac{y_T+k}{2}\right)$ y $T(x_T, y_T)$

PARÁBOLA CON EJE FOCAL VERTICAL: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

- a. Punto de tangencia $T(x_T, y_T)$
- b. Foco: $F(h, k+a)$
- c. Proyección de punto de tangencia en la directriz $D(x_T, k-a)$
- d. Punto medio M del segmento rectilíneo $\overline{FD}$ $M\left(\frac{x_T+h}{2}, k\right)$
- e. La línea recta tangente contiene a los puntos $M\left(\frac{x_T+h}{2}, k\right)$ y $T(x_T, y_T)$

**EJEMPLO 2. LA LÍNEA RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA**

Obtén la ecuación general de la línea recta tangente a la parábola en el punto señalado.

a. $(x+1)^2 = -4(y+1)$ en $T(3, -5)$

En este caso $V(-1, -1)$, $h=-1$, $k=-1$ y $a=-1$, por tanto:

i. $F(h, k+a) = F(-1, -1+(-1)) = F(-1, -2)$

ii. $D(x_T, k-a) = D(3, -1-(-1)) = D(3, 0)$

iii. $M\left(\frac{x_T+h}{2}, k\right) = M\left(\frac{3+(-1)}{2}, -1\right) = M(1, -1)$

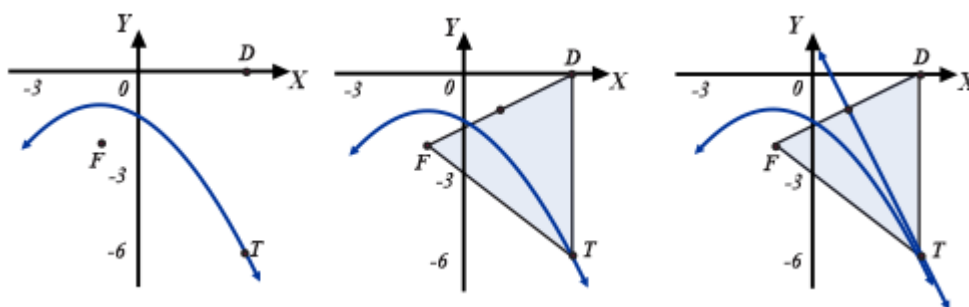


FIGURA 9.

iv. La ecuación de la línea recta tangente contiene a los puntos $M(1, -1)$ y $T(3, -5)$,

entonces $y - (-1) = \frac{-5 - (-1)}{3 - 1}(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -2x + 2$

La ecuación general de la línea recta tangente es $2x + y - 1 = 0$

b. Si $(y-1)^2 = 4(x-2)$ en $T(6, -3)$

$V(2, 1)$, $h=2$, $k=1$ y $a=1$, por tanto:

i. $F(h+a, k) = F(2+1, 1) = F(3, 1)$

ii. $D(h-a, y_T) = D(2-1, -3) = D(1, -3)$

iii. $M\left(h, \frac{y_T+k}{2}\right) = M\left(2, \frac{-3+1}{2}\right) = M(2, -1)$

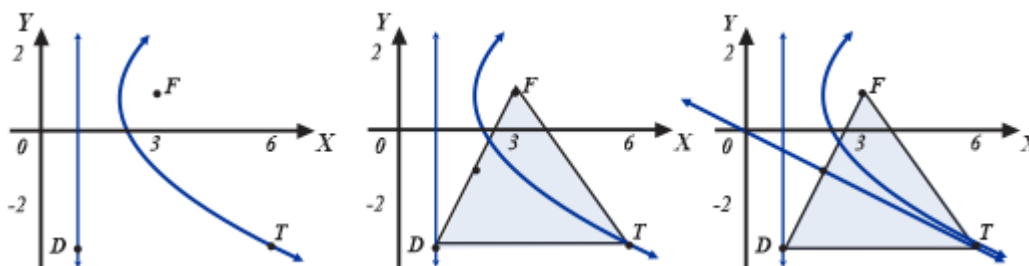


FIGURA 10.

iv. La ecuación general de la línea recta tangente contiene a los puntos $M(2, -1)$ y $T(6, -3)$, entonces

$$y - (-1) = \frac{-3 - (-1)}{6 - 2}(x - 2) \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow 2y + 2 = -x + 2$$

La línea recta tangente tiene ecuación general $x + 2y = 0$



SECCIÓN 4.2 EJERCICIOS 2

1. Calcula la ecuación general de la línea recta tangente.

- a. $x^2 - y - 1 = 0$ en $T(2, 3)$
- b. $(x - 2)^2 = y + 1$ en $T(3, 0)$
- c. $(y - 2)^2 = x - 2$ en $T(3, 3)$



Parábolas, arcos parabólicos, secciones de parábolas y superficies parabólicas se utilizan en el diseño de estructuras arquitectónicas y en el estudio de ciertos fenómenos naturales.



FIGURA 11.

En arquitectura:

Sostenes de puentes colgantes y techos con sección transversal o longitudinal parabólica, también, túneles, puertas y ventanas presentan formas de sección (longitudinales o transversales) parabólica.

En ciencias e ingeniería:

Trayectorias de objetos, chorros de agua, pueden modelarse por medio de secciones de parábola. Emisores y recetores (espejos, lentes, radares, reflectores, concentradores de energía etcétera) incluyen secciones de parábola.


EJEMPLO 3. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELACIONADOS CON LA PARÁBOLA

a. El cable de un puente colgante tiene forma de arco parabólico. La parte de la carretera sustituida por el puente, es horizontal, mide 100 metros y está suspendida por tirantes verticales unidos al cable; el tirante más largo mide 30 metros y el más corto mide 8 metros. Calcula la longitud del tirante que se encuentra a 20 metros del centro.

i. La **figura 12.** presenta un modelo del problema y lo relaciona con una parábola con eje focal vertical $(x-h)^2 = 4a(y-k)$.

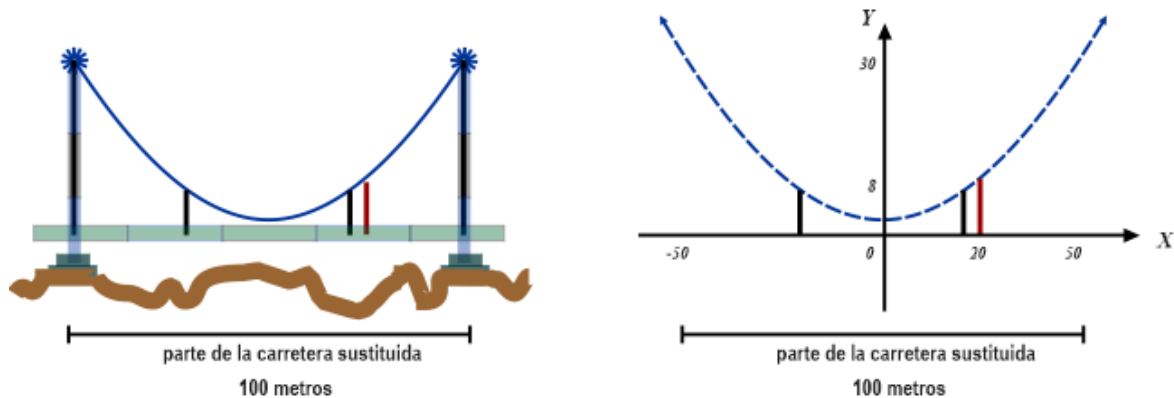


FIGURA 12.

ii. La parábola de la que forma parte la sección transversal puente tiene vértice $V(3, 0)$, contiene a los puntos

$$p(50, 30) \text{ y } r(20, h), \text{ en este último punto } h,$$

representa la longitud del tirante.

iii. Si sustituimos $V(3, 0)$ y $p(50, 30)$ en $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, obtenemos el valor de a .

$$(50-3)^2 = 4a(30-0) \Leftrightarrow 2500 = 120a \Leftrightarrow a = \frac{125}{6}$$

iv. Con $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, $V(3, 0)$, $a = \frac{125}{6}$ y $r(20, h)$

obtenemos

$$(20-3)^2 = \frac{500}{6}(h-0), \text{ o bien } h = 6 \frac{400}{500} = 4.8 \text{ metros.}$$

b. La sección longitudinal de un túnel es un arco parabólico, su ancho mide 4 metros y su altura 3 metros. Calcula la altura máxima que debe tener un camión de 1.6 metros de ancho para no atorarse al pasar.

i. La **figura 13.** muestra el arco parabólico del túnel y el camión; lo relaciona con la parábola con eje focal vertical $(x-0)^2 = 4a(y-3)$

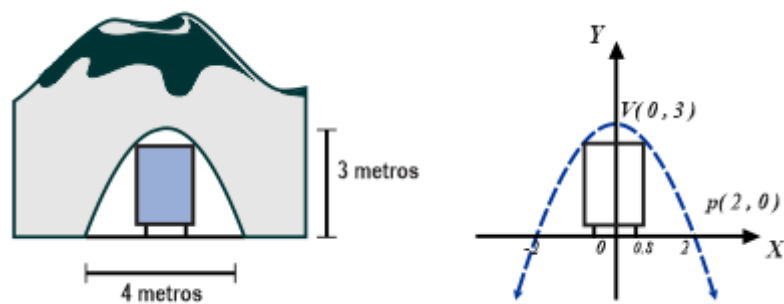


FIGURA 13.

ii. Si $p(2, 0)$ pertenece a la parábola anterior,

$$(2-0)^2 = 4a(0-3) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, la ecuación cartesiana de la sección parabólica cumple

$$(x-0)^2 = -\frac{4}{3}(y-3)$$

iii. Si $x = 2$, entonces

$$(2-0)^2 = -\frac{4}{3}(y-3) \Leftrightarrow -3 = 4(y-3)$$

y la altura del camión debe ser a lo más

$$y = 3 + \frac{3}{4} = 3.75 \text{ metros}$$

c. Una antena tiene forma de superficie parabólica con 30 centímetros de radio y altura de 20 centímetros. ¿En qué posición debe colocarse el receptor de ondas para que los rayos que recibe y que refleja la cara plateada sean paralelos al eje focal?

i. La **figura 14**. muestra un arco parabólico de la antena su relación con la parábola con eje focal vertical

$$(x-0)^2 = 4a(y-0)$$

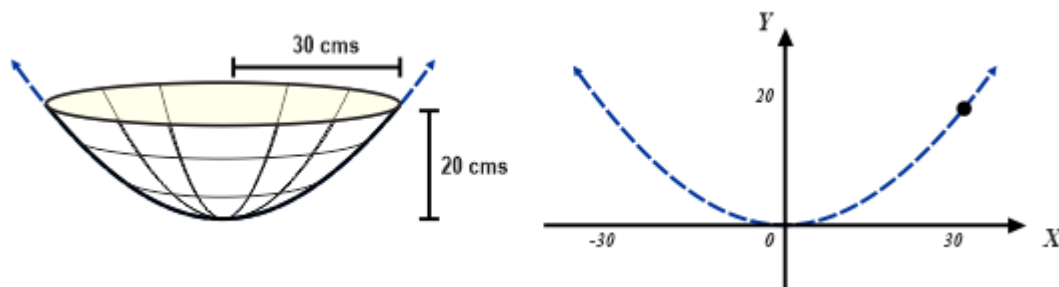


FIGURA 14.

ii. El $p(30, 20)$ pertenece a la parábola anterior $(x-0)^2 = 4a(y-0)$, por tanto

$$(30-0)^2 = 4a(20-0) \text{ y también } a = \frac{9}{8},$$

el foco de la parábola es

$$V\left(30, 0 + \frac{90}{8}\right) = V(30, 11.25)$$

iii. El receptor de ondas debe colocarse en el foco, es decir

$$h = 11.25 \text{ metros arriba del vértice.}$$

d Un tanque tiene forma de superficie parabólica. Cuando el nivel de cierto líquido alcanza una altura de 18 metros, su ancho mide 12 metros. Si el nivel del líquido desciende a 6 metros, calcula el nuevo ancho del nivel del líquido.

i. La **figura 15.** muestra la superficie parabólica y las alturas del líquido respecto a su vértice y la parábola con eje focal vertical $(x-0)^2 = 4a(y-0)$

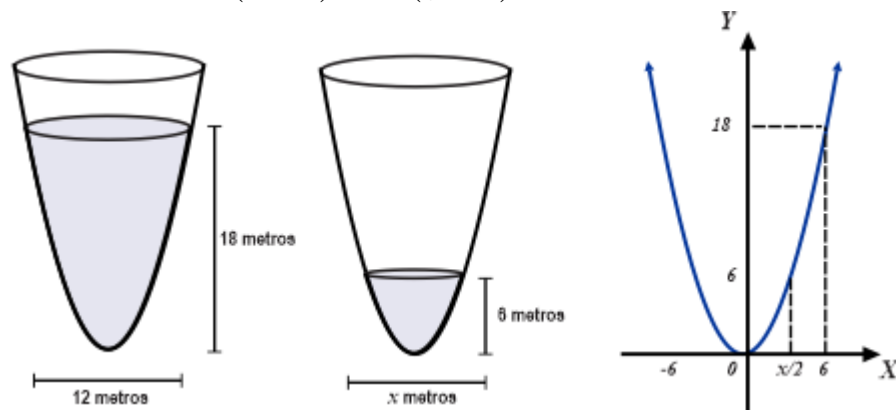


FIGURA 15.

ii. Con el punto

$$r(6, 18) \text{ y } (x-0)^2 = 4a(y-0)$$

obtenemos

$$(6-0)^2 = 4a(18-0) \text{ o bien } 6^2 = 4a(18) \text{ y también } a = \frac{1}{2}$$

iii. La ecuación de la sección parabólica es

$$(x-0)^2 = 2(y-0)$$

Si $y = 6$, entonces

$$x^2 = 2(6) \text{ y } x = \sqrt{12}$$

iv. El ancho del nivel del líquido es $2\sqrt{12}$ metros.

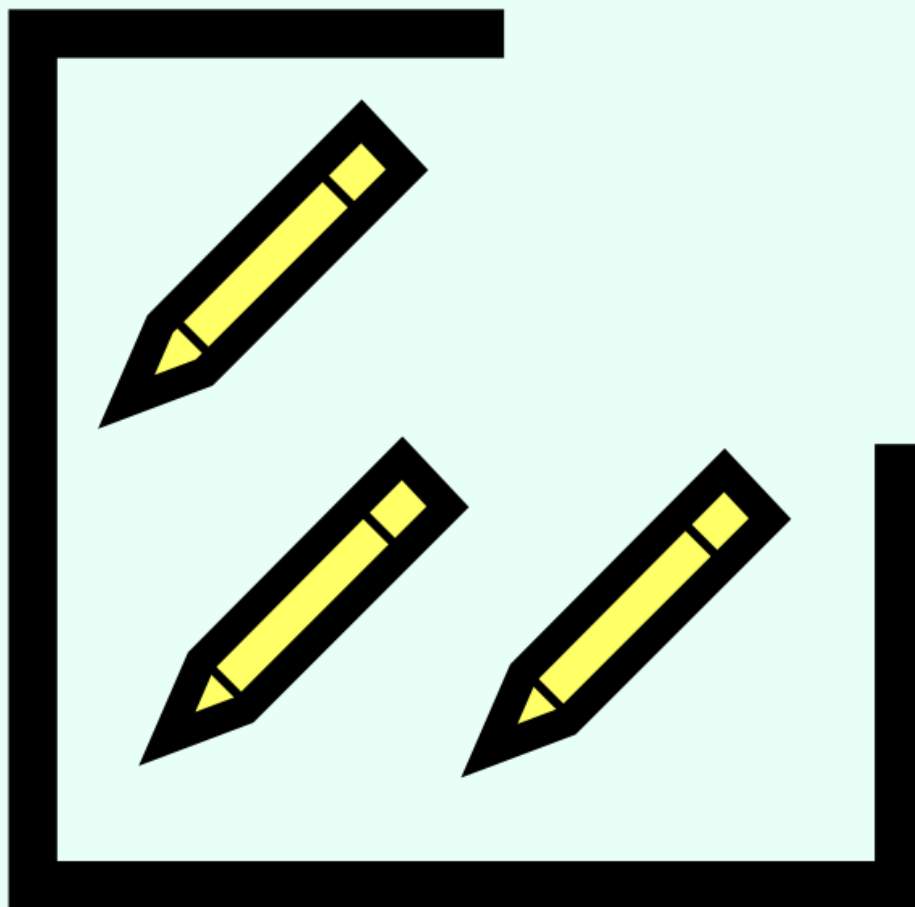
**SECCIÓN 4.2**
EJERCICIOS 3

1.

- a.** El límite entre dos bodegas es un arco parabólico con base de longitud 2.5 metros y altura de 3 metros. Se pretende transportar una caja cúbica de longitud de lado 2 metros de una de las bodegas a la otra. ¿Es posible transportar la caja de una bodega a la otra?, supón condiciones normales (no se puede inclinar el bloque, romper el bloque, etcétera).
- b.** La sección longitudinal de un puente tiene forma de arco parabólico con eje focal vertical, su base mide 18 metros y su punto más alto se encuentra a 6 metros de su base. El puente se reforzará con una viga paralela a la base del puente y a un metro de su punto de mayor altura, ¿qué longitud debe tener la viga?
- c.** Las dos torres que sostienen un puente colgante (con sección longitudinal parabólica) miden 20 metros y están separadas 200 metros. El puntal de sostén del puente más corto mide 2 metros, calcula la altura de otro puntal que colocado a 50 metros del centro del puente.
- d.** Un reflector tiene forma de superficie parabólica, su emisor está colocado en su foco. La mayor de las secciones longitudinales es 30 centímetros y profundidad 12 centímetros. Calcula la distancia entre el punto más profundo y el emisor del reflector.



4.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1**

1.

a. $y^2 + 6y + 9 = 0$ o también $y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right)$

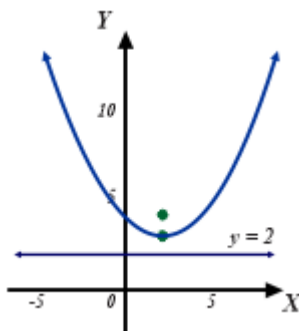
b. $x^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ o también $(x - 2)^2 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)$

c. $x^2 + 8y + 16 = 0$ o también $x^2 = -8(y + 2)$

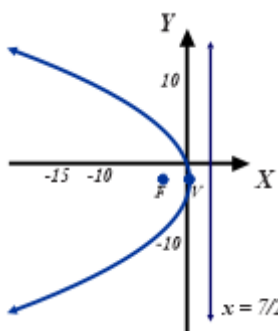
**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 2**

1.

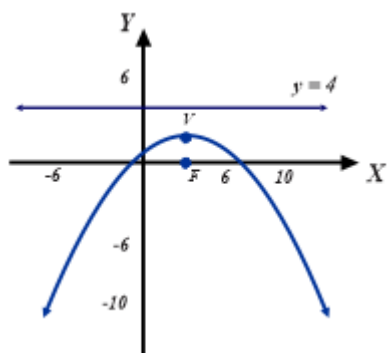
a. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$, $V(2, 3)$, $F(2, 4)$, Directriz $y = 2$, $LR = 4$



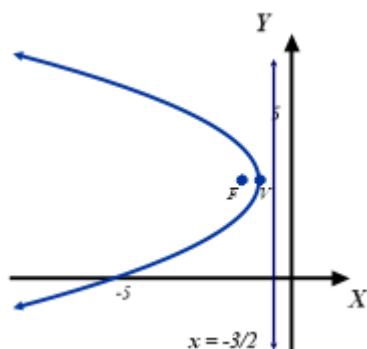
b. $y^2 + 12x + 4y - 2 = 0$, $V\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $F\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, directriz $x = \frac{7}{2}$, $LR = 12$



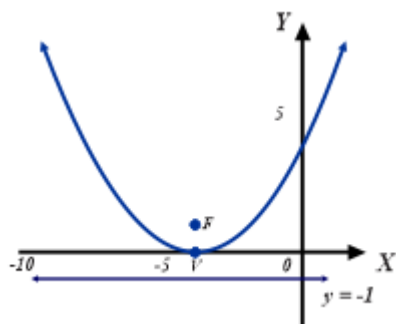
c. $x^2 - 6x + 8y - 7 = 0$, $V(3, 2)$, $F(3, 0)$, directriz $y = 4$, $LR = 8$



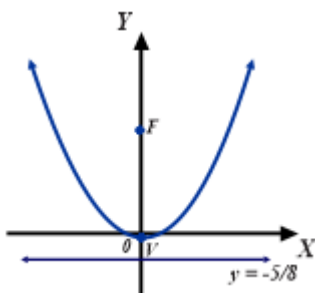
d. $(y-3)^2 = -2(x+1)$, $V(-1, 3)$, $F\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, directriz $x = -\frac{1}{2}$, $LR = 2$



e. $(x+4)^2 = 4y$, $V(-4, 0)$, $F(-4, 1)$, directriz $y = -1$, $LR = 4$



f. $x^2 = 2\left(y + \frac{1}{8}\right)$, $V\left(0, -\frac{1}{8}\right)$, $F(0, 3)$, directriz $y = -5/8$, $LR = 2$

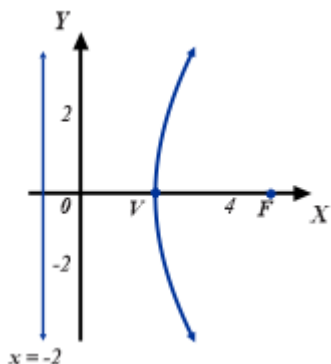




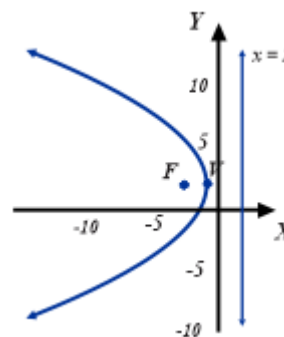
SOLUCIONES

SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 3

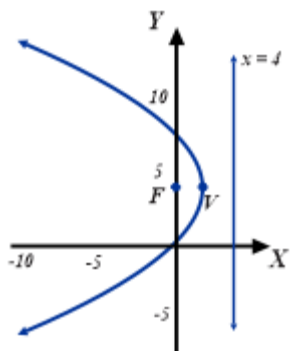
a. $y^2 = 16(x - 2)$ y $y^2 - 16x + 32 = 0$,
 $V(2, 0)$, $a = 4$, $LR = 16$



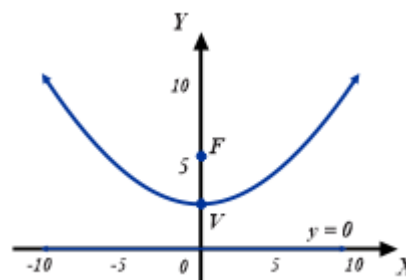
b. $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$ y
 $y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$, $V(-1, 2)$,
 $a = -2$, $LR = 16$ y directriz $x = 1$



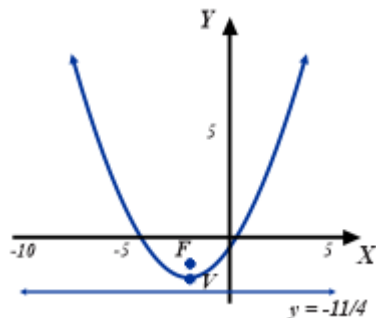
c. $F(0, 4)$, $a = -2$, $LR = 8$ y directriz $x = 4$
 $(y - 4)^2 = -8(x - 2)$ y $y^2 + 8x - 8y = 0$



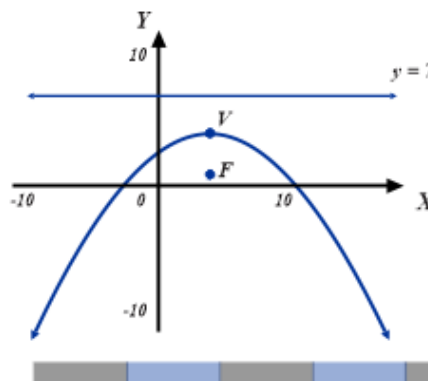
d. $x^2 = 12(y - 3)$ y $x^2 - 12y + 36 = 0$
 $V(0, 3)$, $F(0, 6)$, $LR = 12$ y
directriz $y = 0$



e. $(x + 2)^2 = 3(y + 2)$ y $x^2 + 4x - 3y - 2 = 0$
 $F(-2, -5/4)$, $LR = 3$ y directriz $y = -11/4$



f. $(x - 4)^2 = -12(y - 4)$ y
 $x^2 - 8x + 12y - 32 = 0$
 $F(4, 1)$, $LR = 12$ y directriz $y = 7$



**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 4**

1.

a. $(x+1)^2 = -8(y-3)$, $x^2 + 2x + 8y - 23 = 0$, $V(-1, 3)$ $F(-1, 1)$, $LR = 8$ y directriz $y = 5$

b. $(y+2)^2 = -2(x+3)$ $y^2 + 2x + 4y + 10 = 0$, $V(-3, -2)$ $F(-7/2, -2)$, $LR = 2$ y directriz $x = -5/2$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 1**

1.

a. $I_1(-4, 5)$ y $I_2(1, 0)$

b. $I_1(1/2, 1)$ y $I_2(5/2, -1)$

c. $I_1(-1, 3)$ y $I_2(5/2 - 3, 1)$

2.

a. $I(1, 0)$ (tangente).

b. $I(1, 2)$

c. $I_1(0, 0)$ y $I_2(-4, -8)$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 2**

1.

a. $4x - y - 5 = 0$

b. $2x - y - 6 = 0$

c. $x - 2y + 3 = 0$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 3**

1. a. La caja no pasa.

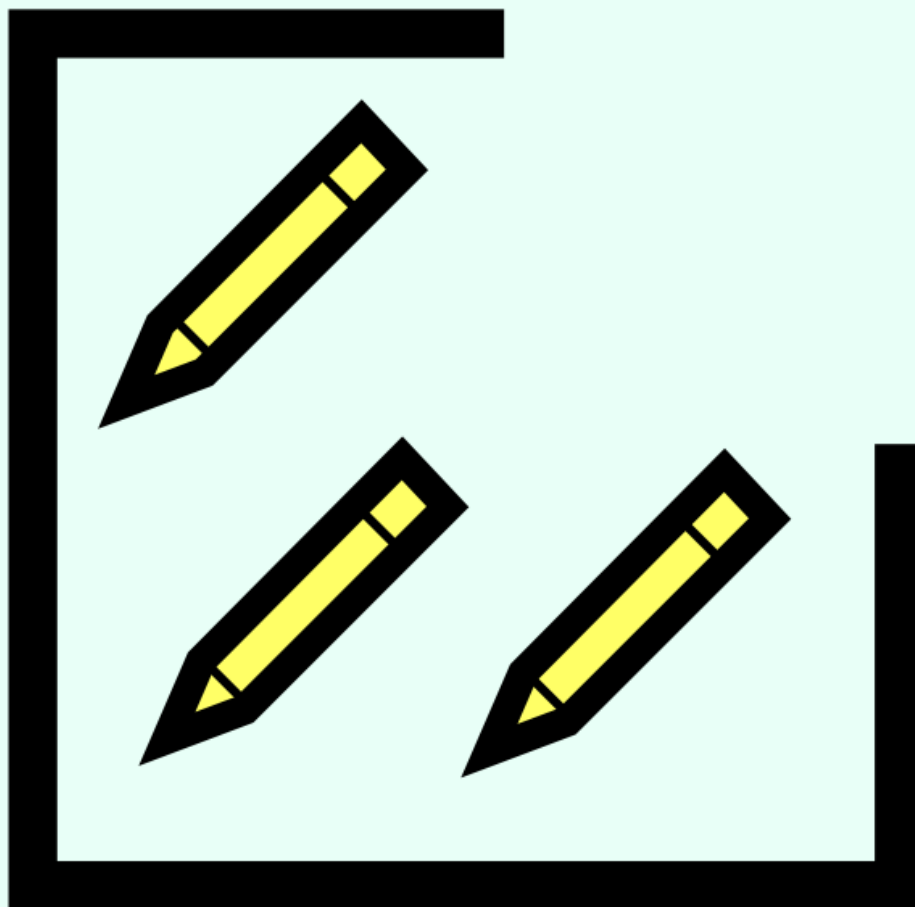
b. La longitud de la viga debe ser $L = 2(1.84) = 3.68$ metros.

c. 6.5 metros de altura.

d. $\frac{75}{16}$ centímetros.



4.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1**

1.

a. $y^2 + 6y + 9 = 0$ o también $y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right)$

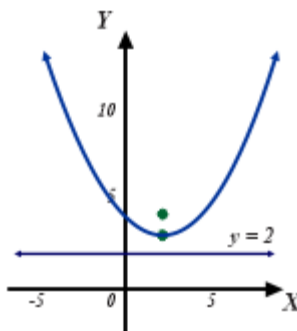
b. $x^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ o también $(x - 2)^2 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)$

c. $x^2 + 8y + 16 = 0$ o también $x^2 = -8(y + 2)$

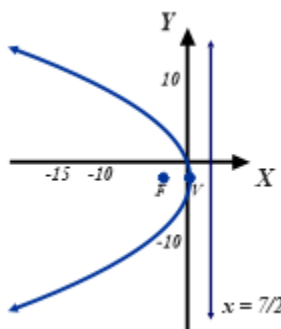
**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 2**

1.

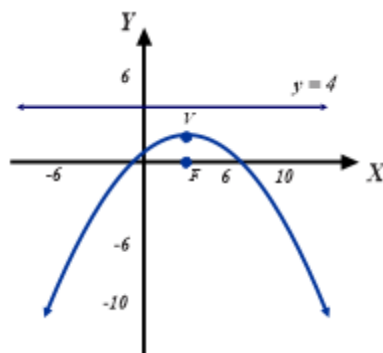
a. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$, $V(2, 3)$, $F(2, 4)$, Directriz $y = 2$, $LR = 4$



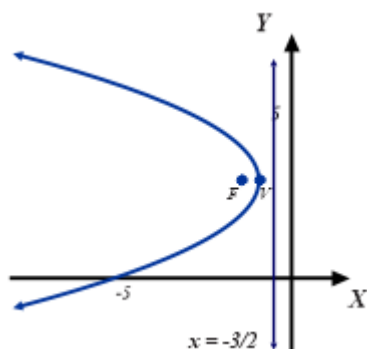
b. $y^2 + 12x + 4y - 2 = 0$, $V\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $F\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, directriz $x = \frac{7}{2}$, $LR = 12$



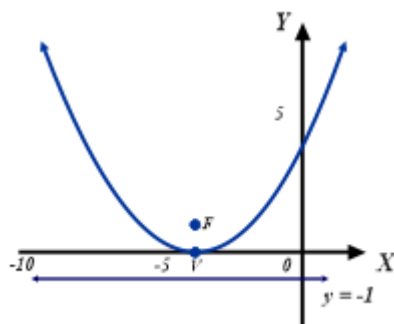
c. $x^2 - 6x + 8y - 7 = 0$, $V(3, 2)$, $F(3, 0)$, directriz $y = 4$, $LR = 8$



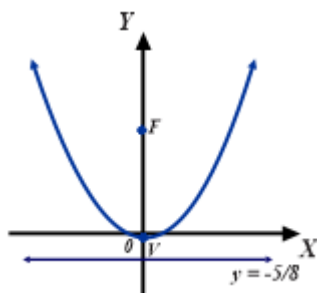
d. $(y-3)^2 = -2(x+1)$, $V(-1, 3)$, $F\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, directriz $x = -\frac{1}{2}$, $LR = 2$



e. $(x+4)^2 = 4y$, $V(-4, 0)$, $F(-4, 1)$, directriz $y = -1$, $LR = 4$



f. $x^2 = 2\left(y + \frac{1}{8}\right)$, $V\left(0, -\frac{1}{8}\right)$, $F(0, 3)$, directriz $y = -5/8$, $LR = 2$

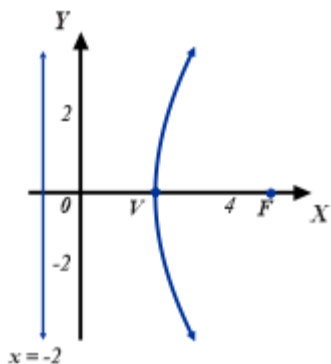




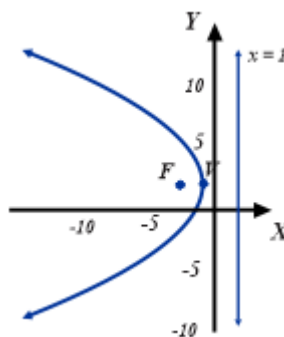
SOLUCIONES

SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 3

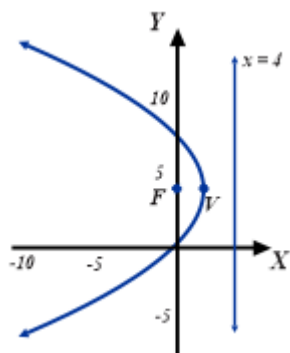
a. $y^2 = 16(x - 2)$ y $y^2 - 16x + 32 = 0$,
 $V(2, 0)$, $a = 4$, $LR = 16$



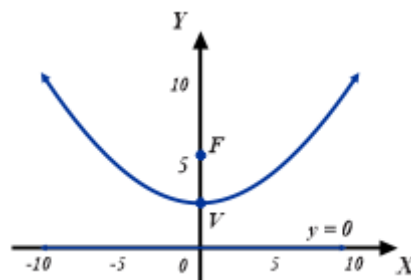
b. $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$ y
 $y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$, $V(-1, 2)$,
 $a = -2$, $LR = 16$ y directriz $x = 1$



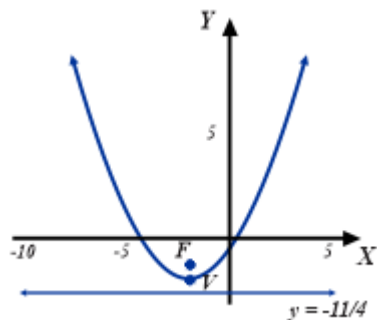
c. $F(0, 4)$, $a = -2$, $LR = 8$ y directriz $x = 4$
 $(y - 4)^2 = -8(x - 2)$ y $y^2 + 8x - 8y = 0$



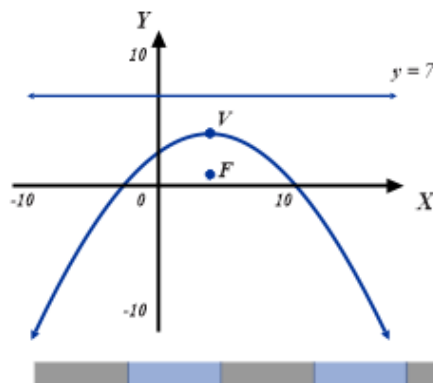
d. $x^2 = 12(y - 3)$ y $x^2 - 12y + 36 = 0$
 $V(0, 3)$, $F(0, 6)$, $LR = 12$ y
directriz $y = 0$



e. $(x + 2)^2 = 3(y + 2)$ y $x^2 + 4x - 3y - 2 = 0$
 $F(-2, -5/4)$, $LR = 3$ y directriz $y = -11/4$



f. $(x - 4)^2 = -12(y - 4)$ y
 $x^2 - 8x + 12y - 32 = 0$
 $F(4, 1)$, $LR = 12$ y directriz $y = 7$



**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 4**

1.

a. $(x+1)^2 = -8(y-3)$, $x^2 + 2x + 8y - 23 = 0$, $V(-1, 3)$ $F(-1, 1)$, $LR=8$ y directriz $y=5$

b. $(y+2)^2 = -2(x+3)$ $y^2 + 2x + 4y + 10 = 0$, $V(-3, -2)$ $F(-7/2, -2)$, $LR=2$ y directriz $x=-5/2$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 1**

1.

a. $I_1(-4, 5)$ y $I_2(1, 0)$

b. $I_1(1/2, 1)$ y $I_2(5/2, -1)$

c. $I_1(-1, 3)$ y $I_2(5/2-3, 1)$

2.

a. $I(1, 0)$ (tangente).

b. $I(1, 2)$

c. $I_1(0, 0)$ y $I_2(-4, -8)$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 2**

1.

a. $4x - y - 5 = 0$

b. $2x - y - 6 = 0$

c. $x - 2y + 3 = 0$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 3**

1. a. La caja no pasa.

b. La longitud de la viga debe ser $L = 2(1.84) = 3.68$ metros.

- c. 6.5 metros de altura.
- d. $75/16$ centímetros.





UNIDAD 4 EXAMEN

CONCEPTOS (completa el espacio)

1. Proporciona la definición de parábola como lugar geométrico.

2. ¿Qué es un arco parabólico?

3. ¿Una parábola es simétrica respecto a?

4. ¿Cuál es el papel que desempeña el parámetro de una parábola?

5. Define lado recto de una parábola, ¿cómo se calcula su longitud?

6. Señala la condición que debe cumplir el sistema de ecuaciones determinado por la ecuación de una línea recta y de una parábola para que éstas curvas sean tangentes

7. Señala la propiedad óptica de la parábola.

8. ¿Qué condiciones geométricas cumple la línea recta tangente a una parábola?

DESARROLLOS OPERATIVOS

9. Determina todos los elementos de la parábola con ecuación

$$y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$$

10. Calcula la ecuación (general) del lugar geométrico formado por el conjunto de puntos que equidistan de $F(2, 0)$ y la línea recta con ecuación $x = 0$.

11. Obtén la ecuación de la línea recta que es tangente a la parábola con ecuación

$$x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$$

en el punto

$$P(2, -2)$$

12. Obtén los puntos de intersección entre las parábolas con ecuaciones

$$y^2 + 2x - 6 = 0 \text{ y } y^2 - 2x + 4 = 0$$

PARA PENSAR

13. Los extremos del lado recto son los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(3, 2)$, su vértice es $V(1, -2)$ obtén su ecuación general.

14. Una antena tiene forma de superficie parabólica, su diámetro mide 10 metros. Las señales que recibe las concentra en su foco. Si la distancia focal es 2 metros, calcula la profundidad de la superficie parabólica.

ESCALA

Preguntas 1 a 8., un punto cada una.

Problemas 9. a 12., dos puntos cada uno.

Problemas 13. a 14., cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 13 puntos

UNIDAD 4 SOLUCIONES AL EXAMEN



CONCEPTOS

1. Conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a la misma distancia de una línea recta (fija) llamada directriz y un punto fijo llamado foco.
2. Parte de la parábola limitada por dos de sus puntos.
3. Respecto a su eje focal.
4. Si su magnitud aumenta la abertura de la parábola se incrementa y se aproxima a una línea recta perpendicular a su eje focal.
5. La cuerda que contiene al foco y es perpendicular al eje focal de la parábola.
6. Tener una sola solución.
7. “Los rayos emergentes del foco de una parábola se reflejan en ella paralelos a su eje de simetría. Inversamente, los rayos provenientes de una fuente lejana y que son paralelos al eje de simetría de una parábola, al incidir en ella se concentran en el foco”.
8. Es mediatriz del segmento rectilíneo con extremos en el foco y la directriz y a la vez es perpendicular a esta última línea.



DESARROLLOS OPERATIVOS

8. Forma ordinaria $(y - 1)^2 = 4(x - 1)$,
 $F(-2, 1)$, $V(-1, 1)$,
 Directriz $x = 0$, eje de simetría $y = 1$, lado recto $LR = 4$
9. $y^2 - 4x + 4 = 0$
10. $2x + y - 2 = 0$
11. $P_1\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y $P_2\left(\frac{3}{2}, -1\right)$



PARA PENSAR

12. $x^2 - 2x - 8y - 15 = 0$

13. $\frac{25}{8}$ metros.



UNIDAD 5. LA CIRCUNFERENCIA LA ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumnado:

Obtendrá las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse, así como sus gráficas, dado cualquier conjunto de elementos definitorios y viceversa.

Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

CONTENIDO

SECCIÓN 5.1 Ecuaciones y elementos de la circunferencia en el plano cartesiano.

SECCIÓN 5.2 Ecuaciones y elementos de la elipse en el plano cartesiano.

SECCIÓN 5.3 Soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 5.4 Evaluación de la unidad.



CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano que satisfacen cierta condición.

Circunferencia. Conjunto de todos los puntos del plano cartesiano que equidistan de un punto fijo (también del plano cartesiano).

Elipse. Conjunto de todos los puntos del plano cartesiano tales que la distancia a dos puntos fijos es constante.

Eje focal. Segmento rectilíneo con extremos en los vértices de la elipse.

Distancia focal. Longitud del segmento rectilíneo que contiene a los focos y tiene extremos en los vértices de la elipse.

Línea recta normal. Línea recta perpendicular a la línea recta tangente a una curva, contiene el punto de tangencia.

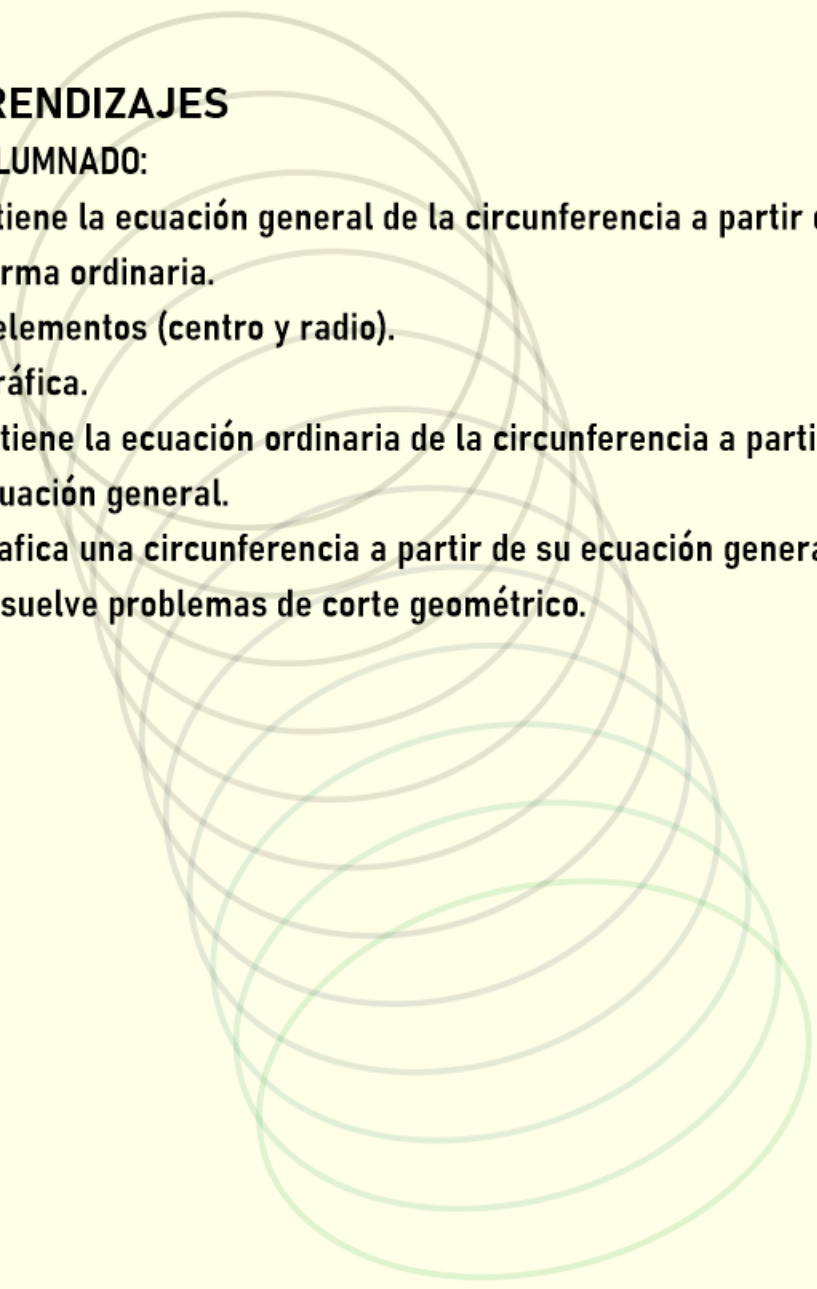
Propiedad óptica de la elipse. Señala que todo rayo que emerge (incide) de uno de los focos de la elipse se refleja (proviene) en ella en dirección al otro foco.

Excentricidad de la elipse. Número que mide que tan “alargada” o próxima a una circunferencia, se encuentra una elipse.

5.1 ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO CARTESIANO.

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

1. Obtiene la ecuación general de la circunferencia a partir de:
La forma ordinaria.
Sus elementos (centro y radio).
Su gráfica.
 2. Obtiene la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de la ecuación general.
 3. Grafica una circunferencia a partir de su ecuación general.
 4. Resuelve problemas de corte geométrico.
- 

En el plano cartesiano, el lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (llamado centro) se llama circunferencia.

DEFINICIÓN 1. (CIRCUNFERENCIA)

a. Al lugar geométrico del conjunto de todos puntos p , en el plano cartesiano, que equidistan del punto fijo (también en el plano cartesiano) C se llama circunferencia, formalmente

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(p, C) = r, r \geq 0 \right\}$$

b. El punto fijo C se llama *centro* y la distancia r , entre el punto fijo C y los puntos p se llama *radio*.

La circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio con longitud r tiene asociadas dos ecuaciones.

DEFINICIÓN 2. (ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA)

Sea una **circunferencia** con centro $C(h, k)$ y radio $r \geq 0$, entonces:

a. Su ecuación cartesiana $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

b. Su ecuación general es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, si $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F \geq 0$



EJEMPLO 1. ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

1. Ecuaciones (cartesiana y general) de circunferencias conocidos sus elementos.

a. Centro

$$C\left(-2, \frac{1}{4}\right) \text{ y radio } r = 1$$

Su ecuación cartesiana es

$$(x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1^2$$

Ecuación general, desarrollamos la anterior,

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = 1,$$

o bien

$$x^2 + y^2 + 4x - \frac{1}{2}y + \frac{49}{16} = 0$$

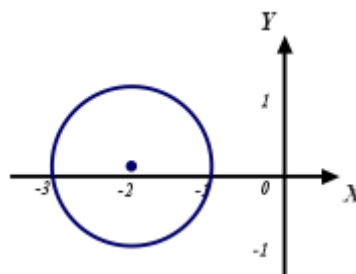


FIGURA 1.

b. Centro en

$C(2, -2)$ y radio $r = 2$

Ecuación cartesiana

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2^2$, desarrollamos
y obtenemos

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 4,$$

entonces

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$

es su ecuación general.

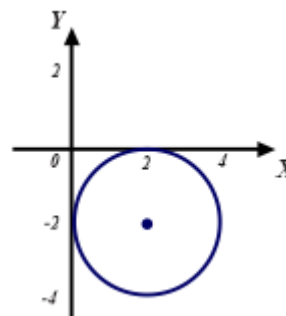


FIGURA 2.

2.

a. La circunferencia

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

tiene centro

$C(-2, 1)$ y radio $r = 3$

Si desarrollamos

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

obtenemos la ecuación general,

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9,$$

o bien

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$$

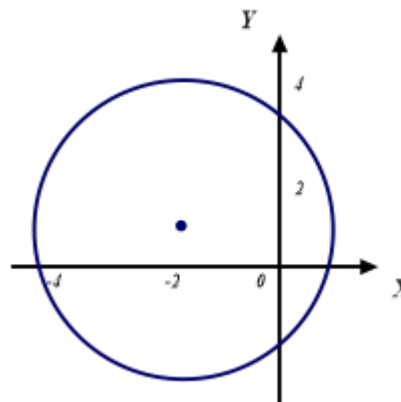


FIGURA 3.

b. En la circunferencia (con ecuación cartesiana)

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4$$

Centro

$C\left(0, \frac{1}{3}\right)$

y radio con longitud

$$r = 2$$

Ecuación general,

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - 4 = 0,$$

entonces

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{35}{9} = 0$$

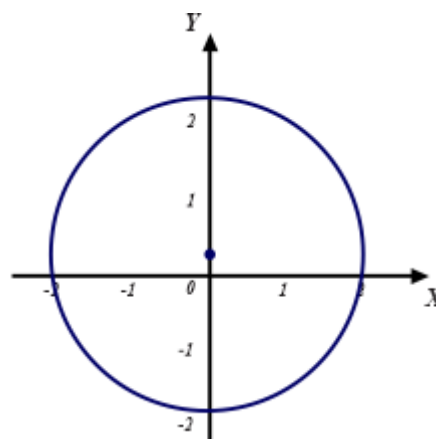


FIGURA 4.

c. Circunferencia con ecuación general

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

i. Reacomodamos términos

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y = 12$$

ii. Completamos trinomios cuadrados perfectos en las variables x y y ,

$$x^2 + 6x + 3^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 12 + 3^2 + 2^2,$$

iii. Factorizamos trinomios cuadrados perfectos,

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 12 + 9 + 4 = 25,$$

por tanto

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25,$$

$$C(-3, 2) \text{ y } r = 5$$

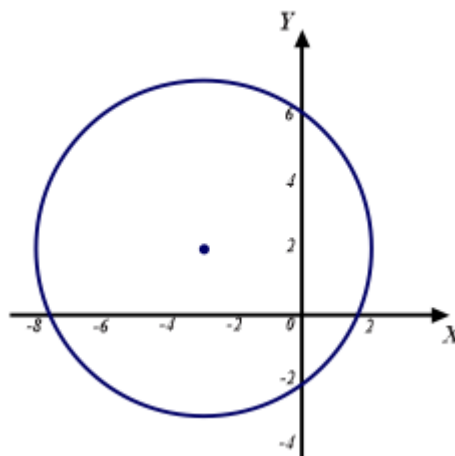


FIGURA 5.

Si en el proceso de transición de la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ a la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se obtiene $r = 0$ la “circunferencia es un punto”, si $r < 0$ la “circunferencia es imaginaria”.

**EJEMPLO 2. CIRCUNFERENCIAS PUNTUALES Y CIRCUNFERENCIAS IMAGINARIAS**a. ¿ $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 12 = 0$ representa una circunferencia?

i. Reacomodamos términos

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y = -12,$$

ii. Completamos trinomios cuadrados perfectos en las variables x y y ,

$$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 + 4y + 2^2 = -12 + 2^2 + 2^2,$$

iii. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos,

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = -4,$$

entonces

$$C(-2, -2) \text{ y } r^2 = -4,$$

por tanto la ecuación $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 12 = 0$ corresponde a una “circunferencia imaginaria”.

b. La ecuación $x^2 + y^2 + 8y + 16 = 0$ es equivalente a

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = 0^2,$$

por tanto $r = 0$, esta ecuación corresponde a una “circunferencia puntual”.



SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS 1

1. Obtén la ecuación cartesiana y la ecuación general.

- a. La circunferencia con centro en $C(0, 0)$ y radio $r = \sqrt{3}$
- b. La circunferencia con centro en $C(3, -1)$ y radio $r = 5$
- c. La circunferencia con centro en $C\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y radio $r = \frac{4}{3}$

2. Obtén el centro, el radio y la ecuación faltante.

- a. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$
- b. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 3^2$
- c. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 54 = 0$
- d. $x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x - y - \frac{10}{9} = 0$

3. Identifica el “tipo de circunferencia”.

- a. $x^2 + y^2 - 4x + 12 = 0$
- b. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
- c. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$



Tratemos otros problemas que involucren a la circunferencia.



EJEMPLO 3. INTERSECCIONES CON CIRCUNFERENCIAS

1. Obtén los puntos de intersección.

a. La circunferencia asociada

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$$

con la línea recta de ecuación

$$2x - y - 4 = 0$$

i. Ambas ecuaciones generan el sistema

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 & \cdots E_1 \\ 2x - y = 4 & \cdots E_2 \end{cases}$$

ii. De E_2 despejamos y ,

$$y = 2x - 4 \cdots E_3$$

iii. Sustituimos

$$y = 2x - 4 \cdots E_3 \text{ en } E_1,$$

luego

$$(x+1)^2 + (2x-3)^2 = 5$$

iv. Su desarrollo y simplificación da

b. La circunferencia y elipse,

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ y } x + y - 4 = 0$$

i. Asociémosles el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 & \cdots E_1 \\ x + y = 4 & \cdots E_2 \end{cases}$$

ii. De E_2 obtenemos

$$y = -x + 4 \cdots E_3$$

iii. Sustituida en E_1 da

$$(x-2)^2 + (-x+4)^2 = 4$$

iv. Su desarrollo y simplificación es

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

o bien

$$(x-2)(x-4) = 0 \text{ y } x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 4$$

da $x^2 - 2x + 1 = 0$, entonces $x = 1$

v. Si $x = 1$ en $y = 2x - 4 \cdots E_3$, da

$$y = -2$$

Por tanto, el único punto común entre ambas curvas es

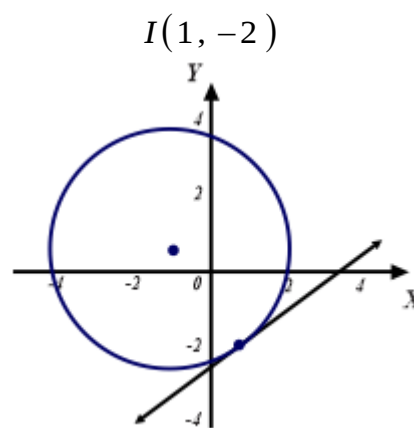


FIGURA 6.

v. Sustituimos $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$

en

$$y = -x + 4 \cdots E_3$$

obtenemos

$$y_1 = 2 \text{ y } y_2 = 0$$

Los puntos de intersección son

$$I_1(2, 2) \text{ y } I_2(4, 0)$$

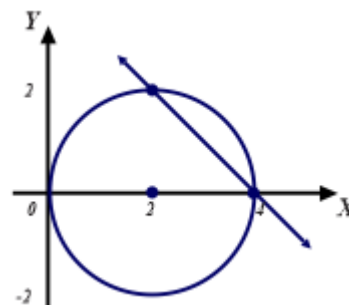


FIGURA 7.

c. La circunferencia y parábola asociadas a $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ y $4x^2 - 12y - 3 = 0$

i. Multiplicamos la ecuación de la circunferencia por -4 , obtenemos $-4x^2 - 4y^2 = -10$

ii. Sumamos la ecuación obtenida con la ecuación de la parábola,

$$-4y^2 - 12y + 7 = 0, \text{ o bien } 4y^2 + 12y - 7 = 0$$

iii. $4y^2 + 12y - 7 = 0$

tiene soluciones

$$y_1 = \frac{1}{2} \text{ y } y_2 = -\frac{7}{2}$$

iv. Si $y = -\frac{7}{2}$, entonces

$$x^2 = -\frac{39}{4} \text{ (sin solución).}$$

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces

$$x^2 = \frac{9}{4} \text{ o } x = -\frac{3}{2} \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

v. Los puntos de intersección son:

$$I_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } I_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

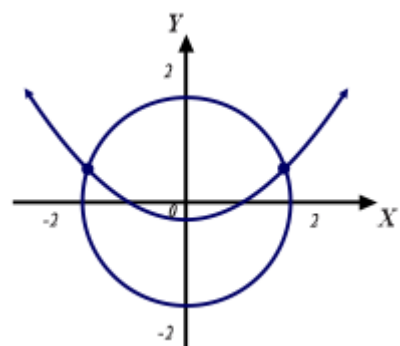


FIGURA 8.

d. Entre las circunferencias con ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ y } (x-2)^2 + y^2 = 4$$

i. Si igualamos las ecuaciones obtenemos

$$x^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$$

ii. Desarrollamos y simplificamos

$$-4x + 4 = 0,$$

o bien

$$x = 1$$

iii. Sustituimos $x = 1$ en la primera ecuación

$$1^2 + y^2 = 4,$$

luego

$$y = -\sqrt{3} \text{ y } y = \sqrt{3}$$

v. Los puntos de intersección son

$$I_1(1, -\sqrt{3}) \text{ y } I_2(1, \sqrt{3})$$

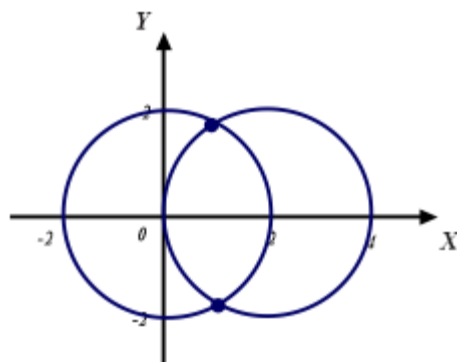


FIGURA 9.



SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS 2

1. En caso de existir, obtén los puntos de intersección.

- La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con la línea recta con $y = x - 2$
- La circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 8$ con la línea recta con $x + y - 1 = 0$
- La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con la parábola $x^2 - 2x + y - 1 = 0$
- La circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ con la parábola $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
- Las circunferencias $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ y $(x + 1)^2 + y^2 = 1$



EJEMPLO 4. PROBLEMAS DIVERSOS CON CIRCUNFERENCIAS

1. Obtengamos las ecuaciones de las circunferencia.

- Centro el punto $C(3, -1)$ y contiene a

$$p(1, -1)$$

Su radio mide

$$r = d(p, C) = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-(-1))^2},$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

Ecuación cartesiana

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

Ecuación general

$$x^2 - 9x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 0$$

o bien

$$x^2 + y^2 - 9x + 2y + 10 = 0$$

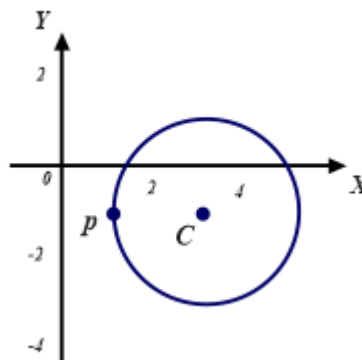


FIGURA 10.

b. Extremos del diámetro en los puntos

$$p_1(2, 0) \text{ y } p_2(2, -2)$$

El centro es el punto medio del segmento de recta que definen los puntos,

$$C\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = C(2, -1)$$

Radio

$$r = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-0)^2} = 1 \text{ unidades.}$$

Por tanto, su ecuación cartesiana es

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Desarrollando los binomios y reacomodando

$$\text{términos, } x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0,$$

o bien

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

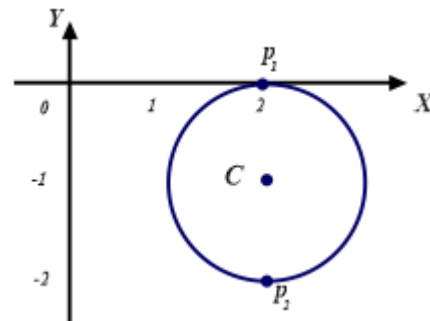


FIGURA 11.

c. De radio con longitud 1 y concéntrica a la circunferencia $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 3$

Su centro es el punto $C(2, 0)$, por tanto la

ecuación cartesiana de la circunferencia

concéntrica a ella con radio $r = 1$

es

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 1, \text{ ecuación general}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 1 = 0$$

o

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

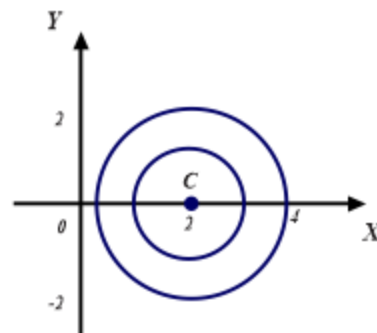


FIGURA 12.

d. Contiene los puntos $p_1(0, 0)$, $p_2(4, 0)$ y $p_3(2, 1)$

Los puntos satisfacen las ecuaciones (cartesiana y general) de la circunferencia. Los sustituimos en

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

i. Si $p_1(0, 0)$, entonces

$$(0)^2 + (0)^2 + D(0) + E(0) + F = 0 \Rightarrow F = 0$$

ii. Si $p_2(4, 0)$, entonces

$$(4)^2 + (0)^2 + D(4) + E(0) + F = 0 \Rightarrow 4D + F + 16 = 0$$

iii. Si $p_3(2, 1)$, entonces

$$(2)^2 + (1)^2 + D(2) + E(1) + F = 0 \Rightarrow 2D + E + F = -5$$

iv. Por i., $F = 0$, sustituimos en la ecuación del inciso ii.,

$$4D + (0) + 16 = 0, \text{ o bien } D = -4$$

v. Sustituimos $D = -4$ y $F = 0$ en la ecuación del inciso iii. $2(-4) + E + 0 = -5$, de donde $E = 3$

Si $F = 0$, $D = -4$ y $E = 3$ en

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$$

En la forma cartesiana

$$(x - 2)^2 + (y + 3/2)^2 = 25/4$$

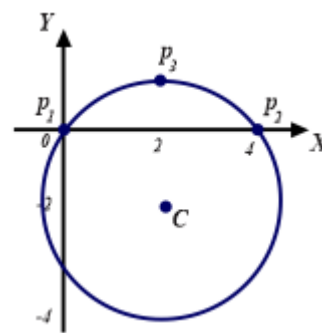


FIGURA 13.



SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS 3

1. Obtén la ecuación general de la circunferencia.

- a. Centro en el punto $C(1, -3)$ y que contiene al punto $P(0, 3)$
- b. Diámetro con extremos en los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-1, -4)$
- c. Contiene los puntos $P(0, 0)$, $Q(4, 0)$ y $R(2, 2)$

Una circunferencia y una línea recta son tangentes si y sólo si tienen un solo punto común.



EJEMPLO 5. LÍNEAS RECTAS TANGENTES CIRCUNFERENCIAS

1. Líneas rectas tangentes a circunferencias

a. La circunferencia con centro en

$$C(4, 2)$$

tangente al eje de las ordenadas.

La **figura 12** muestra que su radio mide

$$r = 4 \text{ unidades.}$$

Ecuación cartesiana es

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4^2,$$

o bien

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Ecuación general,

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 - 16 = 0,$$

entonces

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$$

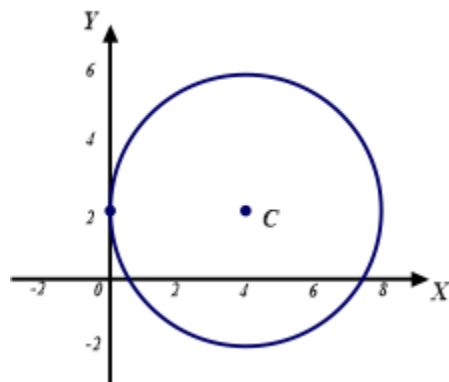


FIGURA 14.

b. La circunferencia con centro en

$$C(1, 1)$$

y tangente a la línea recta ecuación

$$4x + 3y + 3 = 0$$

La longitud del radio es

$$\begin{aligned} r &= d(F_0, L), \\ &= \frac{|4(1) + 3(1) + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}$$

Ecuación ordinaria

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Ecuación general

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

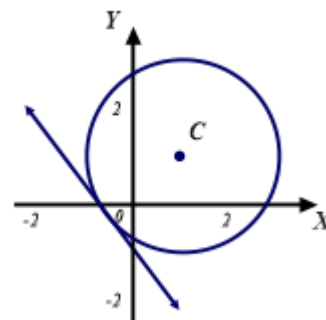


FIGURA 15.

c. Línea recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0 \text{ en el punto } T(3, -1)$$

La forma cartesiana de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8,$$

el punto

$$C(1, 1)$$

es el centro.

La ecuación de la recta que contiene al radio tiene pendiente

$$m = \frac{-1-1}{1-3} = 1,$$

por tanto, la línea recta tangente que contiene al punto es

$$y - (-1) = 1(x - 3);$$

forma general

$$x - y - 4 = 0$$

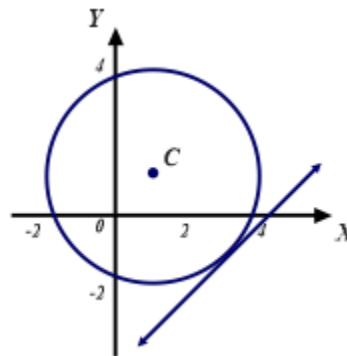


FIGURA 16.

SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS 4

1. Obtén la ecuación general de la circunferencia.

a. Centro en $C(6, 4)$ y tangente al eje las abscisas.

b. Centro en $C(2, 0)$ y tangente a la línea recta con ecuación $x - y + 2 = 0$

c. Centro en $C(4, 1)$ y tangente a la línea recta con ecuación $x + y + 3 = 0$

5.2 ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA ELIPSE EN EL PLANO CARTESIANO.

APRENDIZAJES

EL ALUMNADO:

5. Identifica los elementos y la propiedad de simetría de la elipse.
 6. Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico.
 7. Obtiene la ecuación ordinaria de la elipse a partir de sus elementos, con ejes paralelos a los ejes cartesianos y con centro en el origen.
 8. Obtiene la ecuación ordinaria de la elipse a partir de sus elementos, con ejes paralelos a los ejes cartesianos con centro fuera del origen.
 9. Bosqueja la gráfica de la elipse a partir de los parámetros de su ecuación ordinaria.
 10. Identifica la relación entre la excentricidad y la forma de la elipse.
 11. Transforma la ecuación general de la elipse a su forma ordinaria.
- Bosqueja la gráfica de la elipse a partir de la ecuación general.
Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

En el contexto de los lugares geométricos, una elipse es uno de ellos, en plano cartesiano formado por el conjunto de puntos p tales que la suma de sus distancias a los puntos fijos F_1 y F_2 es constante. La **figura 1.** muestra el trazo de una elipse.

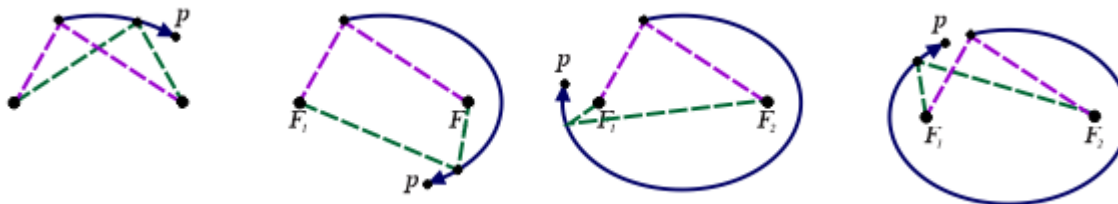


FIGURA 1.

Formalmente:

DEFINICIÓN 1. LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

- a. El **lugar geométrico** formado por el conjunto de puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (también en el plano cartesiano) es constante se conoce como **elipse**.
- b. Los puntos fijos se llaman focos.
- c. Si los puntos F_1 , F_2 son los focos y p es un punto de la elipse, entonces

$$d(F_1, p) + d(F_2, p) = k$$

Elementos de una elipse:

- i. Los puntos p de la elipse.
- ii. **Focos**, los puntos fijos F_1 y F_2
- iii. **Eje focal**, la línea recta que contiene a los focos
- iv. **Vértices**, los puntos comunes entre el eje focal y la elipse, representados por V_1 y V_2
- v. **Centro** C , el punto medio de cualquiera de los segmentos rectilíneos $\overline{F_1F_2}$ o $\overline{V_1V_2}$

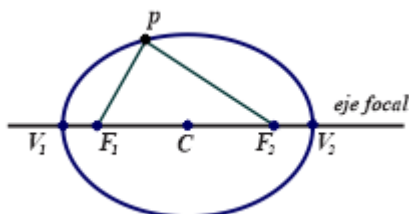


FIGURA 2.

- vi. **Eje mayor**, segmento rectilíneo con extremos en los vértices V_1 y V_2 , (se puede justificar que) su longitud mide $2a$

vii. **Eje menor**, segmento rectilíneo con extremos en la elipse, perpendicular al eje mayor y contiene al centro, se le asigna longitud $2b$

vi. El segmento rectilíneo $\overline{CF_2}$ (o $\overline{CF_1}$) se llama parámetro, su longitud es la semi distancia focal y le asignaremos el valor de c . La distancia focal es la longitud del segmento rectilíneo con extremos en los focos, se le asigna longitud $2c$

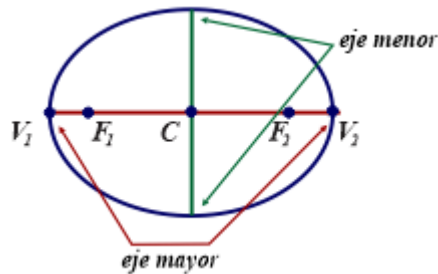


FIGURA 3.

Longitudes de los segmentos rectilíneos vinculados a la elipse:

i. Semiejes mayores $\overline{V_1C}$ y $\overline{CV_2}$, cada uno con longitud

$$a$$

ii. Semi distancia focal c , longitud del segmento $\overline{CF_2}$

iii. Semiejes menores, cada uno con longitud b

Las longitudes de estos tres segmentos rectilíneos antes señalados se vinculan con el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

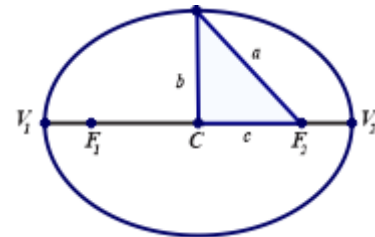


FIGURA 4.



EJEMPLO 1. DEFINICIÓN Y ELIPSE

a. El punto $p(x, y)$ se desplaza (en el plano cartesiano) de manera que la suma de sus distancias a los puntos fijos $F_1(0, 0)$ y $F_2(6, 0)$ es 12 unidades, entonces,

i. La condición que describe el desplazamiento del punto es

$$\sqrt{(x-0)^2 + y^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 12$$

ii. La curva descrita es una elipse con eje focal horizontal (eje de las abscisas), la longitud del eje mayor es $2a = 12$, o bien $a = 6$

iii. La elipse tiene centro en el punto $C\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(3, 0)$

iv. La distancia focal es $2c = 6$ unidades, por tanto, $c = 3$

v. Con

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad a = 6 \text{ y } c = 3$$

obtenemos

$$6^2 = b^2 + 3^2,$$

entonces

$$b = \sqrt{27}$$

La **figura 5.** muestra las características de los elementos de una elipse con eje focal horizontal y la **figura 6.** muestra los elementos de una elipse con eje focal horizontal.

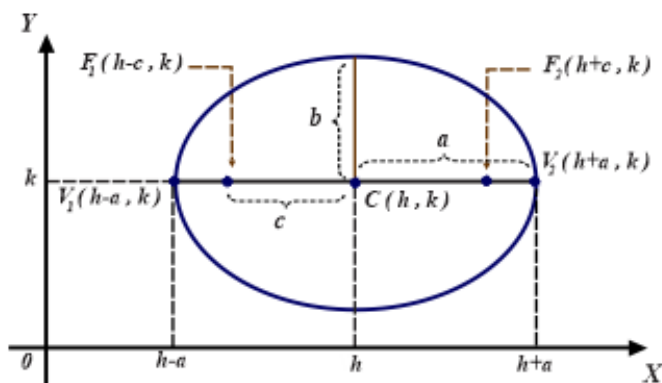


FIGURA 5.

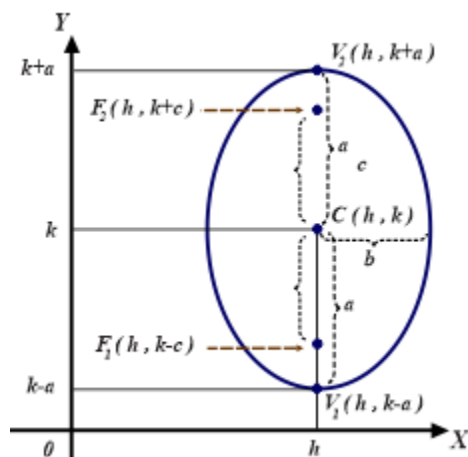


FIGURA 6.

1. Centro $C(h, k)$
 2. Focos
 $F_1(h-c, k)$ y $F_2(h+c, k)$
 3. Vértices
 $V_1(h-a, k)$ y $V_2(h+a, k)$
 4. Longitud del semieje mayor
 a
 5. Longitud del semieje menor
 b
 6. Semi longitud focal
 c
 7. $a^2 = b^2 + c^2$
1. Centro $C(h, k)$
 2. Focos
 $F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$
 3. Vértices
 $V_1(h, k-a)$ y $V_2(h, k+a)$
 4. Longitud del semieje mayor
 a
 5. Longitud del semieje menor
 b
 6. Semi longitud focal
 c
 7. $a^2 = b^2 + c^2$

La inclusión de los elementos de la elipse en la condición que la define como lugar geométrico y un desarrollo algebraico adecuado conducen a la propiedad:

PROPIEDAD 1. ECUACIÓN CARTESIANA DE LA ELIPSE

Sea una elipse con centro en $C(h, k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor con longitud $2b$ (donde $a > b > 0$), entonces:

a. Ecuación cartesiana de la elipse con eje focal (mayor o de simetría) horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

b. Ecuación cartesiana de la elipse con eje focal (mayor o de simetría) vertical

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

El desarrollo, reacomodo y renombramiento de los coeficientes de las variables x e y de las ecuaciones cartesianas se simplifican en la ecuación general de la elipse.

DEFINICIÓN 2. ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

Ecuación general de la elipse:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ tal que, } A > 0, B > 0, A \neq B \text{ y } \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F = 0$$

Así, una elipse puede representarse con su ecuación cartesiana o su ecuación general

**EJEMPLO 2. TRÁNSITO ENTRE ECUACIONES DE LA ELIPSE**

a. Obtengamos la forma general y orientación del eje focal de $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

i. El denominador mayor pertenece a la variable x , por tanto, su eje focal es la línea recta horizontal con ecuación $y = 0$

ii. Multiplicamos por $3^2 \cdot 2^2$ (producto de los denominadores) todos los términos de la ecuación

$$(3^2)(2^2)\frac{(x+1)^2}{3^2} + (3^2)(2^2)\frac{y^2}{2^2} = (3^2)(2^2)(1)$$

Simplificamos,

$$4(x+1)^2 + (9)(4)y^2 = (9)(4)$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio y los productos correspondientes

$$4(x^2 + 2x + 1) + 36y^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 36y^2 = 36$$

Reacomodamos términos y simplificamos

$$4x^2 + 36y^2 + 8x - 32 = 0$$

b. Obtengamos la forma cartesiana de la elipse con ecuación $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y - 33 = 0$

i. Reordenamos los términos de la ecuación $x^2 - 2x + 4y^2 - 24y + 33 = 0$

ii. Factorizamos los coeficientes de los términos cuadráticos,

$$(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 6y) + 33 = 0$$

iii. Completamos trinomios cuadrados

$$((x-1)^2 - 1^2) + 4((y-3)^2 - 3^2) + 33 = 1^2 + 4 \cdot 3^2$$

iv. Rescribimos y simplificamos

$$(x-1)^2 + 4(y-3)^2 = 4$$

v. Dividimos la última ecuación por $4 = 2^2$, $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{1^2} = 1$

Con un número mínimo de elementos (adecuados) podemos construir las ecuaciones de la elipse.



EJEMPLO 3. ECUACIONES DE LA ELIPSE A PARTIR DE ALGUNOS DE SUS ELEMENTOS

1. Obtengamos los elementos restantes y las ecuaciones de la elipse, luego la trazaremos.

a. Si una elipse tiene vértices

$$V_1(-3, 0) \text{ y } V_2(3, 0)$$

y semieje menor de longitud

$$b = \sqrt{3}$$

entonces:

i. Tiene eje focal horizontal.

ii. Su centro es el punto

$$C\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(0, 0)$$

iii. $a = d(C, V_2) = 3$

iv. Su semi longitud focal c , se obtiene de

$$3^2 = \sqrt{3}^2 + c^2, \text{ ésta es } c = \sqrt{6}$$

v. Focos:

$$F_1(0 - \sqrt{6}, 0) = F_1(-\sqrt{6}, 0)$$

y

$$F_2(0 + \sqrt{6}, 0) = F_2(\sqrt{6}, 0)$$

v. Ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1$$

vi. Ecuación general, multiplicamos por 9 los términos de la ecuación anterior y los reacomodamos,

$$x^2 + 3y^2 - 9 = 0$$

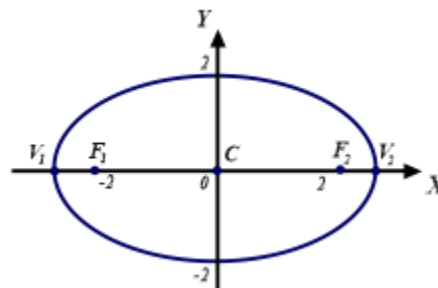


FIGURA 7.

b. Si $F_1(0, 2 - \sqrt{7})$, $F_2(0, 2 + \sqrt{7})$ y vértice

$$V_1(0, -2)$$

i. El centro, punto medio de los focos

$$C\left(\frac{0+0}{2}, \frac{2-\sqrt{7}+2+\sqrt{7}}{2}\right) = C(0, 2)$$

ii. Longitud del semieje mayor, es la distancia entre $C(0, 2)$ y $V_1(0, -2)$,

es decir

$$a = 4 \text{ y } V_2(0, 6)$$

iii. Distancia semi focal, distancia entre

$$C(0, 2) \text{ y } F_1(0, 2 - \sqrt{7}),$$

por tanto $c = \sqrt{7}$

iv. Longitud del semieje menor

$$4^2 = b^2 + \sqrt{7}^2 \text{ y } b = 3$$

v. Ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

vi. Ecuación general.

De la ecuación cartesiana tenemos

$$9x^2 + 16(y-2)^2 = 144$$

o bien

$$9x^2 + 16y^2 - 64y + 64 = 144$$

y

$$9x^2 + 16y^2 - 64y - 128 = 0$$

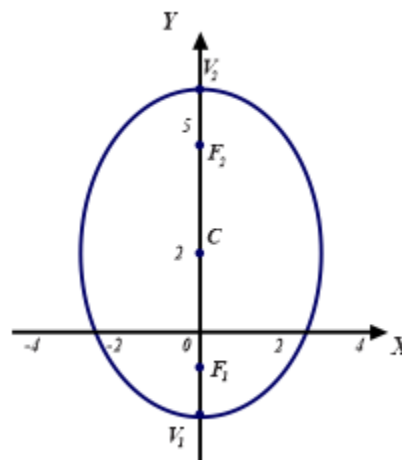


FIGURA 8.

c. Con $a = 3$, $b = 2$, $V_1(-1, 2)$ y eje mayor horizontal.

i. Centro

$$C(h, k) = C(-1+3, 2) = C(2, 2)$$

ii. Semi distancia focal

$$3^2 = 2^2 + c^2 \text{ y } c = \sqrt{5}$$

iii. Focos

$$F_1(h-c, k) = F_1(2, 2 - \sqrt{5})$$

y

$$F_2(h+c, k) = F_2(2, 2 + \sqrt{5})$$

iv. Vértices

$$V_2(h+a, k) = V_2(2+3, 2) = V_2(5, 2)$$

v. Ecuación cartesiana

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

vi. Ecuación general, con la ecuación cartesiana obtenemos

$$4(x-2)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

o

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 4y + 4) = 36$$

y

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$$

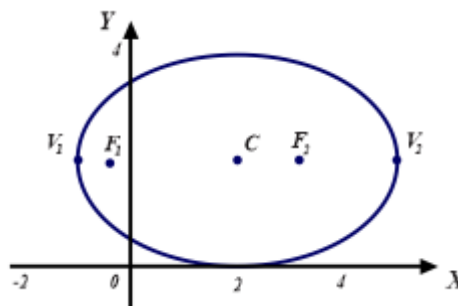


FIGURA 9.

d. $C(1, -3)$, $b=3$ y $c=4$

i. Longitud del semieje mayor

$$a^2 = 3^2 + 4^2, \text{ entonces } a = 5$$

ii. Vértices, $V_1(h-a, k) = V_1(1-5, -3)$ o

$$= V_1(-4, -3)$$

 $V_2(h+a, k) = V_2(1+5, -3)$

$$= V_2(6, -3)$$

iii. Focos, $F_1(h-c, k) = F_1(1-4, -3)$

$$= F_1(-3, -3)$$

y

$$F_2(h+c, k) = F_2(1+4, -3)$$

$$= F_2(5, -3)$$

v. Ecuación cartesiana

$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

vi. Ecuación general, con la ecuación cartesiana obtenemos

$$9(x-1)^2 + 25(y+3)^2 = 225$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 6y + 9) = 225$$

y

$$4x^2 + 25y^2 - 8x - 150y + 4 = 0$$

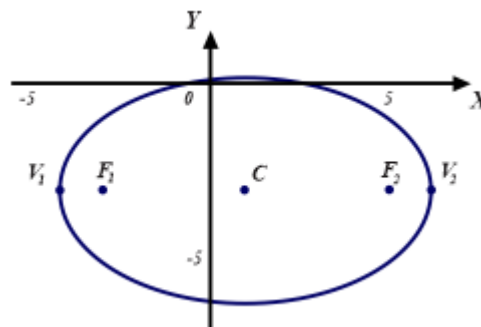


FIGURA 10.



SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 1

1. Obtén la ecuación cartesiana y luego la ecuación general.

a. $F_1(0, -1)$, $F_2(0, 1)$ y $a = \sqrt{3}$ b. $V_1(-3, -2)$, $V_2(3, -2)$ y $b = 2$ c. $C(3, 0)$, $V_1(3, -4)$, $F_2(3, \sqrt{12})$ d. Eje focal horizontal, $a = 3$, $c = \sqrt{5}$ y $C(-1, 1)$ e. $C(-4, -2)$, $a = 6$, $b = 5$, eje mayor vertical.f. $F_1(1, -2)$ y $V_1(-1, -2)$ y $a = 6$ g. Extremos del eje menor en $p_1(-3, -5)$, $p_2(-3, 3)$ y $a = 5$


EJEMPLO 4. OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA ELIPSE

1. Obtén los elementos de la elipse (centro, longitud de los semiejes, semi longitud focal, focos, vértices, ecuación general y trázala.

a. $\frac{(x-1)^2}{7^2} + \frac{(y-1)^2}{\sqrt{24}^2} = 1$

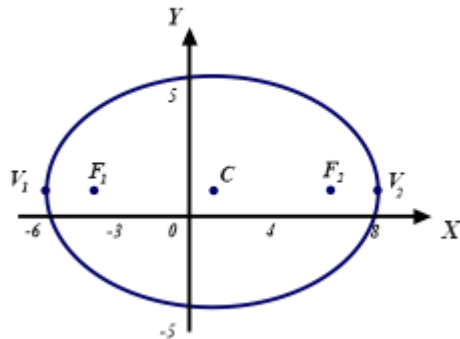


FIGURA 11.

Comparándola con

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

obtenemos:

b. $\frac{(x+2)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$

Comparamos con

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

obtenemos:

i. Centro, $C(h, k) = C(-2, 2)$

ii. Longitud de los semiejes

$$a = 2 \text{ y } b = \sqrt{2}$$

iii. Parámetro (semi longitud focal)

$$c, 2^2 = \sqrt{2}^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$$

vi. Con la ecuación cartesiana obtenemos,

$$4(x+2)^2 + 2(y-2)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2x^2 + y^2 + 8x - 4y + 6 = 0$$

i. Centro $C(h, k) = C(1, 1)$

ii. De la posición de los denominadores:

$$a = 7 \text{ y } b = \sqrt{24}$$

iii. Parámetro y semi longitud focal c ,

$$7^2 = \sqrt{24}^2 + c^2, \Leftrightarrow c = 5$$

iv. Focos, $F_1(1-5, 1) = F_1(-4, 1)$

$$F_2(1+5, 1) = F_2(6, 1)$$

v. Vértices, $V_1(1-7, 1) = V_1(-6, 1)$

$$V_2(1+7, 1) = V_2(8, 1)$$

vi. Con $\frac{(x-1)^2}{7^2} + \frac{(y-1)^2}{\sqrt{24}^2} = 1$ obtenemos

$$24(x-1)^2 + 49(y-1)^2 = 1176,$$

o bien

$$24x^2 + 49y^2 + 48x - 98y - 1103 = 0$$

iv. Focos:

$$F_1(-2, 2 - \sqrt{2}) \text{ y } F_2(-2, 2 + \sqrt{2})$$

v. Vértices:

$$V_1(-2, 2-2) = V_1(-2, 0)$$

$$V_2(-2, 2+2) = V_2(-2, 4)$$

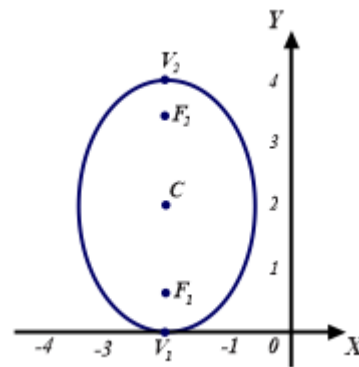


FIGURA 12.

c. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{6} = 1$

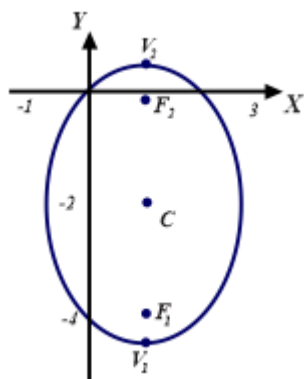


FIGURA 13.

Al comparar con

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

obtenemos:

i. Centro

$$C(h, k) = C(1, -2)$$

d. Si $3x^2 + 9y^2 - 27 = 0$,
entonces,

$$x^2 + 3y^2 = 9,$$

dividimos todos los términos por 9 y
obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

o bien

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1$$

i. Centro

$$C(0, 0)$$

ii. De los denominadores,

$$a = 3 \text{ y } b = \sqrt{3}$$

iii. Luego obtenemos c ,

$$3^2 = \sqrt{3}^2 + c^2, \Leftrightarrow c = \sqrt{6}$$

ii.

$$a = \sqrt{6} \text{ y } b = \sqrt{3}$$

iii. Por tanto

$$\sqrt{6}^2 = \sqrt{3}^2 + c^2, \text{ y } c = \sqrt{3}$$

iv. Focos

$$F_1(1, -2 - \sqrt{3})$$

$$F_2(1, -2 + \sqrt{3})$$

v. Vértices

$$V_1(1, -2 - \sqrt{6}) = V_1(1, -2 - \sqrt{6})$$

$$V_2(1, -2 + \sqrt{6}) = V_2(1, -2 + \sqrt{6})$$

vi. De la ecuación cartesiana obtenemos

$$6(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 18,$$

luego

$$2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$$

iv. Focos

$$F_1(0 - \sqrt{6}, 0) = F_1(-\sqrt{6}, 0)$$

$$F_2(0 + \sqrt{6}, 0) = F_2(\sqrt{6}, 0)$$

v. Vértices

$$V_1(0 - 3, 0) = V_1(-3, 0)$$

$$V_2(0 + 3, 0) = V_2(3, 0)$$

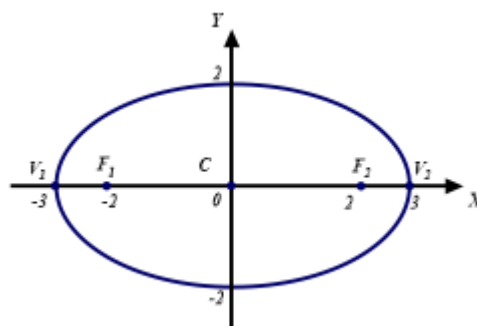


FIGURA 14.



SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 2

1. Obtén los elementos de la elipse (centro, longitud de los semiejes, semi longitud focal, focos, vértices, ecuación cartesiana o general (según corresponda)).

a. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

b. $\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$

c. $\frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$

d. $\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

e. $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$

f. $x^2 + 9y^2 + 4x - 5 = 0$

g. $4x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$

h. $2x^2 + 5y^2 - 4x - 10y - 13 = 0$



Diversos “problemas” de la vida real han sido modelados con elipses, por ejemplo las órbitas de los planetas alrededor del Sol, donde éste ocupa uno de los focos; aplicaciones prácticas en la arquitectura, como en arcos y cúpulas. También se ocupan elipses en los instrumentos tecnológicos relacionados con las transmisiones, en diseño de salas puentes y adornos. Así, la elipse es esencial para comprender y diseñar aspectos de nuestro entorno destacando de ella su propiedad óptica.

PROPIEDAD 2. PROPIEDAD ÓPTICA DE LA ELIPSE

La línea recta tangente a una elipse en el punto p_T genera ángulos congruentes con los segmentos de recta que contienen a p_T y a uno de los focos.

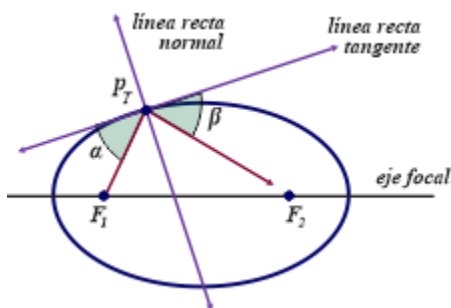


FIGURA 15.

En la **figura 15.**, la línea recta tangente en el punto p_T a la elipse biseca los ángulos con vértice en p_T , lados en la tangente T y el rayo que emerge de uno de los focos de la elipse en dirección del otro, es decir $m\angle\beta = m\angle\alpha$

**EJEMPLO 5. APLICACIONES BÁSICAS DE LA ELIPSE**

a. Una mesa de billar tiene forma elíptica, su parte más larga mide 2.8 metros y la más ancha mide 1.8 metros. Calcula las coordenadas de los dos puntos en la mesa tales que: si en ambos puntos se coloca una bola y luego una de ellas se golpea con la fuerza adecuada para que luego de golpear el borde de la mesa golpee a la otra bola (considera válida la propiedad óptica de la elipse).

i. Referimos la mesa al plano cartesiano como lo muestra la **figura 16.**

ii. Con

$$a = 1.4, b = 0.9 \text{ y } a^2 = b^2 + c^2,$$

obtenemos

$$c = \sqrt{(1.4)^2 - (0.9)^2} = \sqrt{1.15}$$

iii. Por tanto, los focos (posiciones de las bolas) son los puntos

$$F_1(-\sqrt{1.15}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{1.15}, 0)$$

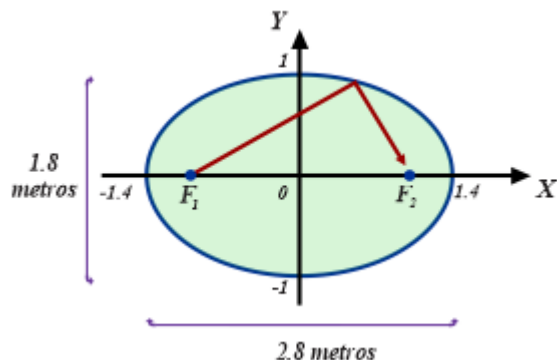


FIGURA 16.

b. Una galería de murmullos es un salón cuyo techo es un semi-elipsoide. Este diseño posee la propiedad acústica: si dos personas se ubican en los puntos focales de la elipse (en el suelo) y una de ellas susurra, la otra podrá escuchar claramente el susurro, aunque estén separadas por cierta distancia. Esto ocurre porque las ondas sonoras que parten de un foco se reflejan en el techo y convergen al otro foco.

Se diseña una galería de murmullos de dimensiones: largo total del salón 10 metros y altura del techo 4 metros. ¿A qué distancia de las paredes laterales deben colocarse los focos en el suelo para que funcione la propiedad de la galería de murmullos?

i. Coloquemos la semi elipse al plano cartesiano de forma que el origen coincida con el centro de la elipse y el eje mayor coincida con el eje x

ii. Notemos que

$$b = 4 \text{ y } 2a = 10,$$

o bien

$$a = 5$$

iii. Con $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos

$$5^2 = 4^2 + c^2,$$

es decir

$$c = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ (semi distancia focal).}$$

El centro de la galería es

$$C(0, 0)$$

Los focos:

$$F_1(0 - 3, 0) = F_1(-3, 0)$$

y

$$F_2(0 + 3, 0) = F_2(3, 0)$$

iv. Por tanto, los focos deben ubicarse en el suelo del salón (galería) a 2 metros de cada pared lateral.

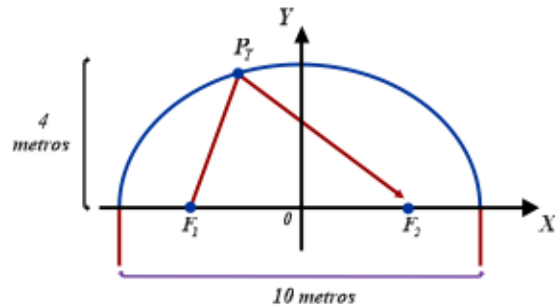


FIGURA 17.

c. Se requiere transportar un bloque rectangular rígido en un camión especial cuyo vano de carga tiene una sección transversal con forma de semi elipse. Las dimensiones del vano del camión son ancho 1.5 metros y alto 1 metro. Si las dimensiones del panel que desea transportarse son: ancho 2.6 metros y alto 1.6 metros. ¿Es útil el camión?

i. Para que el panel pueda transportarse sus esquinas no deben tocar la semi elipse de (sección transversal) del vano. Por tanto se debe cumplir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

ii. En donde:

x representa la longitud del semi ancho del panel

y y la longitud del semi alto del panel, luego

$$x = 1.3 \text{ y } y = 0.8 \text{ metros,}$$

y

$$a^2 = 1.5^2 = 2.25 \text{ y } b^2 = 1^2 = 1$$

metros respectivamente.

iii. Sustituyendo valores da

$$\frac{1.69}{2.25} + \frac{0.64}{1} = 1.391$$

iv. El número obtenido es mayor a 1 por tanto no es posible transportarlo.

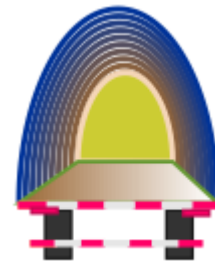


FIGURA 18.

d. El arco de sostén de un puente es semielíptico, su longitud horizontal es 40 metros y su altura mide 16 metros en su parte central. Calcula la altura que tiene el arco a 9 metros a la derecha o a la izquierda del centro del arco.

i. Por tanto, $a = 5$, $b = 4$ y la ecuación de la elipse que forma parte el arco es

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

ii. Si $x = 2$, entonces

$$\frac{2^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1,$$

por tanto la altura del arco semielíptico es

$$\frac{y^2}{4^2} = 1 - \frac{4}{25},$$

o bien

$$\frac{y^2}{4^2} = 1 - \frac{64}{25},$$

es decir

$$y = \frac{4}{25}\sqrt{21} \text{ metros.}$$

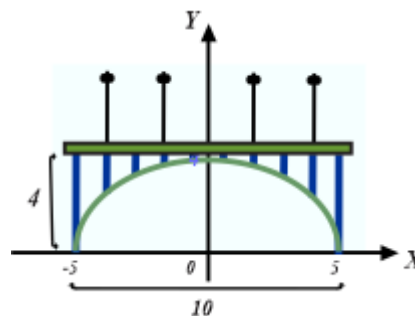
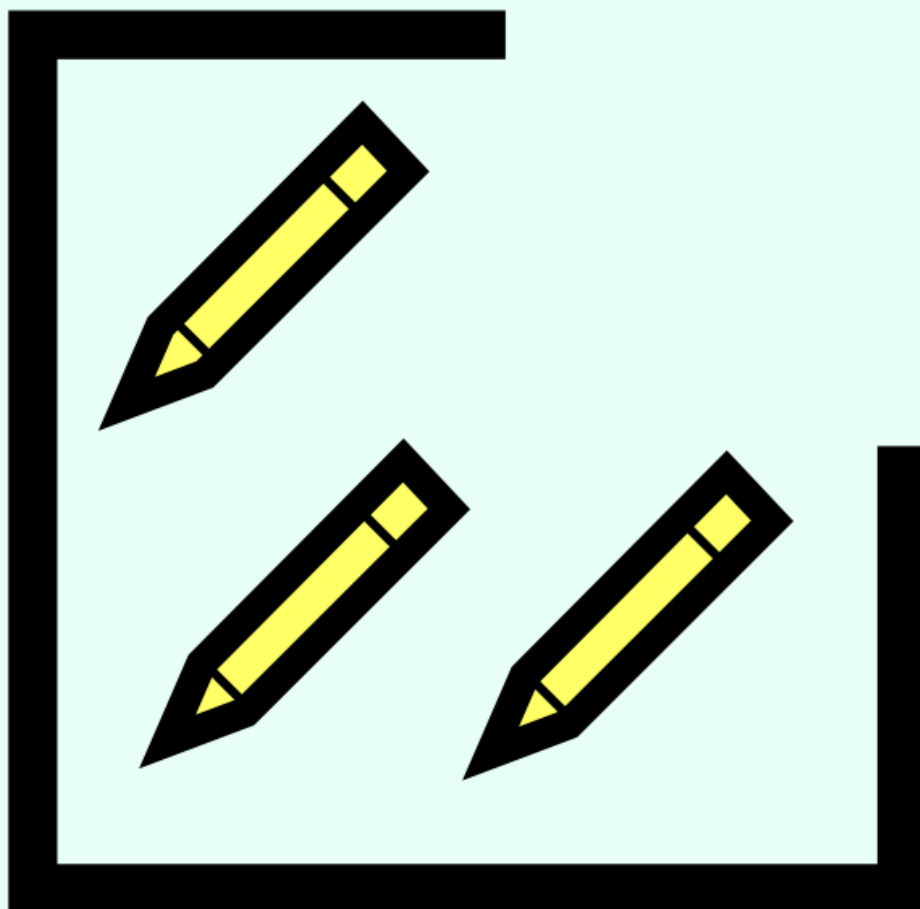


FIGURA 19.

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 3

1. Se acondicionó salón de 30 metros de largo como “galería de murmullos”. Los focos se encuentran a 5 metros del centro. ¿Qué altura tiene el techo en su parte central?
2. La entrada a una bodega tiene forma de arco semielíptico, su base mide 8 metros y su altura máxima 3 metros. A través de ella se pretenden introducir cajas de 1 metro de altura. ¿Cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?
3. La órbita de Marte alrededor del Sol es elíptica, con el Sol en uno de sus focos. El eje mayor de su trayectoria tiene una longitud aproximada de 456 millones de kilómetros y el eje menor mide aproximadamente 455.4 millones de kilómetros. Calcula la distancia mínima y la distancia máxima entre Marte y el Sol.
4. El arco de sostén de un puente es semielíptico, su longitud horizontal es 40 metros y su altura mide 16 metros en su parte central. Calcula la altura que tiene el arco a 9 metros a la derecha o a la izquierda del centro del arco.

5.3 SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS



**SOLUCIONES****SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 1**

1. a. $x^2 + y^2 = 3$ y $x^2 + y^2 - 3 = 0$
 b. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
 c. $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ y $9x^2 + 9y^2 - 6y - 15 = 0$
 2.
 a. $C(2, 1), r = 2$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 b. $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), r = 3$ y $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y - 1 = 0$
 c. $C(1, -3), r = 8$ y $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 64$
 d. $C\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), r = \sqrt{\frac{25}{18}}$ y $\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{18}$
 3.
 a. $r^2 = -8$ imaginaria.
 b. $r = 4$ real.
 c. $r = 0$ un punto.

**SOLUCIONES****SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 2**

1. a. $I_1(0, -2)$ y $I_2(2, 0)$
 b. $I_1(3, -2)$ y $I_2(-1, 2)$
 c. $I_1(3, -2)$ y $I_2(-1, -2)$
 d. $I(1, 1)$
 e. No se intersecan.

**SOLUCIONES****SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 3**

- a. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 27 = 0$
 b. $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$
 c. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 5.2
EJERCICIOS 1**

1. a. Cartesiana $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ y general $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$
- b. Cartesiana $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ y general $4x^2 + 9y^2 + 36y = 0$
- c. Cartesiana $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ y general $4x^2 + y^2 - 24x + 20 = 0$
- d. Cartesiana $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ y general $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 23 = 0$
- e. Cartesiana $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$ y general $36x^2 + 25y^2 + 288x + 100y - 224 = 0$
- f. Cartesiana $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{20} = 1$ y general $5x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 19 = 0$
- g. Cartesiana $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ y general $16x^2 + 25y^2 + 96x + 3650y - 19231 = 0$

**SOLUCIONES****SECCIÓN 5.2
EJERCICIOS 2**

1.

a. $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$

$C(0, 0)$, $F_1(-\sqrt{6}, 0)$, $F_2(\sqrt{6}, 0)$, $V_1(-3, 0)$, $V_2(3, 0)$

$3x^2 + 9y^2 - 27 = 0$

b. $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{7}$

$C(0, 2)$, $F_1(0, 2 - \sqrt{7})$, $F_2(0, 2 + \sqrt{7})$, $V_1(0, -2)$, $V_2(0, 6)$

$16x^2 + 9y^2 - 36y - 108 = 0$

c. $a = 4$, $b = 2$ y $c = \sqrt{12}$

$C(-2, 3)$, $F_1(-2, 3 - \sqrt{12})$, $F_2(-2, 2 + \sqrt{12})$, $V_1(-2, -1)$, $V_2(-2, 7)$

$4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 9 = 0$

d. $a = 5$, $b = 2$ y $c = \sqrt{21}$

$C(-3, 1)$, $F_1(-3 - \sqrt{21}, 1)$, $F_2(-3 + \sqrt{21}, 1)$, $V_1(2, 1)$, $V_2(-8, 1)$

$4x^2 + 25y^2 + 24x - 50y - 39 = 0$

e. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 1$

$$C(0, 0), F_1(-1, 0), F_2(1, 0), V_1(-\sqrt{3}, 0), V_2(\sqrt{3}, 0)$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$$

f. $a = 3$, $b = 1$ y $c = \sqrt{8}$

$$C(-2, 0), F_1(-2 - \sqrt{8}, 0), F_2(-2 + \sqrt{8}, 0), V_1(-5, 0), V_2(1, 0)$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{1} = 1$$

g. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$C(1, 1), F_1\left(1, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), F_2\left(1, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), V_1(1, 0), V_2(1, 2)$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

h. $a = \sqrt{10}$, $b = 2$ y $c = \sqrt{6}$

$$C(1, 1), F_1(1 - \sqrt{6}, 1), F_2(1 + \sqrt{6}, 1), V_1(1 - \sqrt{10}, -1), V_2(1 + \sqrt{10}, 1)$$

$$\frac{(x-1)^2}{10} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



 SOLUCIONES **SECCIÓN 5.2**
EJERCICIOS 3

1. 9 metros.

2. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ metros.

3. $d_{\min} = 216.3$ millones de kilómetros y $d_{\max} = 239.7$ millones de kilómetros.

4. $d = 14.142$ metros.





UNIDAD 5 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Qué condiciones deben cumplirse en la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ para que represente una circunferencia en el plano cartesiano?

2. Si una línea recta es tangente a una circunferencia, entonces es perpendicular a:

3. ¿Cómo se define una elipse como lugar geométrico?

4. ¿Qué es un arco de elipse?

5. En una elipse la distancia focal disminuye, entonces ¿la elipse se aproxima a?

6. ¿Qué relación satisfacen los “parámetros” a , b y c de una elipse?

7. Sea $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación de una elipse con eje focal vertical, ¿quién es mayor, A o B ?

**DESARROLLOS OPERATIVOS**

8. Obtén el centro, el radio y la ecuación general de la circunferencia que contiene los puntos $P_1 (0, 0)$, $P_2 (2, 2)$ y $P_3 (0, 4)$.
9. Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro $C (-2, 3)$ y tangente a la línea recta con ecuación $4x + y - 20 = 0$
10. Una elipse es tangente a los ejes coordenados en los puntos $P_1 (5, 0)$ y $P_2 (0, 2)$, obtén su ecuación general.
11. Determina todos los elementos de la elipse con ecuación $3x^2 + y^2 + 12x - 2y - 14 = 0$

PARA PENSAR

12. Una elipse tiene focos en los puntos $F_1 (-3, 0)$ y $F_2 (3, 0)$, un rayo emerge del primero de ellos e incide en el punto interno de la elipse con abscisa $x = 1$, calcula su longitud.
13. Calcula la ecuación general de la circunferencia que es concéntrica e inscribe a la elipse $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

ESCALA

Preguntas 1 a 7., un punto cada una.

Problemas 8. a 11., dos puntos cada uno.

Problemas 12. a 13. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 13 puntos

UNIDAD 5 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F \geq 0$
2. Perpendicular al radio.
3. La curva formada por un punto (del plano cartesiano) que se desplaza de manera que su distancia a dos puntos fijos (focos) del plano cartesiano es constante.
4. Sección de la elipse limitada por dos de sus puntos
5. Una circunferencia.
6. $a^2 = b^2 + c^2$
7. A



DESARROLLOS OPERATIVOS

8. $C(2, 0)$ y $r = 2$
9. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$
10. $4x^2 + 25y^2 - 40x - 100y + 100 = 0$
11. $C(-2, 1)$,
 $a = 3$,
 $b = \sqrt{3}$,
 $c = \sqrt{6}$,
 $V_1(-2, -2)$,
 $V_2(-2, 4)$,
 $F_1(-2, 1 - \sqrt{6})$
y
 $F_2(-2, 1 + \sqrt{6})$

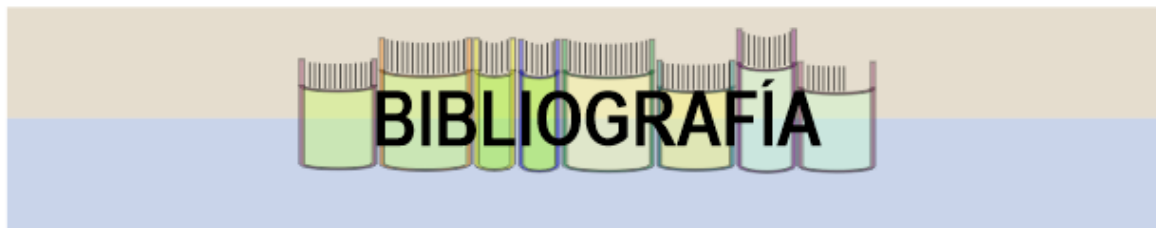


PARA PENSAR

12. 10 unidades.

13. $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$





Alexander, D. y Koeberlein, G. (2013). *Geometría*. Cengage Learning.

Clemens, S., O'Daffer, P., Cooney, T. y Sullivan, M. (2008). *Geometría y trigonometría*. Pearson Educación.

Haeussler, F. (2011). *Precálculo Treceava Edición*. Pearson.

Miller D., Hornsby J., Heeren V. (2010). *Matemática, razonamiento y aplicaciones*. Pearson Educación.

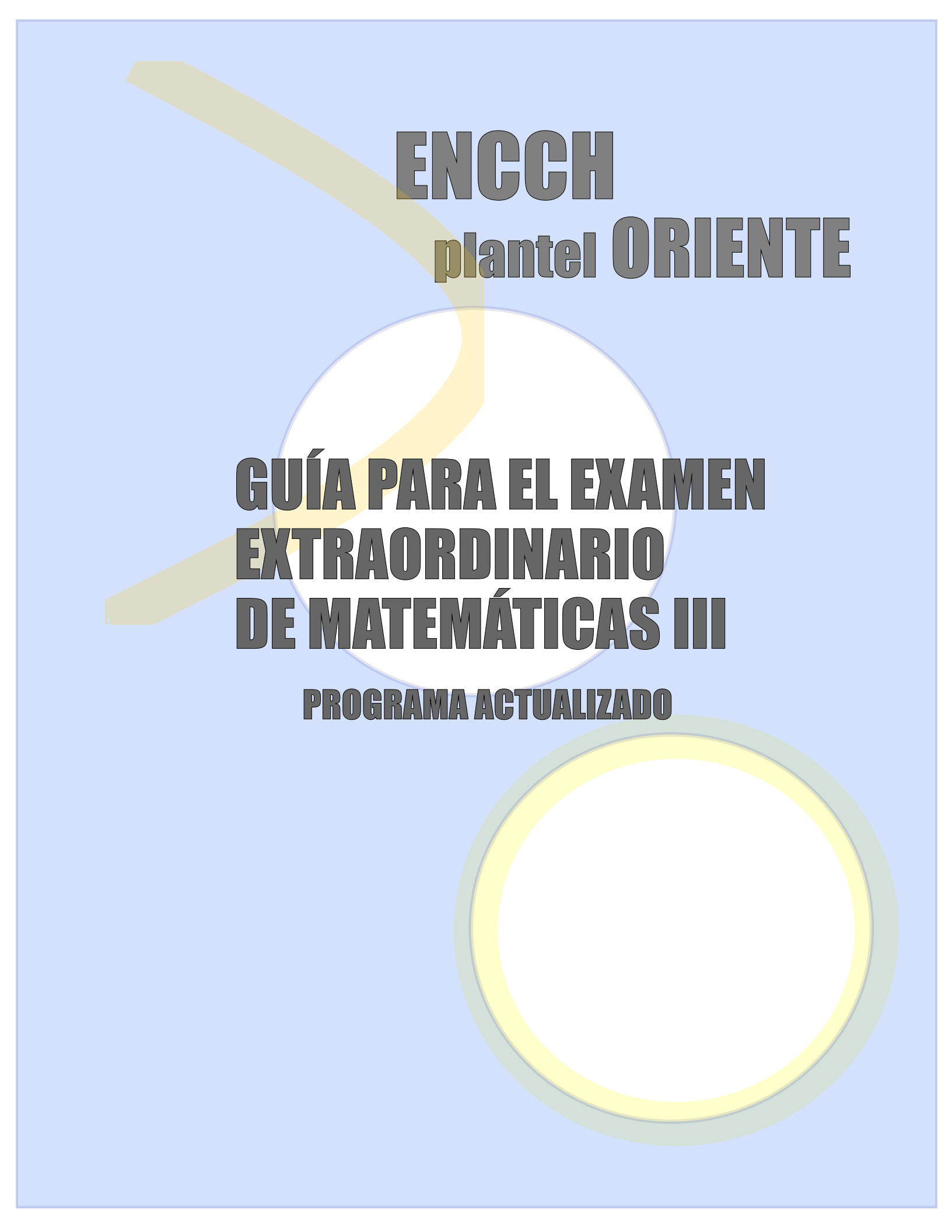
Lehmann, C. (2008). *Geometría analítica*. Limusa.

Oteyza de Oteyza, E. de, Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., y Ramírez, A. (2015). *Geometría analítica y trigonometría* (tercera edición). Pearson.

Stewart, J. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo Sexta Edición*. Cengage Learning.

Swokowski, E., & Cole, J. (2018). *Precálculo: álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning.

Zill, D., & Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (tercera edición). Mc Graw Hill.



ENCCH

planteles ORIENTE

**GUÍA PARA EL EXAMEN
EXTRAORDINARIO
DE MATEMÁTICAS III**

PROGRAMA ACTUALIZADO



ENCCH plantel ORIENTE

