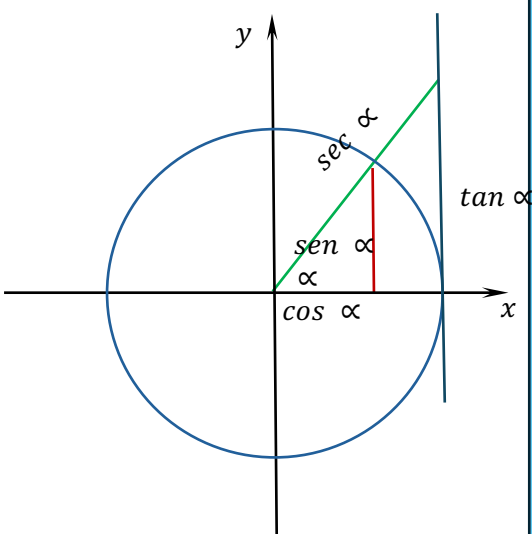
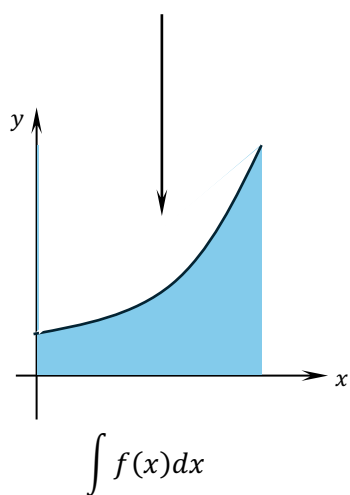
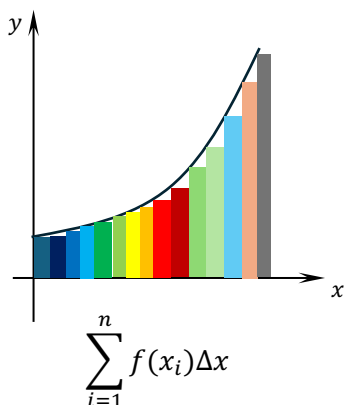




GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

FRANCISCO JAVIER HERNÁNDEZ VELASCO.
JUAN PABLO CORDERO SANTIAGO.
ROBERTO DOMÍNGUEZ HERNÁNDEZ.
SERVANDO RAFAEL CORTÉS GONZÁLEZ.

2023 - 2024

INTRODUCCIÓN.

Quizás este sea la última guía de estudio para preparar el examen extraordinario ya que en breve se tendrán los nuevos programas ajustados, antes un poco de historia. Desde el año 2018 se inició, en ese entonces, con los nuevos programas de Cálculo Diferencial e Integral I y II, ahora son nuevamente ajustados y esperamos que esta guía sirva de base para los nuevos programas ajustados, que al parecer es muy igual al anterior.

La Universidad Nacional Autónoma de México, tiene entre sus tareas fundamentales la docencia, la investigación y la difusión de la cultura. La tarea de docencia se lleva a cabo con la impartición de educación superior para formar profesionistas, investigadores, profesores universitarios y técnicos útiles a la sociedad; también organiza y realiza investigaciones, principalmente acerca de las condiciones y problemas nacionales, y extiende con la mayor amplitud posible los beneficios de la cultura

En las noticias nos informan que hay alumnos de bachillerato que al realizar su examen de admisión a la UNAM logran el examen perfecto, también hay alumnos que logran primeros lugares en los diversos concursos de conocimientos, por ejemplo, la olimpiada de matemáticas. Desafortunadamente también hay alumnos que no logran acreditar sus cursos regulares, debido a muchos factores en los cuales no podemos incidir, sin embargo, podemos elaborar materiales que los apoye a regularizar su situación, pues sabemos que muchos de ellos aspiran a convertirse en ingenieros, químicos, físicos, entre otras profesiones.

Por esta razón, nosotros los autores de la presenta *guía para examen extraordinario de Cálculo II*, nos dimos a la tarea de elaborar un material que les sirva de base para su preparación y estudio de esta asignatura, este trabajo está basado completamente en lo que marca el programa (de 2018), así como su contenido, la temática y el tratamiento sugerido en el programa indicativo de estudio, contempla totalmente el programa vigente de Cálculo Diferencial e Integral II. Cada unidad contiene teoría, ejemplos y un conjunto de ejercicios y problemas semejantes a los que se preguntan en el examen extraordinario, con el plus que se presenta la solución a cada uno de los ejercicios o problemas totalmente explicado.

a) Instrucciones.

Las características que tiene el presente material son: cada unidad muestra los *Propósitos generales* que se quiere que el alumno logre una vez que haya leído, haya practicado y resuelto los ejercicios, los cuales se le invita a resolver, en cada unidad se dan de inicio los *aprendizajes* que se desea que el alumno logre, así como las estrategias para que alcance el fin deseado.

El presente trabajo fue el resultado de un año de análisis, ensayos y errores, modificaciones, entre otras, pero estamos seguros de que el presente material será una base en la preparación de tu examen extraordinario de Cálculo II.

El alumno debe de seguir cuidadosamente los ejemplos y efectuar las actividades propuestas en cada unidad y subunidad, también debe de realizar los ejercicios que se proponen después de los ejemplos, asimismo es muy importante que no sólo realice los ejercicios mediante los algoritmos que se presentan, sino que estudie cuidadosamente los conceptos que dan origen al cálculo, los cuales se presentan al inicio de cada unidad.

Una forma de autoevaluación es a través de la aplicación del examen extraordinario que se presenta al final (se han anexado dos exámenes extraordinarios con el fin de que el alumno se autoevalúe), estos exámenes tienen sus respuestas totalmente detalladas.

b) Presentación de cada unidad.

En cada unidad hemos realizado una presentación, esta presentación está basada en las estrategias que el mismo programa sugiere, así como en el sentido y orientación del área de Matemáticas. Cuando fue posible, se da la flexibilidad con que pueden ser presentados algunos temas de esta asignatura.

En realidad, no es necesario llevar el orden propuesto, pero se sugiere que se estudie en el orden en que se presenta, ya que algunos temas se basan en las unidades anteriores o bien algunos ejercicios se basan en ejercicios que ya se han realizado anteriormente.

El primer propósito que nos planteamos es el tener un material de apoyo para nuestros alumnos que desafortunadamente no acreditaron su curso normal, aunque puede ser empleado en un curso curricular ya que cada unidad cuenta con las especificaciones de a) conocer, b) comprender y c) aplicar según la taxonomía de Bloom, así si les interesa sólo la parte de conocimiento se puede dirigir directamente a este tipo de ejercicios.

UNIDAD 1: DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

En esta primera unidad se tratan a partir de problemas propuestos las derivadas de las funciones trigonométricas, iniciando con las derivadas de las funciones seno y coseno y conjeturando los dos límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, el segundo límite se deduce de las propiedades geométricas de la derivada de una función, se continúa con las derivadas de las demás funciones trigonométricas y se realizan varios problemas de aplicación, con el fin de que el alumno practique este tipo de derivadas. Se recuerda la regla de la cadena para funciones trigonométricas, pues ahora es muy necesario para derivar funciones compuestas con las derivadas trigonométricas.

Continuamos primero con la derivada de la función exponencial, como es costumbre iniciamos planteando problemas que involucren cambios con esta función y luego ver la necesidad de conocer como calcular su variación, en este caso se estudia el importante límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, estudiar la derivada con funciones compuestas sólo es una aplicación de la regla de la cadena, pero para derivar la función $f(x) = 10^x$, requiere de la derivada de la función logaritmo que hasta este momento no se tiene.

Continuamos con la derivada de la función logaritmo, dando sus propiedades deducidas de las propiedades de la función exponencial basándonos en el hecho de que son funciones recíprocas, así sus propiedades son las propiedades recíprocas. Retomamos la derivada exponencial y se termina la unidad con la derivada de funciones exponenciales con base diferente a la base e .

Palabras clave: Funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, derivada, funciones compuestas, regla de la cadena.

UNIDAD 2: LA INTEGRAL DEFINIDA.

En esta unidad, se le da sentido a esta nueva operación a través de problemas de cálculo de la distancia cuando se conoce la velocidad, se construye a la integral paso a paso, con el método de exhaustión de Eudoxio, se sigue la sugerencia del programa continuando con el cálculo del área para regiones debajo de polinomios del tipo kx^n y se da una interpretación de la integral como el cálculo del área debajo de la gráfica de una función, pero no es el único significado que se le da, pues la integral se aplica en varias ramas del conocimiento humano.

Se define a las sumas de Riemann así como sus sumas, se deducen las propiedades mediante ejemplos y se establece el importante teorema fundamental del cálculo, se define a la integral definida como un número y se trabaja a la integral definida en varios ejercicios aplicados, como son el cálculo del área entre dos gráficas, cálculo de velocidades, problemas de crecimiento o bien decrecimiento.

Palabras clave: área de un rectángulo, área bajo una curva, aproximación numérica, suma infinita, integral, función integrable, Teorema Fundamental del Cálculo, antiderivada, primitiva.

UNIDAD 3: LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Con las integrales definidas vistas en la unidad anterior se inicia la abstracción a las integrales indefinidas, se insiste en que esta es una función y se van construyendo las primeras “fórmulas” de integración, iniciando con las funciones constantes, posteriormente con las funciones polinomiasles con base en las propiedades que la integral tiene, continuamos con las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, teniendo en cuenta al teorema fundamental del cálculo ya que deducir estas integrales por sumas de Riemann serían muy complicadas de deducir, así tenemos a lo que llamamos integrales inmediatas. Seguimos con la función antiderivada y con ella la constante de integración, así se plantean ejercicios en donde se dan condiciones para poder determinar a esta constante y hacer ver que la derivada e integral no necesariamente son operaciones inversas ya que existe una constante de integración la cual nos da una familia de funciones.

Con base en las integrales, que se han llamado inmediatas, se trabaja con el método de integración llamado cambio de variables, se les informa que la idea es encontrar en la función que se va a integrar (integrando) una función y su derivada esa función será el cambio que se requiere para que la función se transforme en una función más sencilla de integrar.

Continuamos con la integración por partes, se les deduce a partir de la derivada del producto de dos funciones y se les da la sugerencia de que función se debe elegir como u y cual como dv , se dan varios ejemplos en ejercicios aplicados, se les da la regla tabular y se termina con una batería de problemas aplicados.

Palabras clave: Integral indefinida, antiderivada, constante de integración, cambio de variable, integración por partes.

UNIDAD 4: MODELOS Y PREDICCIÓN.

Iniciamos con el modelo exponencial propuesto por el matemático Malthus y se critica a este modelo pues llega a la conclusión que la población crecería sin límite alguno. Se plantea la ecuación exponencial como primer modelo y se les define lo que es una ecuación diferencial, así como que es una ecuación diferencial separable, ya que, para resolver a esta ecuación, un método hace uso de la separación de las variables. Aunque no se resuelve, se les plantea la ecuación logística se les comenta que es una mejor modelo y se les dan varios ejemplos de modelos exponenciales como: disolución de un medicamento en el cuerpo, interés compuesto continuamente, radioactividad, entre otros.

Palabras clave: razón de cambio, crecimiento exponencial, modelación, predicción, condición inicial

c) Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico prácticas.

En la guía se presenta la teoría, algunos teoremas, las definiciones necesarias en cada unidad de estudio, también se dan ejemplos que refuerzan la teoría que se expone, a continuación se muestran un conjunto de ejercicios y problemas sobre el tema que se está tratando, posteriormente se presenta un conjunto de ejercicios y problemas, así que se sugiere primero, estudiar la teoría y posteriormente ejercitarse con los ejemplos y problemas ya resueltos que se presentan en cada unidad, es recomendable que en un inicio no vea la solución, sino que lo resuelva y después verifique su respuesta con la solución que se muestra, posteriormente ir al conjunto de ejercicios y problemas propuestos, todos ellos con su solución, una vez que sientas que has aprendido la teoría y tengas la

práctica necesaria, al final se muestran dos exámenes extraordinarios con su solución, estos exámenes son una forma de autoevaluación de los conocimientos que vas adquiriendo y puedan ver su avance, también los exámenes extraordinarios están totalmente resueltos.

d) Formas de autoevaluación o verificación del aprendizaje.

Como se mencionó en el párrafo anterior, se muestran dos exámenes extraordinarios, que ya se han aplicado en sus respectivos periodo y año, para que se autoevalúes y verifiques tu nivel de avance, si no alcanzas el puntaje mínimo para aprobar estos exámenes, debes de ver en que ejercicios te hace más práctica y reforzar estos temas nuevamente, recuerda siempre realizar el ejercicio o problema por ti y posteriormente ver la solución.

e) Bibliografía básica y complementaria.

La bibliografía se presenta al final de la guía.

Atentamente los coautores.
Francisco Javier Hernández Velasco.
Juan Pablo Cordero Santiago.
Roberto Domínguez Hernández.
Servando Rafael Cortés González.

ÍNDICE.

UNIDAD 1.

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

SECCIÓN 1. DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Funciones trigonométricas y el estudio de su variación	1
Derivada de las funciones seno y coseno	3
Ejercicios resueltos	6
Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante, secante y cosecante	8
Ejercicios resueltos	9
Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas.....	10
Ejercicios resueltos	11
Resolución de problemas en diversos contextos.....	12
SECCIÓN 2. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.	16
Derivada de las funciones e^x , e^u , 10^x y 10^u	16
Derivada de las funciones $\ln x$, $\ln u$, $\log x$, $\log u$	19
Resolución de problemas en diversos contextos.....	21
Ejercicios propuestos y resueltos.....	25

UNIDAD 2.	69
-----------	----

LA INTEGRAL DEFINIDA.

SECCIÓN 1. EL ÁREA BAJO UNA CURVA

El área bajo la gráfica de una función constante o lineal.....	69
Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos.	71
Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$ donde k es una constante.....	76
Interpretación del signo de la integral con el área bajo una curva.....	80

SECCIÓN 2. LA INTEGRAL DEFINIDA.

Definición.....	55
Propiedades.....	
LA FUNCIÓN ÁREA COMO UNA ANTIDERIVADA.....	59
FORMULACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.....	86
APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.....	88
Área comprendida entre dos funciones.....	88
Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.....	89
Ejercicios resueltos	90
UNIDAD 3.	121

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

FÓRMULAS INMEDIATAS DE INTEGRACIÓN.....	121
RELACIÓN ENTRE LA CONDICIÓN INICIAL Y LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN.....	123
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN	
Cambio de variable.....	125
Integración por partes.....	127
PROBLEMAS DE APLICACIÓN EN DIFERENTES CONTEXTOS.....	131
Ejercicios resueltos	134

UNIDAD 4

Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$	168
Método de separación de variables.....	169
Condiciones iniciales aplicadas al modelo $P(t) = Ce^{kt}$	171
Ejercicios resueltos	173
Exámenes de autoevaluación.....	195
Bibliografía.....	211

UNIDAD 1

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

PROPÓSITOS GENERALES.

- Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelan con ellas.

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

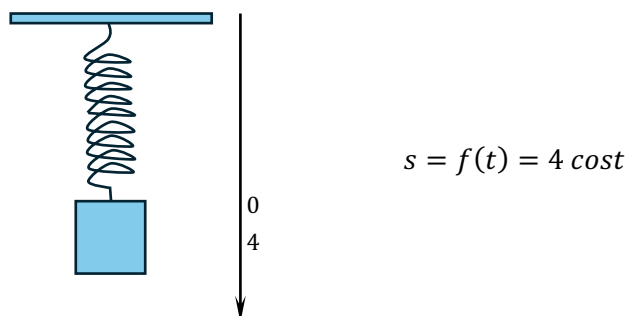
La palabra trigonometría proviene del griego y significa “medida del triángulo”, como sabemos la trigonometría es la ciencia que estudia las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de este, y al mismo tiempo aplica estas relaciones en la solución de diversos problemas. En la antigüedad aproximadamente 100 años antes de Cristo, los griegos aplicaban este conocimiento para resolver problemas de astronomía, actualmente la trigonometría se aplica a la solución de problemas tanto estáticos como problemas en donde hay variación, en esta sección consideraremos problemas del segundo tipo.

- **Funciones trigonométricas y el estudio de su variación.**

Las funciones trigonométricas nos ayudan a modelar fenómenos en donde hay ciclos que se repiten, como; el día y la noche, las mareas, la circulación de la sangre en el cuerpo humano, entre otras aplicaciones de las diferentes ramas del conocimiento humano. Por ejemplo, consideremos los problemas siguientes:

Ejemplo 1.

Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 centímetros más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte y se deja en libertad en el instante $t = 0$ nota que la dirección hacia abajo es positiva. Su posición en el instante t es



Encuentra la velocidad y la aceleración en el instante t y empléala para analizar el movimiento del objeto.

Ejemplo 2.

El desplazamiento de una partícula en una cuerda que vibra lo representa la función

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$$

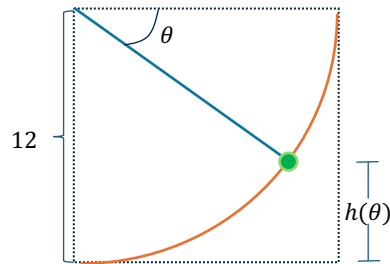
En donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentra la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

Ejemplo 3.

Una escalera de 5 metros de largo está apoyada sobre una pared vertical. La pared forma un ángulo recto con el suelo. Si y es la distancia entre la parte superior de la escalera y el suelo y θ es el ángulo formado entre la escalera y el suelo, encuentra la razón de cambio de y respecto al ángulo θ , cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Ejemplo 4.

Un péndulo de 12 centímetros de longitud oscila de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta horizontal, como se muestra en la figura.



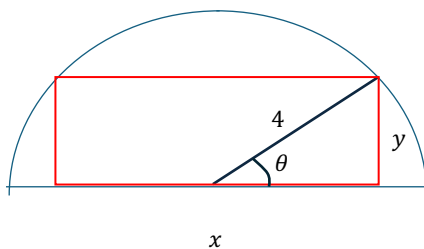
Si $h(\theta)$ es la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja. Determina la razón de cambio instantánea de $h(\theta)$ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Algunas veces un problema se puede modelar con funciones algebraicas como con funciones trigonométricas, por ejemplo:

Ejemplo 5.

Encuentra las dimensiones de un rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una semicircunferencia de radio 4

Consideremos la figura siguiente:



Sean x la longitud de la base, y la longitud de la altura, queremos que el área A del rectángulo sea máxima, es decir, queremos encontrar el máximo de la expresión

$$A = xy$$

Por el teorema de Pitágoras se tiene

$$16 = \frac{x^2}{4} + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2}$$

Sustituyendo la variable y en A , se tiene

$$A = \frac{x}{2}\sqrt{64 - x^2}$$

Pero si consideramos el ángulo θ como se ilustra en la figura, se tiene

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4\sin(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{8} \Rightarrow x = 8\cos(\theta) \end{aligned}$$

El área buscada es

$$A(\theta) = 32 \sin(\theta) \cos(\theta) = 16 \sin(2\theta)$$

Esta última expresión es más sencilla de derivar que su equivalente algebraico.

- **Derivada de las funciones seno y coseno.**

Hemos mostrado algunos ejemplos en donde se aplican las funciones trigonométricas y principalmente su variación, es decir su derivada, las derivadas de las funciones trigonométricas se pueden deducir de varias maneras, iniciaremos con las derivadas de las funciones seno y coseno. Primero lo haremos de una manera cualitativa y después de manera algebraica.

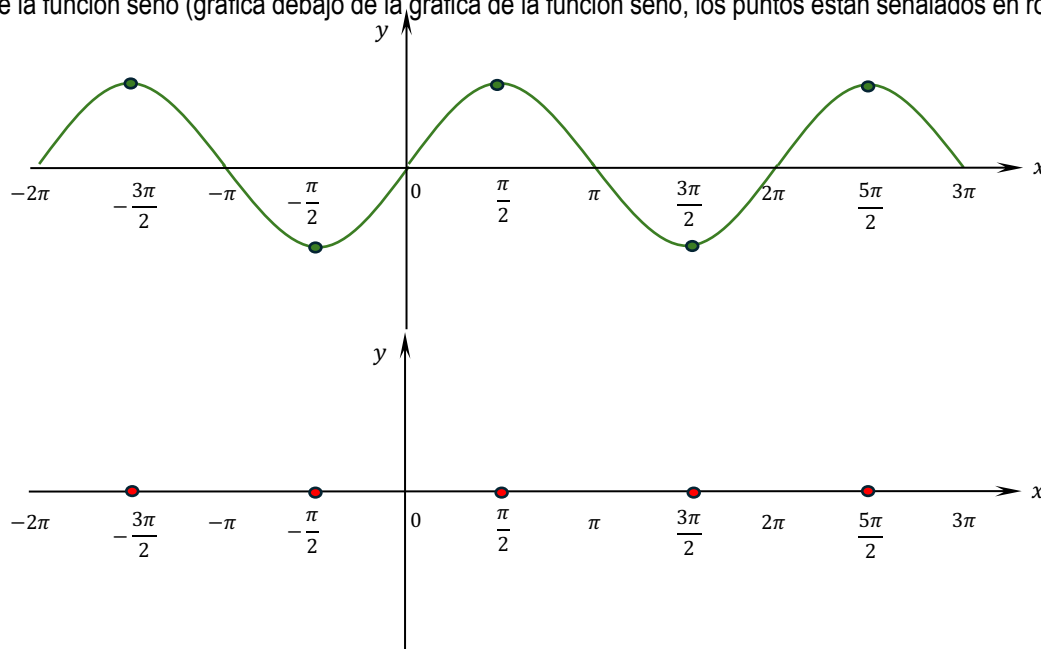
Recordemos de la cuarta unidad de nuestro primer curso la forma en que se traza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la función y con base en ella conjeturemos la derivada de la función seno.

Consideremos a la función

$$f(x) = \sin x$$

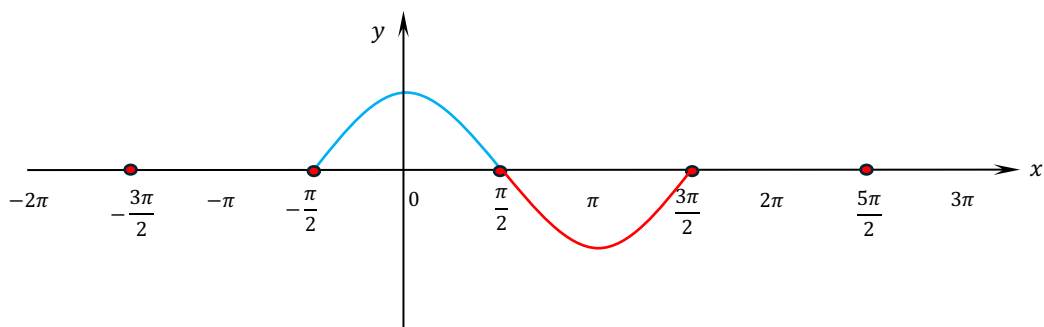
Entendemos que $\sin x$ el seno del ángulo cuya medida en radianes es x , iniciemos trazando la gráfica de la función $\sin x$.

En los puntos máximos y mínimos la derivada es cero, así tenemos los primeros puntos de la derivada de la función seno (gráfica debajo de la gráfica de la función seno, los puntos están señalados en rojo).



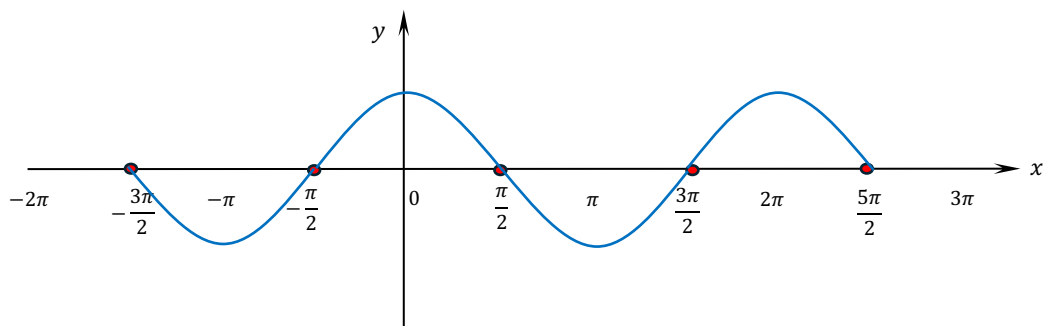
Primeros puntos de la derivada de la función $\sin x$

Ahora analicemos la forma que debe de tener la derivada de la función por intervalos, iniciemos con el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, en este intervalo la función es creciente, así $f'(x) > 0$. La función en ese intervalo es cóncava, por lo que $f''(x) < 0$, por lo tanto $f'(x)$ es decreciente (curva azul). En tanto en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la función sigue creciente pero ahora es cóncava, por lo que su derivada $f'(x)$ decrece, como se muestra enseguida.



Ahora, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ la función es decreciente, por lo que $f'(x) < 0$, también es cóncava, es decir $f''(x) < 0$ por lo que $f'(x)$ decrece, se muestra con la curva roja, mientras que en el intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, la función decrece y es convexa, entonces $f'(x) < 0$ y $f'(x)$ crece.

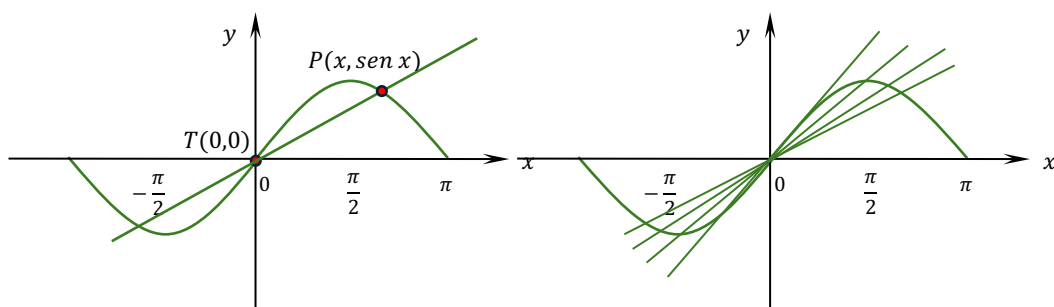
Una vez que hemos completado un periodo, este se repite, en cada intervalo de longitud 2π , se muestra la gráfica de la derivada de la función seno.



Podemos conjeturar que su derivada tiene la forma de la función coseno.

Continuamos deduciendo la derivada de la función $f(x) = \text{sen } x$, pero ahora lo haremos de manera algebraica.

La forma clásica es a través de; primero, calcular la derivada de la función seno y coseno en el origen, con este fin tracemos la función seno y calculemos la pendiente de la recta tangente en el origen, (observa la gráfica del lado izquierdo), como recordaremos la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en ese punto.



La recta (que llamaremos secante) que pasa por el origen $T(0,0)$ y un punto genérico $P(x, \text{sen } x)$ tiene pendiente m

$$m = \frac{\text{sen } x - 0}{x - 0} = \frac{\text{sen } x}{x}$$

Ahora, $x \neq 0$, así que no podemos evaluar a la pendiente m en $x = 0$, hay varias formas de saber este valor, aquí lo haremos por medio de una aproximación (del lado izquierdo, se muestra

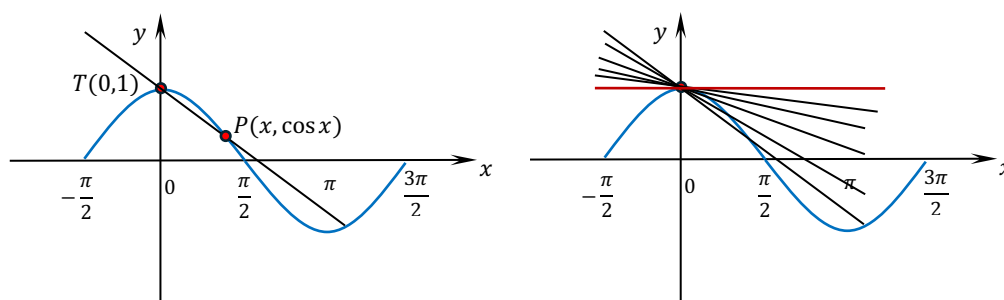
geométricamente el proceso), con este fin se te invita a llenar la tabla siguiente en donde se han puesto algunos valores de la pendiente m

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.00001	0.0001	0.01	0.1	0.5
m	0.95885			.9999998					0.999983		

Podemos conjeturar que:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Por otra parte, la derivada de la función coseno en el origen, la conjeturaremos de la misma manera. Tracemos la gráfica de esta función y volvamos a realizar el mismo procedimiento.



Trazamos la recta que pasa por los puntos $T(0,1)$ y un punto genérico $P(x, \cos x)$, la pendiente m de esta recta se calcula de la manera siguiente:

$$m = \frac{\cos x - 1}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x}$$

con $x \neq 0$, pero queremos saber el valor de la pendiente m cuando x es cero, ahora es sencillo ver que la recta tangente en el punto T es cero, ya que la recta es horizontal porque en este punto hay un máximo la de función, así podemos concluir que:

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Ahora recordemos el seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, a saber

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y \quad \text{y} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{sen } y \quad \text{y} \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{sen } y$$

Con base en ellos podemos probar la identidad siguiente

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y$$

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{sen } y$$

Calculamos la diferencia

$$\text{sen}(x + y) - \text{sen}(x - y) = 2 \cos x \text{sen } y$$

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} x + y &= A \\ x - y &= B \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para x y y , se obtiene

$$x = \frac{A+B}{2}, y = \frac{A-B}{2}$$

obtenemos la diferencia de senos,

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ahora mediante la definición de la derivada de una función.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

obtenemos la derivada de la función seno.

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}(a))' &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos\left(\frac{a+a}{2}\right) (1) = \cos a \end{aligned}$$

Por lo cual $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

Utilizando la relación pitagórica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

y recordando la regla $(f^2)' = 2ff'$ se obtiene

$$2\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' + 2\cos x (\cos x)' = 0$$

Despejamos a $(\cos x)'$ y obtenemos

$$(\cos x)' = -\frac{2\operatorname{sen} x (\cos x)}{2\cos x} = -\operatorname{sen} x$$

Concluimos que:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \text{ y } (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

Con base en los límites vistos en esta sección, a saber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Calcula los límites.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$$

Solución.

El límite calculado nos indica que tanto el argumento como el denominador deben ser igual y ambos tender a cero, por esta razón igualamos al denominador al argumento, multiplicando por 5 y a su vez dividiendo entre 5, para no alterar la igualdad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \text{sen} 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 5x}{5x} = 5(1) = 5$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 9x}{\text{sen} 2x}$

Solución.

Primero dividimos entre x , tanto numerador como denominador, para llevarla a la forma conocida

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 9x}{\text{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen} 9x}{x}}{\frac{\text{sen} 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9 \text{sen} 9x}{9x}}{\frac{2 \text{sen} 2x}{2x}} = \frac{9(1)}{2(1)} = \frac{9}{2}$$

Como en el caso anterior multiplicamos por la cantidad que iguale al numerador con el argumento, después aplicamos la regla del cociente de los límites.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\cos x)}{\sec x}$

Solución.

En este caso el denominador no es cero, así podemos calcular el límite directamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\cos x)}{\sec x} = \frac{\text{sen}(1)}{1} = \text{sen}(1)$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$

Solución.

Como en el caso anterior, el denominador no es cero cuando $x = 0$, así se puede calcular el límite directamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x - \cos x}{\cos 2x} = \frac{0 - 1}{1} = -1$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x + \tan x}$

Solución.

Dividimos tanto numerador como denominador por x , para llevarlo a la forma conocida

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x + \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen} x}{x}}{\frac{x + \tan x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen} x}{x}}{1 + \frac{\tan x}{x}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$

Solución.

Factoricemos el denominador $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 1 \left(\frac{1}{1+2} \right) = \frac{1}{3}$$

- Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Mediante las identidades trigonométricas ya sea pitagóricas, de cociente o de reciprocidad, aunado a las reglas de derivación podemos deducir las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, por ejemplo:

Deduzcamos la derivada de la función tangente, con este fin debemos recordar tres resultados, primero las identidades

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ y } \frac{1}{\cos x} = \sec x \text{ y la regla de la derivada del cociente, a saber } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

Con base en las derivadas obtenidas, procedamos a calcular la derivada de la función $f(x) = \tan x$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

Procede de la misma manera para obtener la derivada de la función cotangente, debes de obtener

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

Ahora calculemos la derivada de la función secante, mediante la identidad

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

derivamos ambos miembros

$$0 + 2 \tan x (\tan x)' = 2 \sec x (\sec x)'$$

despejando a $(\sec x)'$, se obtiene

$$(\sec x)' = \frac{\tan x (\sec^2 x)}{\sec x} = \sec x \tan x$$

finalmente, te invitamos a que obtengas la derivada de la función $\csc x$, mediante la identidad

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ o } 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

debes de obtener que $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

Ahora ya tenemos las derivadas de las funciones trigonométricas, hagamos un resumen de ellas en la tabla siguiente.

<i>Función</i>	<i>Derivada</i>
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Encuentra la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b) $f(x) = x \cos x$

c) $f(x) = 6 \operatorname{sen} x \cos x$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{x \cos x - 1(\operatorname{sen} x)}{x^2} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

b) $f'(x) = 1 \cos x + x(-\operatorname{sen} x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$

c) $f'(x) = 6[\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) + \cos x \cos x] = 6[-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x]$

2. Encuentra la derivada de la función
- $f(x) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$
- .

Solución.

$$f'(x) = \frac{(1 - \tan x)\sec^2 x - (1 + \tan x)(-\sec^2 x)}{(1 - \tan x)^2} = \frac{\sec^2 x(2)}{(1 - \tan x)^2} = \frac{2\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2}$$

3. Deriva a la función
- $f(x) = \frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\cos x}$
- .

Solución.

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sec^2 x + \cos x) - (\tan x + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\sec x + \cos^2 x + \operatorname{sen} x \tan x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x \tan x + \sec x}{\cos^2 x}$$

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada por
- $f(x) = \tan x$
- en el punto
- $T\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
- .

Solución.

Primero debemos verificar que el punto está en la gráfica de la función, para este fin se evalúa a la función en el punto dado, en este caso

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

El punto está en la gráfica, así que su derivada será la pendiente de la recta tangente, una vez obtenida, sólo aplicaremos la forma de la recta punto pendiente.

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Así

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

5. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

en el punto $T(0,1)$.

Solución.

Primero debemos verificar que el punto está en la gráfica de la función, para este fin se evalúa a la función en el punto dado, en este caso

$$f(0) = \frac{1}{\operatorname{sen} 0 + \cos 0} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

Igual que en el caso anterior, calculemos a la derivada de la función y evaluémosla en el punto indica para obtener su pendiente y finalmente apliquemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente.

$$f'(x) = -\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

La pendiente m tiene el valor

$$m(0) = -\frac{\cos 0 - \operatorname{sen} 0}{(\operatorname{sen} 0 + \cos 0)^2} = -\frac{1 - 0}{(0 + 1)^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 1 = -1(x - 0) = -x \Rightarrow y = -x + 1$$

- Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas.

En ocasiones debemos derivar no sólo a la función trigonométrica o bien algebraica, sino funciones del tipo

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

Que si bien, sabemos que la derivada de la función seno es la función coseno y $(x^2)' = 2x$ ¿Cómo podremos derivar a la función f ?

Lo que hemos estudiado hasta ahora no nos permite derivar funciones de este tipo, en donde hay dos funciones relacionadas de esta manera, este tipo de funciones se llaman funciones compuestas, en este caso se tienen las funciones seno y el cuadrado de equis. Hay funciones compuestas de dos, tres y más funciones, para poder derivar a este tipo de funciones, se requiere de una regla a la que se le nombra *regla de la cadena*, pero primero, hagamos un resumen.

La función compuesta de dos funciones, a las que llamaremos f y g se denota por $f \circ g$ y se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

la función g se aplica primero y después la función f , por su posición a la función g se le llama función interna (la de adentro) y a la función f la función externa (la de afuera), en nuestra función inicial, llamémosla función h , se tiene

$$h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

la función interna es $g(x) = x^2$ y la función externa $f(x) = \operatorname{sen} x$, efectuemos las siguientes composiciones

Calcula $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, en donde $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Solución:

Por definición

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \tan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

mientras que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\tan x) = \frac{1}{\tan^2 x}$$

podemos observar que

$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$$

es decir, la composición de funciones no es conmutativa

La derivada de la composición es el producto de la derivada de la función externa en la función interna multiplicada por la derivada de la función interna. Se considera uno de los resultados más importantes en las reglas de derivación, aunque no se demostrará la regla de la cadena, veamos su plausibilidad.

Consideremos a la derivada en una de sus formas, es decir, como razón de cambio, así se tiene $\frac{du}{dx}$ como la razón de cambio de la función u con respecto a x y $\frac{dy}{du}$ la razón de cambio de y con relación a la función u y $\frac{dy}{dx}$, la razón de cambio de y en relación con x . Si u cambia el doble de rápido que x y y tres veces más rápido que u , entonces resulta razonable que y cambie seis veces más rápido que x , por consiguiente, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

REGLA DE LA CADENA.

Si f y g son dos funciones derivables y $h = f \circ g$ es la función compuesta definida por $h(x) = f(g(x))$, entonces h es derivable y h' se expresa mediante

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ donde $u = g(x)$ son funciones derivables entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

Encuentra la derivada de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \sin(x^2)$

Solución.

$$f'(x) = \cos(x^2)(2x) = 2x\cos(x^2)$$

2. $f(x) = \cos^3(3x - 2)$

Solución.

$$f'(x) = 3\cos^2(3x - 2)(-\sin(3x - 2))(3) = -9\cos^2(3x - 2)\sin(3x - 2)$$

3. $f(x) = \tan^2 x$

Solución.

$$f'(x) = 2\tan x \sec^2 x$$

4. $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$

Solución.

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}}$$

5. $f(x) = x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$

Solución.

$$f'(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) + x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

6. $f(x) = (1 + \cos^2 x)^5$

Solución.

$$f'(x) = 5(1 + \cos^2 x)^4 (0 + 2 \cos x (-\operatorname{sen} x)) = -5 \operatorname{sen}(2x)(1 + \cos^2 x)^4$$

- Resolución de problemas en diversos contextos.

Existe una variedad de problemas cuya solución requiere de las funciones trigonométricas y de sus derivadas, en esta sección resolveremos algunos de estos ejercicios como ejemplo de las aplicaciones que estas funciones tienen, iniciemos con las aplicaciones geométricas.

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, en el punto $T \left(\frac{\pi}{6}, 1 \right)$.

Solución.

Primero debemos de verificar el punto este en la gráfica de la función, con este fin calculemos la imagen de la función dada en el punto dado.

$$f \left(\frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ahora, derivamos a la función con el fin de calcular su pendiente m

$$m(x) = f'(x) = \cos x - 2 \operatorname{sen}(2x)$$

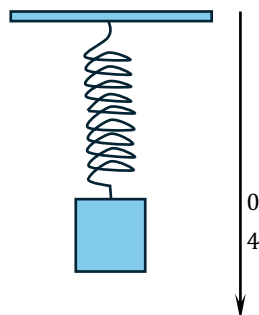
En particular

$$m = m \left(\frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

2. Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 centímetros más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte y se deja en libertad en el instante $t = 0$ nota que la dirección hacia abajo es positiva. Su posición en el instante t es



$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentra la velocidad y la aceleración en el instante t y empléala para analizar el movimiento del objeto.

Solución.

La velocidad v del objeto es la derivada de la posición, así

$$v(t) = f'(t) = -4\text{sen } t$$

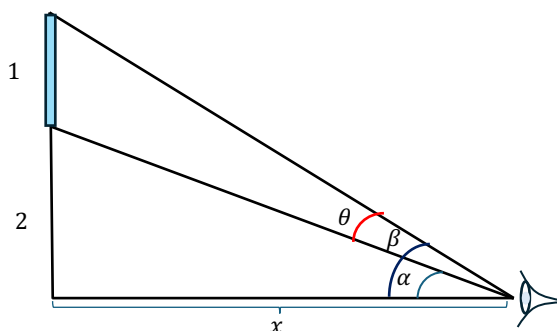
El objeto oscila desde el punto más bajo, $s = 4 \text{ cm}$, hasta el punto más alto $s = -4 \text{ cm}$, su periodo es 2π el cual es el periodo de la función coseno.

La rapidez, el valor absoluto de la velocidad es $|v| = 4|\text{sen } t|$, es máxima cuando $\text{sen } t = 1$, es decir cuando $\text{cost} = 0$, lo que significa que el objeto se mueve más rápido cuando pasa por su posición de equilibrio. Su rapidez es 0 cuando $\text{sen } t = 0$, es decir, en los puntos más abajo y más arriba.

3. La base de un cuadro sobre una pared está a 2 metros por encima del ojo de un observador. El lado vertical del cuadrado mide 1 metro. ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse el observador para maximizar el ángulo visual que ese cuadro subtende?

Solución.

Sean los ángulos α, β y $\theta = \beta - \alpha$, como se muestra en el dibujo, x la distancia de la pared al ojo del observador.



entonces $\tan \beta = \frac{3}{x}$, $\tan \alpha = \frac{2}{x}$ y

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + 6}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + 6}$$

derivando

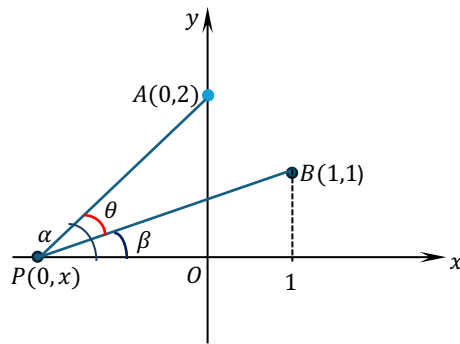
$$\frac{d(\tan \theta)}{dx} = \frac{x^2 + 6 - x(2x)}{(x^2 + 6)^2} = \frac{6 - x^2}{(x^2 + 6)^2}$$

sus puntos críticos son:

$$x = \pm \sqrt{6}$$

Como se trata de una longitud elegimos $x = \sqrt{6}$, el cual es claro que corresponde a un máximo, se puede aplicar el criterio de la primera derivada.

4. Encuentra el punto P en el eje x tal que el ángulo APB de la figura sea máxima.



Debemos optimizar el ángulo θ , llamemos α al ángulo APO y por β al ángulo BPO como se muestra en la figura

tenemos que

$$\tan \beta = \frac{1}{1+x} \text{ y } \tan \alpha = \frac{2}{x}$$

$$\text{por lo tanto } \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{1+x}}{1 + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1+x}} = \frac{\frac{2+2x-xx}{x(1+x)}}{\frac{x(1+x)+2}{x(1+x)}} = \frac{2+x}{x^2+x+2}$$

derivamos a la función

$$\frac{d \tan(\theta)}{dx} = \frac{x^2 + x + 2 - (2+x)(2x+1)}{(x^2 + x + 2)^2} = -\frac{x^2 + 4x}{(x^2 + x + 2)^2}$$

el punto crítico, se encuentra cuando

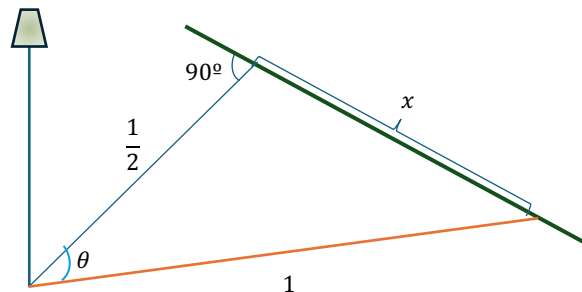
$$x^2 + 4x = x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -4$$

en $x = 0$ hay un máximo, mientras que en $x = -4$, hay un mínimo. El punto buscado es $P(0,0)$.

5. La señal de un faro situado a medio kilómetro de la costa gira a razón de 2 revoluciones por minuto (rpm). Supongamos que la línea de la costa es recta, ¿a qué velocidad se desplaza el rayo de luz al pasar por un punto que dista 1 kilómetro del faro?

Solución.

Consideremos el ángulo θ (en radianes) y sea x en kilómetros como se ilustra



Sabemos que $\frac{d\theta}{dt} = 2(2\pi) = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}$, calculemos la tangente del ángulo θ , así

$$\tan \theta = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \tan \theta$$

queremos saber $\frac{dx}{dt}$ cuando vale x , cuando hay un kilómetro de distancia hacia el faro, con este fin, apliquemos la derivada a la función aplicando la regla de la cadena.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \sec^2 \theta (4\pi) \frac{km}{min} = 2\pi \sec^2 \theta \frac{km}{min}$$

aplicando el teorema de Pitágoras, cuando la distancia a la costa está a un kilómetro

$$1 = \frac{1}{4} + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

elegimos el valor positivo, ya que x lo es, se cumple

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

empleando las identidades por reciprocidad $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

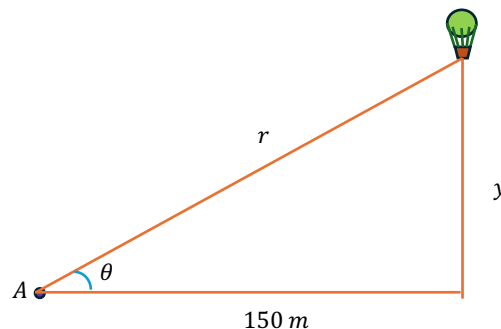
por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi(4) \frac{km}{min} = 8\pi \frac{km}{min}$$

6. Un globo se eleva del suelo a $43 \frac{m}{min}$, es seguido por un telémetro situado en el punto A a una distancia de $150 m$ del punto de despegue. Encuentra la razón de cambio del ángulo en el punto A cuando el globo está a una distancia de $150 m$ del suelo.

Solución.

Denotemos por y a la altura del globo y por θ al ángulo en el punto A , como se muestra en la figura.



Queremos saber el valor de $\frac{d\theta}{dt}$ cuando la altura del globo sea de $150 m$ ($y = 150$), con este fin calculemos la tangente del ángulo θ .

$$\tan \theta = \frac{y}{150}$$

y después su razón de cambio

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{1}{150} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{150} (43) = \frac{43}{150}$$

mediante la regla de la cadena

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{d(\tan \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

encontramos la igualdad

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{43}{150}$$

Cuando $y = 150m$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2$, por lo cual

$$2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{43}{150} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{43}{300} \frac{rad}{min}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

El estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas proviene de siglos atrás. Se cuenta la historia del tablero de ajedrez en donde se debería poner un grano (arroz o trigo) en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así, en cada casilla subsecuente el doble de la anterior, el patrón donde a cada paso se multiplica por la misma cantidad (progresión geométrica), van formando a la función exponencial, las progresiones geométricas se remontan a la antigua Grecia y fue hasta el siglo XVIII, donde finalmente la función exponencial fue descubierta, sin embargo para hablar de la función exponencial, es necesario también estudiar a la función logaritmo.

Los logaritmos fueron creados de manera independiente por los matemáticos John Napier (escoses) y por Jost Bürgi (suizo), se tenía el objetivo de simplificar los cálculos en la trigonometría esférica. Los logaritmos vinculan la multiplicación en los números reales positivos y la suma en los números reales.

- Derivada de las funciones e^x , e^u , 10^x y 10^u .

En los niveles básicos nos han enseñado las operaciones del tipo $4^2 = 16$, en donde el número 4 se le llama base, al número 2 exponente y al número 16 potencia, cuando el exponente es un número natural éste indica el número de veces en que debe de multiplicarse la base, por ejemplo: $4^3 = 4(4)(4)$, el cuatro debe ser multiplicado tres veces.

También se nos dijo que, si el exponente es negativo, entonces se puede realizar la operación siguiente:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, y así se da sentido a las expresiones del tipo a^n , cuando $a > 0$ y n es un número entero negativo, posteriormente, nos indicaron que se puede definir el número a^n cuando $a > 0$ y el número n es número racional, por ejemplo:

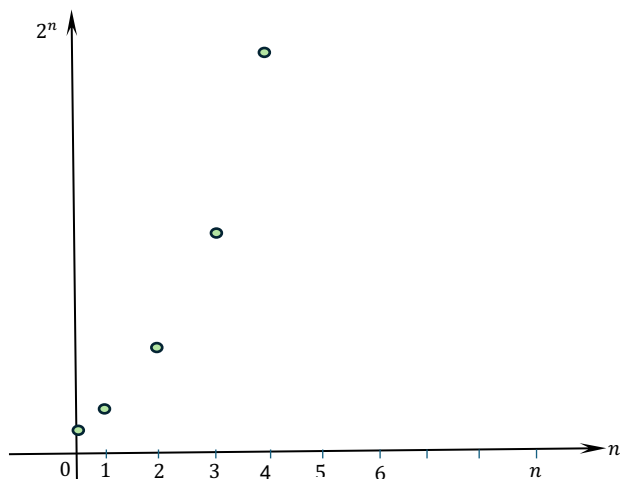
$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, 8^{3/4} = \sqrt[4]{8^3}.$$

En general $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ($q \neq 0$).

Para el caso del ajedrez en donde se pone un grano de arroz (o trigo) en el primer cuadro y por cada cuadro subsiguiente se duplica el número de granos, en el primer cuadro 1 grano, en el segundo 2 granos, en el tercero 4 granos, ..., hagamos un resumen en la tabla siguiente:

n	1	2	3	4	5	...	n
Granos	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$2 = 2^4$	...	2^{n-1}

Podemos deducir que en el cuadro n hay 2^{n-1} granos, a esta función la podemos graficar, como se muestra a continuación



Nos damos cuenta de que la gráfica tiene muchos espacios, aunque en estos momentos nos interesa saber que es creciente esta propiedad sucede para toda función del tipo $f(x) = a^x$ con $a > 1$ y será decreciente cuando $0 < a < 1$. Una pregunta muy importante es ¿qué sucede con el número a^x cuando el exponente es un número irracional? Por ejemplo, ¿cuánto vale $4^{\sqrt{3}}$ o 2^{π} ? Para estos casos podemos aprovechar el hecho de que la función a^x es creciente de la manera siguiente, supongamos que queremos dar sentido al número $2^{\sqrt{3}}$.

sabemos que

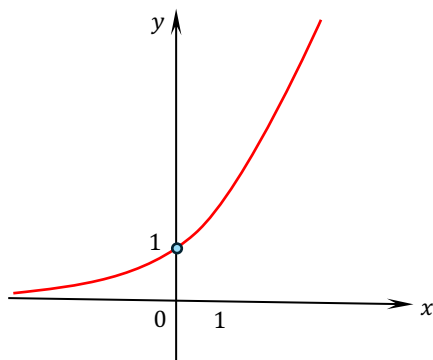
$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

entonces

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

como 1.7 y 1.8 son números racionales entonces conocemos los valores de $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$, así podemos irnos aproximando al valor de $2^{\sqrt{3}}$ dando valores cada vez más cercanos al valor de $\sqrt{3}$, el valor aproximado es $2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$ y dar sentido a este tipo de números.

Con las observaciones anteriores podemos definir a la función 2^x en donde la variable independiente x es un número real y la gráfica está completamente llena, ya no tiene huecos.



Podemos conjeturar varias propiedades de la función $f(x) = 2^x$, por ejemplo, como es una función creciente, entonces $f' > 0$, también es convexa por lo que $f'' > 0$, también $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, debemos tener en claro que la función $f(x) = 2^x$ es una función exponencial, porque la variable, x , es el exponente (existen definiciones más formales), no se debe de confundir con la función potencia (función algebraica) $f(x) = x^2$, aquí la variable x es la base.

Hagamos un resumen de las propiedades de la función exponencial, donde estamos considerando que $a > 1$.

Propiedades de la función exponencial $f(x) = a^x$.

$$a) a^0 = 1 \quad b) a^1 = a \quad c) a^{x+y} = a^x a^y \quad d) a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad e) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$f) (ab)^x = a^x b^x \quad g) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad h) (a^y)^x = a^{xy} \quad i) (a^x)' > 0.$$

$$j) (a^x)'' > 0 \quad k) \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad l) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

Históricamente el número llamado e surgió de varios problemas, entre ellos el cálculo del área de la hipérbola equilátera $xy = 1$, pero principalmente en aplicación de problemas de interés compuesto continuamente, aunque hay varias formas de definir a este importante número, aquí daremos la siguiente:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

El cual tiene un valor aproximado de $e \approx 2.71828182$, se sugiere estudiar su historia, un importante resultado es la derivada de la función exponencial con base este número, que como hemos visto por ser $e > 1$, su gráfica es creciente y convexa, ahora calcularemos su derivada, primero en el origen y posteriormente en cualquier punto.

Definimos la función $f(x) = e^x$, entonces la derivada en el origen está dada por

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

realicemos la tabla siguiente

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5
$\frac{e^x - 1}{x}$	0.78939	0.95163	0.995	0.9995	0.99995		1.00005	1.0005	1.005	1.052	1.2974

Podemos observar que tanto por el lado izquierdo como por el lado derecho la derivada se acerca al valor de uno.

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

en general, la derivada en el punto $x = a$, es.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a(e^{x-a} - 1)}{x - a} = e^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a(1) = e^a.$$

hemos deducido el importante resultado que la derivada de la función exponencial es ella misma, en símbolos

$$\text{Si } f(x) = e^x, \text{ entonces } f'(x) = e^x.$$

Mediante la regla de la cadena, si $f(x) = e^x$ y g es cualquier otra función en donde se pueda efectuar la composición

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Se tiene, que si definimos por $h(x) = f(g(x))$, con $f(x) = e^x$, entonces

$$a) h(x) = e^{g(x)}$$

$$b) h'(x) = e^{g(x)} g'(x) = g'(x) e^{g(x)}$$

b) se suele escribir como $(e^u)' = e^u u' = u' e^u$.

Ejemplo.

Encuentra la derivada de las funciones siguientes.

$$a) f(x) = e^{-x/2}$$

$$b) f(x) = e^{x^2}$$

$$c) f(x) = x^2 e^{x^3}$$

Solución.

$$a) f'(x) = e^{-x/2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad b) f'(x) = e^{x^2} (2x) = 2x e^{x^2}$$

Aplicamos la regla del producto

$$c) f'(x) = 2x e^{x^3} + x^2 e^{x^3} (3x^2) = x e^{x^3} (2 + 3x^3) = x(2 + 3x^3) e^{x^3}$$

Ejemplo.

Encuentra los máximos y los mínimos de la función $f(x) = x^2 e^x$

Solución.

Localizamos los puntos críticos

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

entonces los puntos críticos son:

$$x = 0, x = -2$$

para saber si corresponden a un máximo o mínimo, aplicamos el criterio de la segunda derivada, así derivamos nuevamente.

$$f''(x) = 2e^x + 2x e^x + 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 4x + 2)$$

ahora

$$f''(0) = 2 > 0 \text{ hay un mínimo,}$$

$$f''(-2) = e^{-2} (4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0 \text{ hay un máximo.}$$

- Derivada de las funciones $\ln x$, $\ln u$, $\log x$, $\log u$.

Las funciones exponencial y logaritmo son funciones inversas una de la otra, por eso tienen propiedades también recíprocas, las propiedades de la función logaritmo se deducen de las propiedades de la función exponencial. Recordemos la definición clásica de logaritmo que nos enseñaron en la escuela secundaria

$$\text{Si } a, b \text{ y } x \text{ son números positivos y } a^x = b, \text{ entonces } x = \log_a b$$

siempre y cuando $b \neq 1$.

Así, se define a la función logaritmo de x , como

$$f(x) = \log_a x$$

cuando $a = 10$, se escribe $\log x$, pero si la base es $a = e$, entonces se escribe $\ln x$, como logaritmo natural (al parecer no tiene nada de natural, pero así se nombra).

en la tabla siguiente se hace un resumen de las propiedades de la función logaritmo con base en las propiedades de la función exponencial.

Propiedades de los exponentes	Propiedades de los logaritmos.
$a^0 = 1$	$\ln(1) = 0$
$a^{x+y} = a^x a^y$	$\ln(xy) = \ln x + \ln y$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\ln(x^y) = y \ln x$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Hemos definido a la función logaritmo con base 10 y con base el número e , pero ¿cómo se calcula el logaritmo de un número diferente a ellos?

Supongamos que queremos calcular $\log_3(7)$, para este fin recurrimos a la forma

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados

$$\ln(a^x) = b \Rightarrow x \ln a = \ln b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Por lo que

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Sabemos que la función exponencial es la función inversa de logaritmo, es decir

$$e^{\ln x} = x$$

Al derivar, vía la regla de la cadena

$$e^{\ln x} (\ln x)' = 1 \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Ahora, aplicando nuevamente la regla de la cadena, se obtiene, para la composición de la función logaritmo con cualquier otra función, en donde pueda llevarse a cabo la composición, la derivada de la función compuesta, es decir, supongamos que la función f se puede componer con la función $\ln$ y además es derivable, entonces

$$\text{Si } h(x) = \ln(f(x)), \text{ entonces } h'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ejemplo.

Derive a la función $h(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$.

Solución.

$$h'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 1}$$

ahora ya tenemos la forma de calcular la derivada de la función $y = 10^x$, pues una forma de hacerlo es mediante la derivación logarítmica.

Deriva a la función $y = 10^x$, calculamos el logaritmo en ambos lados

$$\ln y = x \ln 10$$

derivamos

$$\frac{y'}{y} = \ln 10 \Rightarrow y' = y \ln 10 = 10^x \ln 10$$

en general, si $y = a^x$, entonces $y' = a^x \ln a$, se procede de la misma forma para obtener este resultado.

Ejemplos.

Encuentra la derivada de las funciones siguientes.

$$a) y = a^{3x^2} \quad b) y = x^2 3^x \quad c) y = e^{-x} \ln x$$

Solución.

$$a) y' = a^{3x^2} (6x) \ln a = 6x e^{3x^2} \ln a \quad b) y' = 2x 3^x + x^2 3^x \ln 3 = x 3^x (2 + x^2 \ln 3)$$

$$c) y' = -e^{-x} \ln x + e^{-x} \left(\frac{1}{x} \right) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

Ejemplo.

Encuentra los máximos y los mínimos de la función $y = x^2 \ln x$.

Solución.

Calculemos los puntos críticos

$$y' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

sólo hay un punto crítico ya que $x = 0$, no está en el dominio de la función, así

$$2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1/2}$$

es el único punto crítico el cual corresponde a un mínimo, esto se puede probar con el criterio de la primera derivada.

- Resolución de problemas en diversos contextos.

En esta sección se plantearán y resolverán varios ejercicios y problemas, para apropiarse de los temas que se han estudiado.

1. Encuentra una ecuación de la recta tangente a la curva dada por la función $f(x) = x^2 + 2e^x$ en el punto $T(0,2)$.

Solución.

Primero debemos verificar que el punto dado este en la gráfica de la función, con este fin, calculamos $f(0) = 0^2 + 2e^0 = 2$, por lo tanto, el punto está en la gráfica, ahora para encontrar la ecuación de la recta debemos derivar y así calcular su pendiente.

$f'(x) = 2x + 2e^x$, la pendiente es $m(0) = 2(0) + 2e^0 = 2$, empleando la forma de la recta punto pendiente, se obtiene

$$y - 2 = 2(x - 0) = 2x \Rightarrow y = 2x + 2$$

2. ¿En cuál punto sobre la gráfica de la función $y = 1 + 2e^x - 3x$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y = 5$?

Solución.

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, así que igualaremos la pendiente de la recta con la derivada de la función, la pendiente de la recta es el coeficiente de la variable x cuando se expresa de la forma $y = mx + b$, así

$$3x - y = 5 \Rightarrow y = 3x - 5$$

la pendiente de la recta es $m = 3$, ahora la derivada $y' = 2e^x - 3$, por lo tanto

$$2e^x - 5 = 3 \Rightarrow e^x = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

Calculemos la ordenada $y = 1 + e^{\ln(2)} - 3 \ln(2) = 1 + 2 - 3 \ln(2) = 3 - 3 \ln(2)$
En punto es $(\ln(2), 3 - 3 \ln(2))$.

3. Considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es de 100 bacterias ¿cuál es la tasa de crecimiento exactamente a las 4 horas?

Solución.

Aunque este es un modelo discreto, podemos hacer la suposición de continuidad así se tiene que el modelo es

$$f(t) = 100(2^t)$$

La tasa de crecimiento es la derivada

$$f'(t) = 100 \ln(2) 2^t$$

y

$$f'(4) = 100 \ln(2) 2^4 \approx 1104 \frac{\text{bacterias}}{\text{hora}}$$

La población crece aproximadamente en 1104 bacterias cada hora en la cuarta hora.

4. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x) = x \ln(x)$.

Solución.

Primero calculamos los puntos críticos

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

igualando a cero, se tiene

$$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

sólo hay un punto crítico.

La segunda derivada

$$f''(x) = \frac{1}{x} \text{ y } f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \text{ por lo tanto hay un mínimo en } x = e^{-1}.$$

5. Deriva la función $f(x) = x^x$.

Solución.

Primero obtengamos su logaritmo

$$\ln(f(x)) = x \ln(x)$$

derivamos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1 \Rightarrow f'(x) = f(x)[1 + \ln(x)] = x^x [1 + \ln(x)]$$

6. Deriva a la función $y = x^{x^2}$.

Solución.

Tomamos logaritmo en ambos lados

$$\ln y = x^2 \ln(x)$$

Ahora derivamos

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln(x) + x \Rightarrow y' = y[2x \ln(x) + x] = x^{x^2}[2x \ln(x) + x]$$

7. Encuentra la derivada de las funciones siguientes:

$$a) y = \ln\left(\frac{x^4}{x^5+1}\right) \quad b) y = \ln(x^5 \sin(x) \cos(x))$$

Solución.

Primero apliquemos las propiedades de la función logaritmo y después derivemos.

$$a) y = 4 \ln(x) - \ln(x^5 + 1) \Rightarrow y' = \frac{4}{x} - \frac{5x^4}{x^5+1}$$

$$b) y = 5 \ln(x) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) \Rightarrow y' = \frac{5}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{5}{x} + \cot x - \tan x.$$

8. Un cable de telégrafo tiene un núcleo interior y una cubierta exterior que lo rodea. Si x denota el radio del núcleo interior dividido entre el radio exterior, la velocidad de transmisión es proporcional a $s(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. ¿Qué valor de x hace máxima la velocidad de transmisión?

Solución.

Primero escribamos a la función como

$$s(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2 \ln(x)$$

ahora, calculemos los puntos críticos de la función, con este fin derivemos a la función.

$$s'(x) = -2x \ln(x) - x^2 \left(\frac{1}{x}\right) = -2x \ln(x) - x = -x[2 \ln(x) + 1]$$

al igualarla a cero, se obtiene

$$x = 0 \text{ o } 2 \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1/2}$$

descartamos $x = 0$, ya que no está en el dominio de la función, ahora derivamos nuevamente a la función

$$f''(x) = -2 \ln(x) - 2 - 1 = -2 \ln(x) - 3$$

luego

$$f''\left(e^{-1/2}\right) = -2 \ln\left(e^{-1/2}\right) - 3 = -2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$$

$x = e^{-1/2}$ es un máximo.

9. Sea $\pi(x)$ el número de enteros primos menores o iguales que x . Por ejemplo, $\pi(6) = 3$, porque 2, 3, 5 son primos. Se ha demostrado que para x muy grande, $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$, si $x > 10$, calcula π' y π'' . Interpreta estos resultados en términos de la distribución de los números primos.

Solución.

Calculemos las derivadas

$$\pi'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \text{ y } \pi''(x) = \frac{\frac{\ln^2(x)}{x} - \frac{2(\ln(x)-1)\ln(x)}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{1}{x} \frac{\ln(x)[- \ln(x)-2]}{\ln^4(x)}$$

Podemos observar que $\pi' > 0$ y $\pi'' < 0$, lo que quiere decir, los números primos aumentan pero cada vez más lentamente.

UNIDAD 1.

LA DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

Niveles cognoscitivos (Bloom)

1. Conocer, 2. Comprender, 3. Aplicar

Tema	Aprendizaje	Niveles Cognitivos		
		1	2	3
DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. • Funciones trigonométricas y el estudio de su variación. • Derivada de las funciones seno y coseno. • Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante • Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas • Resolución de problemas en diversos contextos.	• Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. • Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica. • Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. • Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas. • Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos.	1, 2, 3	4, 5, 6, 7, 8	
		9, 12	10, 11, 13	
			14, 15, 16, 17,	
			18, 19, 20	21, 22, 23, 24
		33, 34, 35	25, 26, 27, 28, 29, 32, 36	30, 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS. • Derivada de las funciones e^x, e^u, 10^x y 10^u. • Derivada de las funciones $\ln x$, $\ln u$, $\log x$, $\log u$ • Resolución de problemas en diferentes contextos.	• Relaciona en diferentes contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. • Infiere la derivada de las funciones logarítmicas. • Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas. • Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.	46, 47, 48	49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57	51
		58, 59, 60,		
			61, 62, 63	
			64, 65, 66, 67, 68, 69, 70	71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80

PROBLEMAS UNIDAD 1.
DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Aprendizajes: Ampliará su conocimiento de derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelan con ellas.

1. Algunos campos en donde se aplican las funciones trigonométricas son:

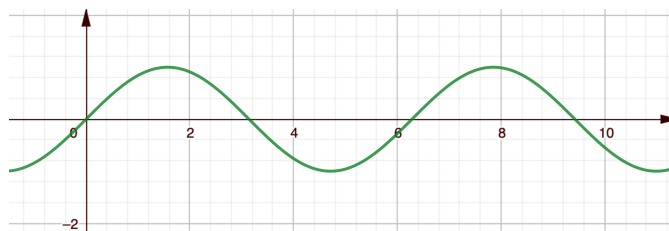
a) Navegación. b) Astronomía c) Geodesia

Menciona al menos otros tres campos de aplicación de las funciones trigonométricas.

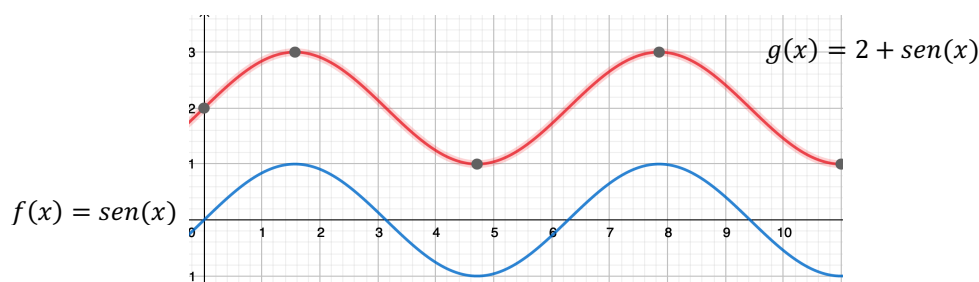
2. Un problema típico en donde se aplican las funciones trigonométricas es:

- Encuentra dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea máximo.
- Encuentre los puntos P y Q en la curva $y = \frac{1}{4}x^2$, $0 < x < 2\sqrt{3}$, que está más cercano y lejano del punto $(0,4)$.
- Un hombre parado en la cima de un acantilado vertical está a 500 metros encima de un lago. Observa un bote de motor que se aleja directamente del pie del acantilado a razón de 60 metros/segundo ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de depresión de su línea visual cuando el bote está a 380 metros de la base del acantilado?
- Encuentre el volumen más grande de la caja sin tapa que se puede hacer con una hoja cuadrada de cartón, de 24 centímetros de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando después.

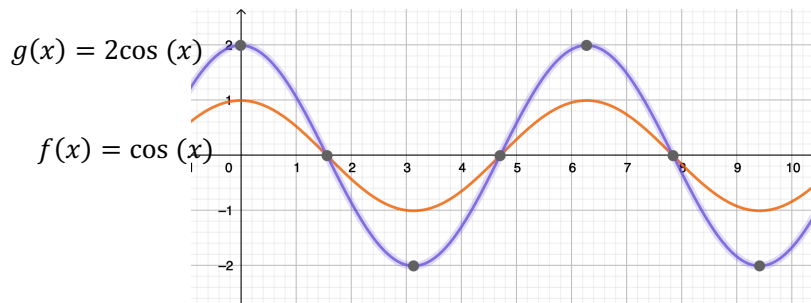
3. En la figura siguiente, determine cuántas rectas tangentes horizontales tiene la función $\text{sen}(x)$ y en qué puntos.



4. Observa la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y a la función $g(x) = 2 + \text{sen}(x)$, es decir se ha trasladado hacia arriba a la gráfica de la función en dos unidades ¿qué diferencia hay entre la derivada de la función f con respecto a la derivada de la función g ?



5. Considera a la función $f(x) = \cos(x)$ y a la función $g(x) = 2\cos(x)$ como se muestra a continuación, observa el punto $x = \frac{\pi}{4}$ ¿hay diferencia entre la derivada de la función f y la función g ?



6. Considera la tabla siguiente, en donde se muestran algunos valores de las funciones seno y coseno.

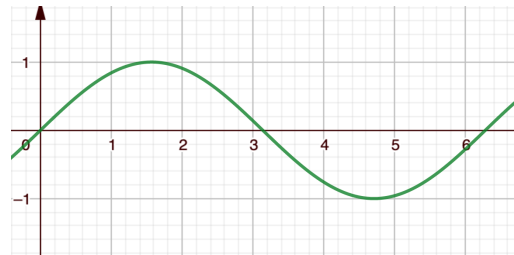
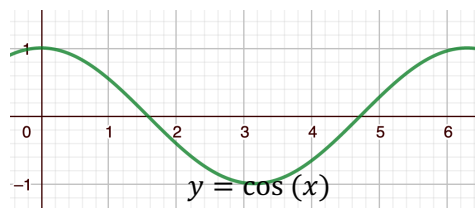
x	0	0.01	0.02	0.03	0.04
$\text{sen}(x)$	0	0.00998	0.01999	0.029995	0.039989
$\cos(x)$	1	0.99995	0.99980	0.999550	0.999200

Aproximadamente el valor de la derivada de la función seno en $x = 0$, es:

- a) 0.998. b) 0.00998. c) 1 d) 0 e) 0.999
7. Con base en los valores de la tabla mostrada en el ejercicio 7, el valor de la derivada de la función coseno en $x = 0$, aproximadamente es:
- a) 0.998. b) 0.00998. c) - 1 d) 0 e) - 0.0005
8. Con base en los valores de la tabla mostrada en el ejercicio 7, el valor de la derivada de la función coseno en $x = 0.02$, aproximadamente es:
- a) -0.998. b) 0.0998. c) - 0.015 d) 0 e) - 0.005

Tema	Aprendizajes
Derivada de las funciones seno y coseno.	Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica.

9. Se muestra la gráfica de la función coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$, observa la gráfica de su derivada que se muestra en el lado derecho.



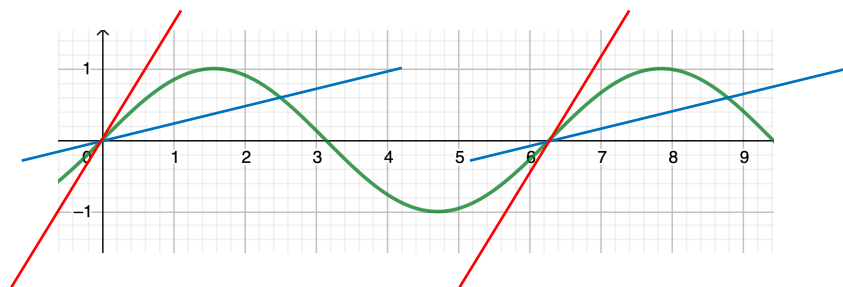
Derivada de la función coseno

En el intervalo $[2\pi, 4\pi]$ ¿qué forma tiene la derivada de la función coseno?

10. La función coseno es periódica ¿por qué su derivada también lo es?

11. Con base en $\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿Qué valor tiene $\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right)\right)'$?

12. La derivada de la función seno en el origen se calcula a través del límite siguiente:

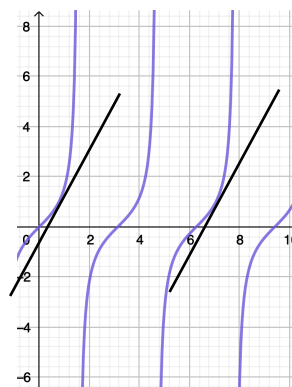


$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Con base en la figura mostrada y el límite dado, calcula el límite siguiente:

$$\sin'(2\pi) = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(x)}{x - 2\pi}$$

13. Observa la gráfica de la función tangente en el intervalo $[0, 3\pi]$, así como las rectas tangentes en los puntos $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{9\pi}{4}$.



¿Cuál de las dos rectas tiene su pendiente mayor?

Tema	Aprendizajes
Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.	Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Sabemos que la derivada de las funciones seno y coseno son:

$$f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \text{ y } g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\text{sen}(x).$$

14. Se puede definir a la función tangente como: $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, con base en esta definición y las reglas de derivación, encuentra la derivada de la función tangente.

15. Se puede definir a la función cotangente como: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$, con base en esta definición y las reglas de derivación, encuentra la derivada de la función cotangente.

16. Se puede definir a la función secante como: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, con base en esta definición y las reglas de derivación encuentra la derivada de la función secante.

17. Se puede definir a la función cosecante como: $\csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$, con base en esta definición y las reglas de derivación encuentra la derivada de la función cosecante.

Tema	Aprendizajes
Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas.	Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas.

En el primer curso de Cálculo diferencial e integral, estudiaste la regla de las potencias, por ejemplo, cuando se tenía una función f con exponente 2;

$$y = (f(x))^2$$

Nos preguntamos por su derivada, una manera de obtener su derivada fue por medio de la regla del producto

$$y(x) = (f(x))^2 = f(x) \cdot f(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$$

Es decir, empleando la notación de Leibniz

$$y(x) = (f(x))^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2f'(x) \cdot f(x) \quad (1)$$

Recordemos la derivada de la función $y(x) = x^2$ cuya derivada es $\frac{dy}{dx} = 2x$, podríamos esperar que

Si $y(x) = (f(x))^2$, entonces $\frac{dy}{dx} = 2f(x)$, pero no es así, existe un factor adicional, este es $f'(x)$, este factor lo podemos escribir de la manera siguiente:

Hagamos $y = u^2$ con $u = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = D_x(f(x))^2$$

$$\frac{dy}{du} = 2u.$$

$$\frac{du}{dx} = f'(x)$$

Por lo que la forma de la expresión (1), se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Esta última relación recibe el nombre de regla de la cadena, es una forma general para cualquiera dos funciones que se puedan componer y sean derivables en el lugar adecuado.

Se acostumbra a escribir también de la forma siguiente:

Si $h(x) = f(g(x))$, entonces $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$, decimos derivamos a la función externa y dejamos a su argumento (a la función g) después multiplicamos por la derivada del argumento (la función g').

De esta manera se tiene con respecto a la regla de la cadena con las funciones trigonométricas las relaciones siguientes:

Función compuesta	Derivada	Función compuesta	Derivada
$\text{sen}(u)$	$\cos(u) \frac{du}{dx}$	$\text{sen}(g(x))$	$\cos(g(x)) g'(x)$
$\cos(u)$	$-\text{sen}(u) \frac{du}{dx}$	$\cos(g(x))$	$-\text{sen}(g(x)) g'(x)$
$\tan(u)$	$\sec^2(u) \frac{du}{dx}$	$\tan(g(x))$	$\sec^2(g(x)) g'(x)$
$\cot(u)$	$-\csc^2(u) \frac{du}{dx}$	$\cot(g(x))$	$-\csc^2(g(x)) g'(x)$
$\sec(u)$	$\sec(u) \tan(u) \frac{du}{dx}$	$\sec(g(x))$	$\sec(g(x)) \tan(g(x)) g'(x)$
$\csc(u)$	$-\csc(u) \cot(u) \frac{du}{dx}$	$\csc(g(x))$	$-\csc(g(x)) \cot(g(x)) g'(x)$

18. La derivada de la función $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ es:

a) $\cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ c) $-\frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ d) $-\text{sen}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ e) $\cos(\sqrt{x})$

Solución c).

Consideremos a la función $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo tanto la derivada de la función es:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

19. La derivada de la función $f(x) = \cos(3x) + \operatorname{sen}(2x)$ es.

- a) $-\operatorname{sen}(3x) + \cos(2x)$ b) $\cos(3) + \operatorname{sen}(2)$ c) $3\cos(3x) + 2\operatorname{sen}(2x)$
d) $-3\operatorname{sen}(3x) + 2\cos(2x)$ e) $3\operatorname{sen}(3x) + 2\cos(2x)$

Solución d).

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(3x) \frac{d(3x)}{dx} + \cos(2x) \frac{d(2x)}{dx} = -3\operatorname{sen}(3x) + 2\cos(2x).$$

20. La derivada de la función $f(x) = \sqrt{\csc(x)}$ es:

- a) $\frac{1}{2\sqrt{\csc(x)}}$ b) $\frac{-\csc(x) \cot(x)}{2\sqrt{\csc(x)}}$ c) $(\csc(x))^{1/2}$ d) $\sqrt{\csc(x) \cot(x)}$
e) $\frac{1}{2}(\csc(x))^{-1/2}$

Respuesta b).

En este caso se deriva primero la raíz cuadrada y después la función $\csc(x)$, de esta manera se obtiene

$$f'(x) = \frac{-\csc(x) \cot(x)}{2\sqrt{\csc(x)}}$$

La respuesta correcta es el inciso b).

21. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(3x)$, el valor de $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es:

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0. d) 1. e) $3\frac{\sqrt{3}}{2}$

Respuesta a)

Primero debemos de encontrar la derivada de la función teniendo en cuenta que es un producto, así

$$f'(x) = \cos(x)\cos(3x) - 3\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(3x), \text{ entonces}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\pi) = -\frac{1}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}(0) = -\frac{1}{2}$$

22. La derivada de la función $f(x) = \sin^3(3x - 5)$ es:

- a) $\sin^3(3x - 5)(3)$ b) $3\sin^2(3x - 5)$ c) $3\sin^2(3x - 5)(3)$
d) $\cos^3(3)$ e) $\frac{9}{2}\sin(3x - 5)\sin(6x - 10)$

Respuesta e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2(3x - 5)\cos(3x - 5)(3) = 9\sin^2(3x - 5)\cos(3x - 5) \\ &= 9\sin(3x - 5)\sin(3x - 5)\cos(3x - 5) = \frac{9}{2}\sin(3x - 5)\sin(6x - 10) \end{aligned}$$

23. La derivada de la función $f(x) = x^2\sin^3(x^4)$ es:

- a) $2x[3\sin^2(x^4)](4x^3)$ b) $2x + 3\sin^2(x) + 4x^3$ c) $8x^5\sin^2(4x^3)$
d) $2x[3\sin^2(x^4)](x^4)$ e) $2x\sin^2(x^4)[6x^4\cos(x^4) + \sin(x^4)]$

Respuesta e)

Se tiene el producto de dos funciones, así debemos de derivar con la regla del producto, pero la segunda función esta compuesta, ahí se debe de aplicar la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x(x^2\sin^3(x^4)) &= x^2D_x(\sin^3(x^4)) + \sin^3(x^4)D_x(x^2) \\ &= x^2[3\sin^2(x^4)]D_x(\sin(x^4)) + \sin^3(x^4)(2x) \\ &= x^2[3\sin^2(x^4)]\cos(x^4)D_x(x^4) + 2x\sin^3(x^4) \\ &= 3x^2\sin^2(x^4)\cos(x^4)(4x^3) + 2x\sin^3(x^4) \\ &= 12x^5\sin^2(x^4)\cos(x^4) + 2x\sin^3(x^4) \\ &= 2x\sin^2(x^4)[6x^4\cos(x^4) + \sin(x^4)] \end{aligned}$$

24. La derivada de la función $f(x) = \cot(\sec(5x))$

- a) $-\cot(\sec(5x))(5)$ b) $-\cot(x)\csc(x)(5)$ c) $-\cot(5x)\csc(5x)(5)$
d) $-5\csc(\sec(5x))\cot(\sec(5x))\sec(5x)\tan(5x)$ e) $-\csc(5x)\cot(5x)\sec(x)\tan(x)$

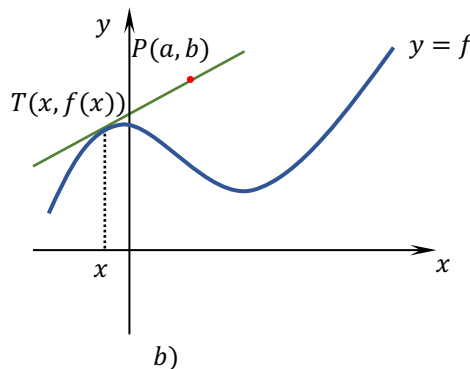
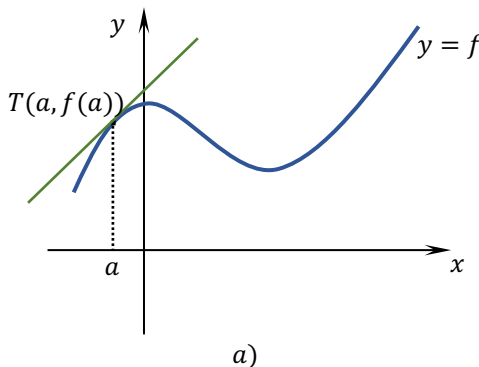
Respuesta d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\csc(\sec(5x))\cot(\sec(5x))\frac{d(\sec(5x))}{dx} \\ &= -\csc(\sec(5x))\cot(\sec(5x))\sec(5x)\tan(5x)\frac{d(5x)}{dx} \\ &= -\csc(\sec(5x))\cot(\sec(5x))\sec(5x)\tan(5x)(5) \end{aligned}$$

Tema	Aprendizajes
Resolución de problemas en diversos contextos.	Aplica las derivadas trigonométricas a problemas en diversos contextos.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función se requiere de un punto y la pendiente (o bien dos puntos, pero en Cálculo se estudia la razón de cambio), la ecuación se podrá encontrar en la forma de la recta llamada punto pendiente, esta es la forma más usual, ya que la derivada de la función nos proporciona la pendiente de la recta, se pueden presentar al menos dos casos, primero cuando el punto está en la gráfica de la función, figura a) y el segundo cuando el punto **no** está en la gráfica de la función figura b), para cada caso hay al menos una forma de encontrar la ecuación de la recta tangente.



EN PUNTO ESTÁ EN LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN.

En este caso, es sencillo encontrar la ecuación de la recta, ya que la pendiente m de la recta tangente la proporciona la derivada de la función así se tiene $m(a) = f'(a)$ y el punto de tangencia está dado por $T(a, f(a))$, empleando la forma de la recta en su forma punto pendiente, se obtiene la ecuación pedida

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EN PUNTO NO ESTÁ EN LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN.

En este caso se calcula la pendiente de la recta tangente de dos maneras, una con los dos puntos dados, el punto T de tangencia (al que hay que encontrar) y el punto $P(a, b)$ dado, así se tiene

$$m = \frac{f(x) - b}{x - a}$$

Por otra parte, la derivada de la función nos proporciona la pendiente general m , de esta manera la pendiente es la misma, así se tiene la ecuación

$$m = \frac{f(x) - b}{x - a} = f'(x)$$

La cual se debe de resolver, una vez que se obtiene el valor de la incógnita x , se encuentran los demás datos que permiten encontrar la ecuación de la recta tangente.

25. La ecuación de la recta tangente a la función seno en el punto $(\pi, 0)$ es:

a) $y = \cos(x)(x - \pi)$

b) $y - \pi = (x - 0)$

c) $y = -x + \pi$

d) $y = x - \pi$

e) $y - \sin(x) = -(x + \pi)$.

Respuesta c)

Primero debemos verificar si el punto pertenece a la gráfica de la función, con este fin evaluamos a la función seno en el punto dado.

$$f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0$$

Como el punto está en la gráfica de la función, este ejercicio corresponde al primer tipo, debemos encontrar la pendiente en $x = \pi$.

Pendiente general $m(x) = f'(x) = \cos(x)$, pendiente particular $m(\pi) = f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, considerando el punto dado, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi.$$

26. La ecuación de la recta tangente a la función tangente en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ es:

$$a) y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)(x - \sqrt{3}) \quad b) y - \sqrt{3} = \sec^2(x)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad c) y = 4x - \frac{4\pi}{3}$$

$$d) y = 4x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad e) y - 4x = \frac{\pi}{3}$$

Respuesta d)

Primero verificamos si el punto dado está en la gráfica de la función, con este fin, evaluamos a la función en el punto dado

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

También pertenece al primer caso, calculemos la derivada general

$$m(x) = f'(x) = \sec^2(x) \Rightarrow m\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = (2)^2 = 4$$

Aplicando la ecuación de la recta punto pendiente, se tiene

$$y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4x - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow y = 4x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

27. La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = 2\cos(x)$ en el punto donde $x = \frac{1}{6}\pi$ es:

$$a) y = -x + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \quad b) y = 2\text{sen}(x)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad c) y - \frac{\pi}{6} = x + \sqrt{3}$$

$$d) y - 2\text{sen}(x) = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad e) y - \frac{\pi}{6} = -x - \sqrt{3}$$

Respuesta a)

Primero encontremos la imagen del punto dado, $y = f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$, ahora la pendiente está dada por su derivada

$$m(x) = -2\operatorname{sen}(x) \Rightarrow m\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Aplicamos la forma punto pendiente de la recta, así obtenemos

$$y - \sqrt{3} = -\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -x + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

28. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x)$ en el punto $(0,3)$ es:

- a) $y = [2\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x)](x - 0)$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = 2x$
d) $y - [2\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x)] = x.$ e) $y = x - 1$

Respuesta b)

Primero verificamos que el punto esté en la gráfica de la función $f(0) = 2\operatorname{sen}(0) + 3\cos(0) = 2(0) + 3(1) = 3$, así el punto está en la gráfica de la función, ahora

$$m(x) = f'(x) = 2\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x) \Rightarrow m = f'(0) = 2\cos(0) - 3\operatorname{sen}(0) = 2$$

Aplicamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente.

$$y - 3 = 2(x - 0) = 2x \Rightarrow y = 2x + 3$$

Daremos un ejemplo de cómo encontrar la ecuación de la recta tangente, cuando el punto dado no está en la gráfica de la función, cabe decir, que cuando hay una ecuación con funciones algebraicas y trascendentes es casi imposible de resolverlo, este ejercicio se resolverá mediante inspección.

29. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $P(2,2)$, es:

- a) $y - 2 = \cos(2)(x - 2)$ b) $y - 2 = x + 2.$ c) $y = \cos(x)(x - 2) + 2$
d) $y - 2 = \cos(x)(x - 2)$ e) $y = x.$

Respuesta e)

Primero debemos checar si el punto está en la gráfica de la función, en este caso es evidente que el punto P , no pertenece a la gráfica de la función ya que el rango de la función seno es $[-1,1]$, entonces consideremos al punto de tangencia $T(x, \operatorname{sen}(x))$, entonces hay dos maneras de calcular la pendiente de la recta tangente, las cuales son las mismas

$$m = \frac{\operatorname{sen}(x) - 2}{x - 2} = \cos(x)$$

Entonces

$$\operatorname{sen}(x) - 2 = (x - 2)\cos(x)$$

Por inspección podemos conjeturar que una solución es $x = 0$, una vez obtenido el valor de la incógnita x , evaluamos en la función $f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$ y la pendiente $m(0) = \cos(0) = 1$,

así tenemos el punto de tangencia $T(0,0)$ y la pendiente $m = 1$, empleando la forma de la recta en su forma punto pendiente, se obtiene

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

30. Un bote anclado sube y baja en la superficie del mar. La distancia vertical, y entre el lecho del mar y el bote está dado como función del tiempo, t en minutos, con

$$y = 15 + \operatorname{sen}(2\pi t)$$

La velocidad vertical, v del bote en el tiempo t es:

a) $\cos(2\pi)$ b) $\cos(2\pi t)$ c) $2\operatorname{sen}(2\pi)$ d) $2\pi \cos(2\pi t)$ e) $-\operatorname{sen}(2\pi t)$

Respuesta d)

La velocidad se encuentra con la derivada de la función, así

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = 2\pi \cos(2\pi t)$$

31. Los puntos sobre la curva dada por $f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\operatorname{sen}(x)}$ en los cuales la recta tangente es horizontal son:

a) $\pi + n$. b) $-\frac{1}{6}\pi$. c) $\frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$. d) $\cos(x) = 0$. e) $2 + \operatorname{sen}(x) = 0$

Respuesta c)

Primero derivamos a la función

$$f'(x) = \frac{-(2+\operatorname{sen}(x))\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\cos(x)}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{-2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{-2\operatorname{sen}(x) - 1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}$$

Resolvemos la ecuación resultante al igualar a cero esta derivada

$$\frac{-2\operatorname{sen}(x) - 1}{(2 + \operatorname{sen}(x))^2} = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}(x) - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

Con apoyo del círculo trigonométrico se encuentra que los valores para x son $\frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$

32. Sea $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$. ¿En qué intervalo la función f es creciente?

a) $[0, 2\pi]$ b) $(0, 2\pi)$ c) $\left(\frac{1}{3}\pi, 2\pi\right)$ d) $\left(0, \frac{1}{3}\pi\right)$ e) $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$

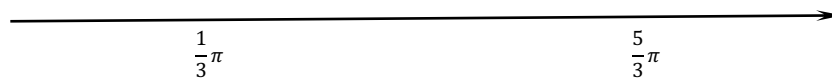
Respuesta e)

Sabemos que una función es creciente cuando su derivada es positiva, es decir $f'(x) > 0$, así derivamos a la función

$$f'(x) = 1 - 2\cos(x)$$

Una manera de saber en donde es positiva es igualando a cero y posteriormente verificar el signo de la derivada de la función en los intervalos que nos indiquen las soluciones de la ecuación.

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos(x) &= 0 \\ \cos(x) &= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$



Ahora verificamos el signo de la derivada en los tres intervalos dando un valor de prueba

Intervalo	Punto de prueba	Signo de f'	Conclusión
$\left[0, \frac{1}{3}\pi\right[$	$x = \frac{1}{6}\pi$	$1 - 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \approx -0.732$	La función decrece
$\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$	$x = \pi$	$1 - 2\cos(\pi) = 3$	La función crece
$\left]\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$	$x = \frac{11}{6}\pi$	$1 - 2\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) \approx -0.732$	La función decrece

Entonces la función es creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$.

33. Los máximos y los mínimos de la función $f(x) = 2\cos(x) + \sin(2x)$, $0 \leq x < \pi$, son:

- a) $\frac{\pi}{6}$ máximo, $\frac{5\pi}{6}$ mínimo, $\frac{3\pi}{2}$ ni máximo ni mínimo b) $\frac{\pi}{6}$ mínimo, $\frac{5\pi}{6}$ máximo
- c) π máximo, no tiene mínimo. d) $\frac{\pi}{6}$ máximo, $\frac{3\pi}{2}$ mínimo. e) $\frac{\pi}{6}$ Mínimo, $\frac{3\pi}{2}$ Mínimo

Respuesta a)

Para encontrar los máximos y los mínimos de una función, primero se encuentran los puntos críticos y después mediante el criterio de la primera o segunda derivada se prueba si estos son máximos o mínimos.

Puntos críticos.

$$f'(x) = -2\sin(x) + 2\cos(2x)$$

Igualemos a cero a la derivada de la función y resolvemos tomando en cuenta que: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Previamente cancelamos el número 2.

$$-\sin(x) + \cos(2x) = 0$$

Sustituyendo

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula tradicional, se obtiene

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)}}{4}$$

Se obtienen dos soluciones

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(x) = -1$$

En el primer caso $x = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$, para el segundo caso $x = \frac{3}{2}\pi$, para determinar si son máximos o mínimos, derivamos nuevamente

$$f''(x) = -2\cos(x) - 4\operatorname{sen}(2x)$$

Y evaluamos en los puntos críticos

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3} < 0 \text{ hay un máximo}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} > 0 \text{ hay un mínimo}$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 4\operatorname{sen}(3\pi) = 0 \text{ no hay ni máximo ni mínimo.}$$

34. Los máximos y los mínimos de la función $f(x) = 2x - \tan(x)$, $0 \leq x < \pi$, son:

- a) $0, \frac{\pi}{2}$ Máximos y $\pi, \frac{3}{2}\pi$ Mínimos. b) $\frac{\pi}{2}$ Máximo y $\frac{3}{2}\pi$ Mínimos
d) $0, \frac{\pi}{2}$ Mínimos $\pi, \frac{3}{2}\pi$ Máximos. d) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ Máximos $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ Mínimos
e) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ Mínimos $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ Máximos

Respuesta d)

Primero calculamos los puntos críticos $f'(x) = 2 - \sec^2(x)$, hacemos cero a la derivada

$$2 - \sec^2(x) = 0$$

$$\text{Como } \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$2 - \sec^2(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 2 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Aplicamos el criterio de la segunda derivada

$$f''(x) = -2\sec(x)\sec(x)\tan(x) = -2\sec^2(x)\tan(x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0, \text{ por lo tanto, hay un máximo}$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\sec^2\left(\frac{7\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 4 > 0, \text{ por lo tanto, hay un mínimo}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2\sec^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0, \text{ por lo tanto, hay un mínimo}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\sec^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4 < 0, \text{ por lo tanto, hay un máximo}$$

PROBLEMAS SOBRE CRECIMIENTO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

35. La función $f(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, es creciente en:

- a) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ c) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ e) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Respuesta b)

Calculemos los puntos críticos

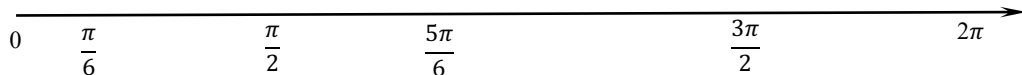
$$f'(x) = \cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)(1 - 2\sin(x))$$

$$\cos(x)(1 - 2\sin(x)) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \text{ o } 1 - 2\sin(x) = 0$$

Así

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ y } 1 - 2\sin(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Geoméricamente tenemos 5 intervalos en el dominio dado



Hagamos un resumen en la tabla siguiente:

Intervalo	Signo de f'	Conclusión sobre f
$\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$	$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.4659 > 0$	Crece
$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.366 < 0$	Decrece
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0.366 > 0$	Crece
$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$	Decrece
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 1.7071 > 0$	Crece

Por lo tanto, la función f crece en $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

36. La función $f(x) = 2\sin(x) + \cos(2x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, es creciente en:

$$\begin{aligned} a) & \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] & b) & \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) & c) & \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ d) & \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) & e) & \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{aligned}$$

Respuesta a)

Primero derivamos a la función para determinar a sus puntos críticos y poder determinar los intervalos, después su comportamiento en cada uno de ellos.

$$f'(x) = 2 \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(2x)$$

Igualamos a cero para obtener sus puntos críticos.

$$2 \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(2x) = 2 \cos(x) - 4 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = 2 \cos(x)(1 - 2 \operatorname{sen}(x)) = 0$$

$$\text{Por lo tanto } \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ o } \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$$

Hagamos un resumen del comportamiento de f' en la tabla siguiente:

Intervalo	Signo de f'	Conclusión sobre f
$\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$	$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0.93185 > 0$	Crece
$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3} < 0$	Decrece
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3} > 0$	Crece
$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$	$f'\left(\frac{13\pi}{12}\right) \approx -2.93185 < 0$	Decrece
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$f'\left(\frac{17\pi}{12}\right) \approx -1.5176 < 0$	Decrece
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{2} > 0$	Crece

Por lo tanto la función crece en

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

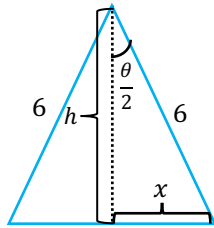
PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

37. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 6 centímetros. El ángulo θ entre los lados iguales aumenta a razón de 2° por minuto. La razón de crecimiento del área en el instante en que $\theta = 30^\circ$ es:

$$a) 1. \quad b) 0.5. \quad c) -0.5. \quad d) 0.544. \quad e) 1.2345$$

Respuesta d)

Dibujemos un triángulo con las características dadas.



Denotemos por x a la mitad de la base mostrada en la figura del lado derecho y por h a la longitud de la altura, entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta/2) = h/6 \Rightarrow h = 6\cos(\theta/2)$$

El área A del triángulo como el descrito, está dado por la relación

$$A = xh = 36\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) = 18\operatorname{sen}(\theta)$$

Así el área A está en función del ángulo θ , ahora escribamos el ángulo 2° en radianes, su equivalente es $\frac{\pi}{90}$, sabemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{90}$$

Mediante la regla de la cadena

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 18\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

Sustituimos los valores de θ y $d\theta$

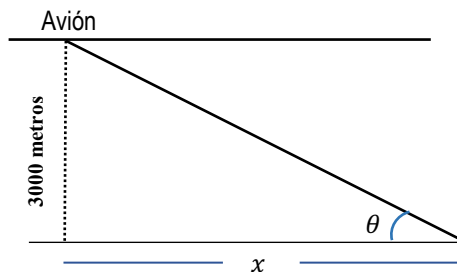
$$\frac{dA}{dt} = 18\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{90}\right) = \frac{3\pi}{10} \approx 0.544139809$$

38. Un avión vuela con una velocidad constante a una altura de 3 000 metros a lo largo de una trayectoria que lo hará pasar exactamente arriba de un observador que está en el suelo. En un instante dado el observador nota que el ángulo de elevación del avión es de 60° y éste aumenta a razón de 1° por segundo. ¿Cuál es la velocidad del avión?

a) 2π b) $-\frac{3}{4}\pi$ c) $\sqrt{3000 - x^2}$ d) $\frac{100\pi}{9}$ e) $-\frac{200\pi}{9}$

Respuesta e)

Realicemos un dibujo que nos ayude a encontrar una relación entre los datos dados.



Denotemos por x a la distancia que hay entre el observador y la proyección ortogonal del avión al nivel del suelo (como se muestra en la figura), según la figura es conveniente emplear la función tangente, de esta manera se tiene

$$\tan(\theta) = \frac{3000}{x} \Rightarrow x = \frac{3000}{\tan(\theta)} = 3000 \cot(\theta)$$

Derivamos, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -3000 \sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

Sabemos que

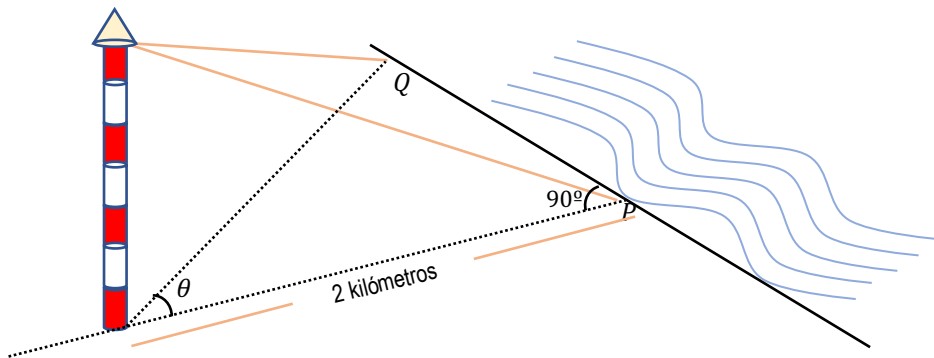
$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ y } \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{180}, \text{ se obtiene } \frac{dx}{dt} = -3000 \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{200\pi}{9}$$

39. La luz de un faro giratorio está localizada en una isla a 2 kilómetros del punto más cercano P en línea recta de la playa del continente. El faro arroja un rayo de luz que se mueve a lo largo de la playa conforme el faro gira. Si la velocidad del rayo de luz es de 5π kilómetros por minuto cuando se encuentra a 1 kilómetro de P , ¿con qué rapidez gira el faro?

- a) $\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$ b) $\frac{1}{2}\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$ c) $\frac{4}{3}\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$ d) $2\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$
e) $\frac{5}{2}\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$

Respuesta d)

Para fijar ideas consideremos la figura siguiente:



Denotemos por x a la distancia entre el extremo Q del rayo de luz que está en la playa y el punto P , θ el ángulo entre las líneas que van de la base del faro a P y Q , queremos encontrar $\frac{d\theta}{dt}$, con este fin la función que relaciona a la variable con los datos conocidos es la función tangente, de esta manera

$$\tan(\theta) = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \tan(\theta)$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 2 \sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2 \sec^2(\theta)} \frac{dx}{dt}$$

Sabemos que cuando $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 5\pi \frac{\text{kilómetro}}{\text{minuto}}$ y $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$ con este valor de la tangente podemos calcular el cuadrado de la secante

$$\sec^2(\theta) = \frac{5}{4}$$

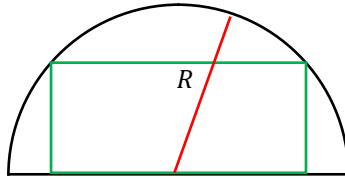
Mediante la identidad

$$\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Por lo tanto

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\left(\frac{5}{4}\right)} 5\pi = 2\pi \frac{\text{kilómetros}}{\text{minuto}}$$

40. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio R ¿Cuál es el área máxima posible de tal rectángulo?



a) R^2

b) $2\pi R$

c) $R^2\pi$.

d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{1}{2}\pi R^2$

Respuesta a)

Llamemos x a la mitad de la longitud de la base y a la longitud de la altura del mismo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \sin(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cos(\theta) \end{aligned}$$

el área A del rectángulo es

$$A = 2xy = 2R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = R^2 \sin(2\theta)$$

derivamos con respecto al ángulo θ , $A'(\theta) = 2R^2 \cos(2\theta)$

puntos críticos

$$\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ (recuerda que } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

Empleemos el criterio de la segunda derivada

$$A''(\theta) = -4R^2 \sin(2\theta)$$

Evaluamos en el punto crítico

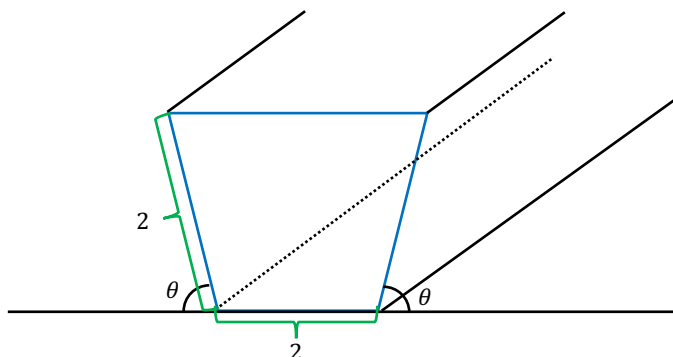
$$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4R^2 < 0$$

Así concluimos que en $\theta = \frac{\pi}{4}$ el área es máxima, de esta manera el área máxima es:

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = R^2$$

41. Se va a construir un abrevadero mediante una banda larga de metal de 6 metros de ancho, doblando con un ángulo θ una tira de 2 metros a cada lado, como se muestra en la figura, con

corte transversal un trapezoide ¿Cuál es el valor del ángulo que maximiza el área transversal, y con ellos el volumen del abrevadero?



a) $\frac{\pi}{6}$

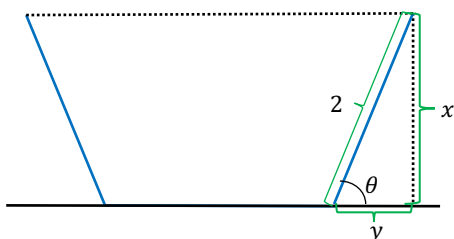
b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) $\frac{5\pi}{6}$

Respuesta b)



Con base en la figura, llamemos x a la longitud de la altura del trapezio y denotemos con y a la longitud de la base mostrada, entonces empleando las funciones seno y coseno se obtiene lo siguiente:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\text{sen}(\theta)$$

De manera similar

$$\text{cos}(\theta) = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2\text{cos}(\theta)$$

Sabemos que el área A de la salida del abrevadero es:

$$A = \frac{\text{base menor} + \text{base mayor}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A = \frac{2 + (2y + 2)}{2} x = \frac{(4 + 2y)x}{2} = (2 + y)x = 2x + 2xy$$

Sustituimos los valores de x e y , obtenemos

$$A(\theta) = 2(2\text{sen}(\theta)) + 2(2\text{sen}(\theta))(2\text{cos}(\theta)) = 4\text{sen}(\theta) + 2\text{sen}(2\theta)$$

Para encontrar el ángulo que maximiza el área, primero debemos encontrar los puntos críticos, después verificar que corresponde a un máximo, con este fin, derivamos e igualamos a cero.

$$A'(\theta) = 4\text{cos}(\theta) + 4\text{cos}(2\theta)$$

Empleando la identidad $\text{cos}(2\theta) = 2\text{cos}^2(\theta) - 1$, se tiene

$$\text{cos}(\theta) + 2\text{cos}^2(\theta) - 1 = 0$$

De esta manera

$$\cos(\theta) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos(\theta) = -1 \Rightarrow \theta = \pi \text{ o } \cos(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ considerando el ángulo más pequeño}$$

Observando la naturaleza del problema, descartamos la raíz $\theta = \pi$, así sólo verificamos la otra raíz.

Emplearemos el criterio de la segunda derivada.

$$A''(\theta) = -4\text{sen}(\theta) - 8\text{sen}(2\theta)$$

Evaluamos el punto crítico

$$A''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\frac{\sqrt{3}}{2} - 8\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -6\sqrt{3} < 0$$

Así por el criterio de la segunda derivada, hay un máximo en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

42. El volumen V mínimo posible de un cono circular recto, de altura h y con radio de la base r en el que se inscribe una esfera de radio R es:

a) $\frac{4\pi R^3}{3}$

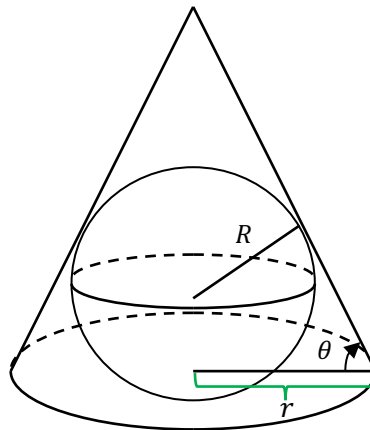
b) $\frac{5\pi R^3}{3}$

c) $\frac{6\pi R^3}{3}$

d) $\frac{8\pi R^3}{3}$

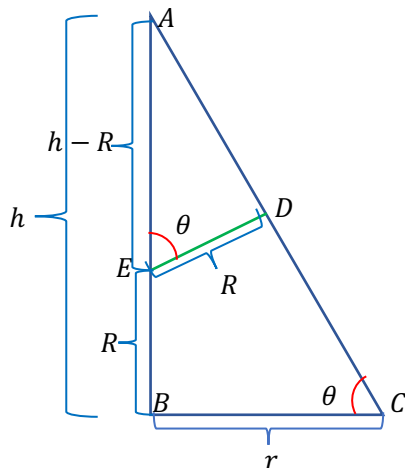
e) $\frac{9\pi R^3}{3}$

Minimiza V como función del ángulo θ , como se te muestra en la figura.



Respuesta d)

Realicemos un corte del cono y la esfera como se muestra en la figura siguiente, por ser el cono y la esfera tangentes, el radio de la esfera es perpendicular al cono en el punto D de tangencia, se puede probar que los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ABC$ son semejantes.



Del triángulo ΔAED

$$R = (h - R) \cos(\theta) \Rightarrow h = \frac{R(1 + \cos(\theta))}{\cos(\theta)} \quad (1)$$

Del triángulo ΔABC

$$\tan(\theta) = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \tan(\theta) \quad (2)$$

Igualemos (1) y (2)

$$\frac{R(1 + \cos(\theta))}{\cos(\theta)} = r \tan(\theta)$$

Por lo tanto

$$r = R \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Ahora con los valores de h y r encontrados, podemos calcular el volumen del V del cono

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 r \tan(\theta) = \frac{\pi}{3} r^3 \tan(\theta) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{R(1 + \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \right)^3 \tan(\theta) \\ &= \frac{R^3 \pi (1 + \cos(\theta))^3}{3 \sin^2(\theta) \cos(\theta)} \end{aligned}$$

La derivada con respecto a θ es:

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= \frac{R^3 \pi}{3} \frac{3(1 + \cos(\theta))^2 (-\sin(\theta)) \sin^2(\theta) \cos(\theta) - (1 + \cos(\theta))^3 (2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - \sin^3(\theta))}{\sin^4(\theta) \cos^2(\theta)} \\ &= \frac{R^3 \pi (1 + \cos(\theta))^2 \sin(\theta) [-3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - (1 + \cos(\theta))(2 \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))]}{3 \sin^4(\theta) \cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

La expresión que está en los corchetes lo podemos escribir de la manera siguiente

$$\begin{aligned} -3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - (1 + \cos(\theta))(2 \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) &= \\ &= -3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - 2 \cos^3(\theta) + \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ &= -2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - 2 \cos^3(\theta) \\ &= -2 \cos(\theta) [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] - 2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\ &= -2 \cos(\theta) - 2 \cos^2(\theta) + 1 - \cos^2(\theta) \\ &= -3 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) + 1 \\ &= (3 \cos(\theta) - 1)(-1 + \cos(\theta)) \end{aligned}$$

De esta manera la deriva de la función se puede escribir de la manera siguiente

$$V'(\theta) = \frac{R^3 \pi}{3} \frac{(1 + \cos(\theta))^2 \sin(\theta) (3 \cos(\theta) - 1)(-1 + \cos(\theta))}{\sin^4(\theta) \cos^2(\theta)}$$

Cálculo de los puntos críticos

$$V'(\theta) = 0 \Rightarrow (1 + \cos(\theta))^2 = 0, \sin(\theta) = 0, (3 \cos(\theta) - 1) = 0, -1 + \cos(\theta) = 0$$

La primera ecuación nos da $\theta = \pi$ la cual no satisface por las condiciones del problema, La segunda ecuación nos proporciona $\theta = 0$, igual que la primera ecuación, no satisface las condiciones del problema, la tercera ecuación

$$\cos(\theta) = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta \approx 1.23 \text{ rad}$$

Este valor del ángulo θ , nos proporciona un mínimo, ahora

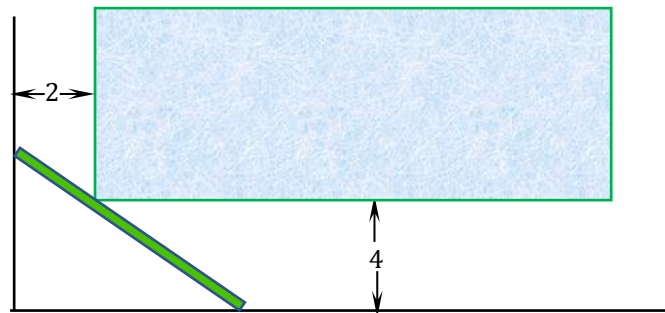
$$h = R \frac{1 + \cos(\theta)}{\cos(\theta)} = R \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4R,$$

$$r = R \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = R \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}} = R\sqrt{2}$$

De esta manera el volumen mínimo es:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} R^2 (2)(4R) = \frac{8\pi R^3}{3}$$

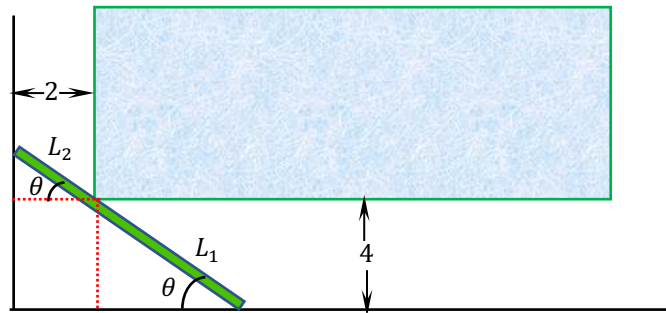
43. La longitud de la varilla más larga que se puede cargar horizontalmente dando vuelta a la esquina de un pasillo de 2 metros de ancho hacia otro con un ancho de 4 metros es:



- a) 5 m. b) 6 m. c) 6.5 m. d) 8 m. e) 8.30 m

Respuesta e)

Llamemos θ al ángulo entre la pared del pasillo y la varilla, denotemos por L a su longitud y dividámosla en dos partes llamadas L_1 y L_2 como se muestra en la figura



Mediante la función seno, se obtiene

$$\text{sen}(\theta) = \frac{4}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{4}{\text{sen}(\theta)} = 4\text{csc}(\theta)$$

Ahora, mediante la función coseno aplicado al otro triángulo se obtiene

$$\cos(\theta) = \frac{2}{L_2} \Rightarrow L_2 = \frac{2}{\cos(\theta)} = 2\sec(\theta)$$

De esta manera la longitud L de la varilla, se puede expresar en términos del ángulo θ , de la manera siguiente:

$$L(\theta) = L_1 + L_2 = 4\text{csc}(\theta) + 2\sec(\theta)$$

Para encontrar el mínimo de esta función, primero calculemos los puntos críticos y después mediante el criterio de la primera o segunda derivada, verifiquemos si es un máximo o un mínimo.

Puntos críticos, derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$L(\theta) = 4\text{csc}(\theta) + 2\sec(\theta) \Rightarrow L'(\theta) = -4\text{csc}(\theta)\cot(\theta) + 2\sec(\theta)\tan(\theta)$$

$$-4\text{csc}(\theta)\cot(\theta) + 2\sec(\theta)\tan(\theta) = 0 \Rightarrow 2\sec(\theta)\tan(\theta) = 4\text{csc}(\theta)\cot(\theta)$$

$$\sec(\theta)\tan(\theta) = 2\text{csc}(\theta)\cot(\theta)$$

$$\frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2}{\text{sen}(\theta)} \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}$$

$$\text{sen}^3(\theta) = 2\cos^3(\theta) \Rightarrow \frac{\text{sen}^3(\theta)}{\cos^3(\theta)} = 2$$

$$\tan^3(\theta) = 2 \Rightarrow \tan(\theta) = \sqrt[3]{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2}) \approx 0.8999 \text{ rad o } \theta \approx 51.5^\circ$$

Para $\theta = 0.8$, se tiene

$$L'(0.8) = -4\text{csc}(0.8)\cot(0.8) + 2\sec(0.8)\tan(0.8)$$

$$\approx -4(1.394)(0.971) + 2(1.435)(1.0296) = -2.459344 < 0$$

Para $\theta = 0.9$

$$\begin{aligned} L'(0.9) &= -4 \csc(0.9) \cot(0.9) + 2 \sec(0.9) \tan(0.9) \\ &\approx -4(1.2766)(0.794) + 2(1.609)(1.26) = 0.0001984 > 0 \end{aligned}$$

Por el criterio de la primera derivada hay un mínimo en $\theta = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ (y por ende la longitud máxima) para este valor del ángulo θ .

Finalmente, para calcular la longitud de la escalera, sustituimos el valor del ángulo encontrado en la función L .

$$L(\theta) = 4 \csc(0.8999) + 2 \sec(0.8999) \approx 4(1.2767) + 2(1.6085) = 8.3238$$

44. Si se dispara un proyectil desde el nivel del suelo, con una velocidad de v_0 y un ángulo de inclinación α y si se puede ignorar la resistencia del aire, entonces su alcance D (la distancia horizontal recorrida) está dada por

$$D(\alpha) = \frac{1}{16} v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

El valor del ángulo α que maximiza a D es:

$$a) \frac{\pi}{4} \qquad b) \frac{\pi}{2} \qquad c) \frac{\pi}{3} \qquad d) \frac{3\pi}{4} \qquad e) \frac{5\pi}{7}$$

Respuesta a)

Para obtener el máximo de la función D , primero debemos encontrar sus puntos críticos y después verificar si es un máximo o mínimo a través del criterio de la primera o segunda derivada, con este fin, derivemos a la función D e igualémosla a cero

Sabemos que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, así podemos escribir

$$D(\alpha) = \frac{1}{16} v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{32} v_0^2 \sin(2\alpha)$$

Primera derivada

$$D'(\alpha) = \frac{1}{16} v_0^2 \cos(2\alpha)$$

Ahora

$$\cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

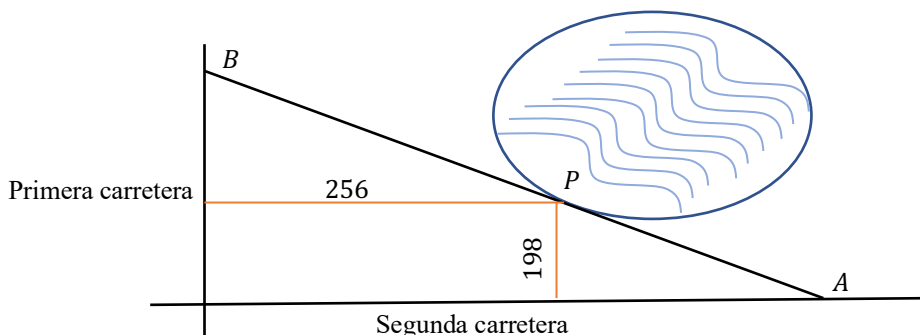
(consideramos sólo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ por las condiciones del problema)

Apliquemos el criterio de la segunda derivada

$$D''(\alpha) = -\frac{1}{8} v_0^2 \sin(2\alpha) \Rightarrow D''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8} v_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8} v_0^2 < 0$$

Por lo tanto, hay un máximo en $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

45. Dos carreteras forman ángulo de noventa grados en el punto de intersección, se encuentran cerca de un lago, la primera está a una distancia de 256 metros y la segunda a 108 metros del punto más cercano al lago como se muestra en la figura



La longitud de la carretera (AB) más corta que une las dos carreteras y pasa por el borde (P) del lago es:

- a) 300 m. b) 350 m. c) 400 m. d) 450 m. e) 500 m

Respuesta e)

Denotemos por D a la distancia de la carretera AB , la podemos calcular mediante la longitud de los segmentos BP y PA , con base en la figura, se tiene

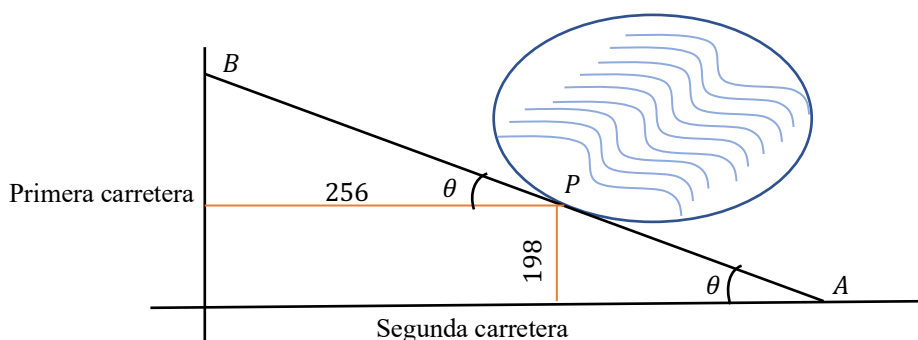
$$\cos(\theta) = \frac{256}{BP} \Rightarrow BP = \frac{256}{\cos(\theta)} = 256 \sec(\theta)$$

De manera similar

$$PA = 108 \csc(\theta)$$

Así

$$D(\theta) = BP + PA = 256 \sec(\theta) + 108 \csc(\theta)$$



Ahora, procedamos a encontrar el ángulo θ que minimiza a la función D .

$$\frac{dD}{d\theta} = 256 \sec(\theta) \tan(\theta) - 108 \csc(\theta) \cot(\theta) = \frac{256 \sen^3(\theta) - 108 \cos^3(\theta)}{\sen^2(\theta) \cos^2(\theta)}$$

Asociamos a la ecuación

$$256 \sen^3(\theta) - 108 \cos^3(\theta) = 0 \Rightarrow \tan^3(\theta) = \frac{108}{256} = \frac{27}{64}$$

entonces

$$\tan(\theta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.6435$$

Como $\frac{dD}{d\theta}$ tiene denominador positivo, para investigar su signo, sólo lo verificaremos en su numerador

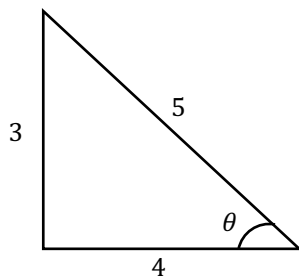
En radianes, consideramos $\theta = 0.5 < 0.6435$, entonces

$$256\operatorname{sen}^3(0.5) - 108\cos^3(0.5) \approx -44784 < 0$$

Para $\theta = 0.7$, se tiene

$$256\operatorname{sen}^3(0.7) - 108\cos^3(0.7) \approx 20.123 > 0$$

Por el criterio de la primera derivada, hay un mínimo, como $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$, entonces, con base en el triángulo rectángulo siguiente, se tiene



Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa tiene longitud 5, así tenemos

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{3}{5} \text{ y } \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

La longitud del camino más corto es:

$$\begin{aligned} D(\theta) &= 256 \sec(\theta) + 108 \csc(\theta) \\ &= 256 \frac{5}{4} + 108 \frac{5}{3} = 500 \end{aligned}$$

UNIDAD 1.

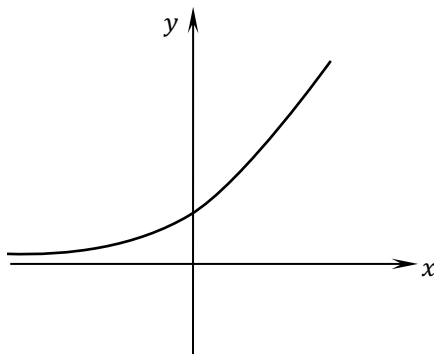
LA DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

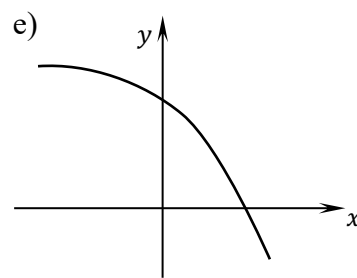
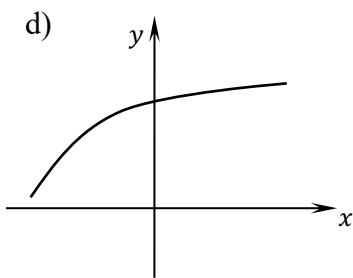
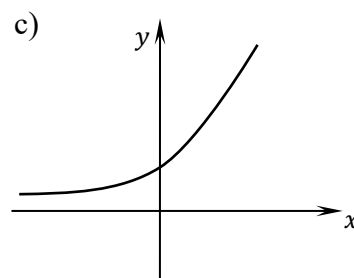
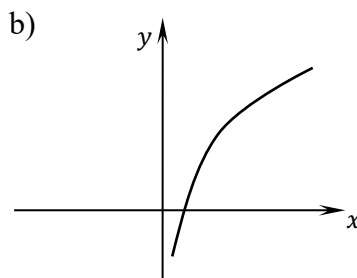
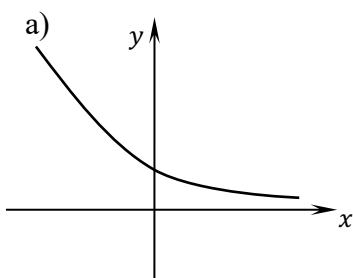
Unidad 1. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.		16 horas
Propósito: Al finalizar la unidad el alumno: Ampliará su conocimiento de la derivada a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.		
Tema	Aprendizajes	
Derivada de las funciones $e^x, e^u, 10^x$ y 10^u	Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.	
Derivada de las funciones $\ln x, \ln u, \log x, \log u$	Infiere la derivada de las funciones logarítmicas. Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.	
Resolución de problemas en diversos contextos.	Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.	

Tema	Aprendizajes
• Derivada de las funciones $e^x, e^u, 10^x$ y 10^u	Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.

46. Considera la gráfica de la función $f(x) = e^x$.



¿Cuál de las gráficas siguientes, representa a la gráfica de su derivada?



Respuesta c)

La gráfica es creciente y convexa así la función tiene derivada y segunda derivada positiva, es decir $f' > 0$ y $f'' > 0$, la segunda desigualdad implica que la primera derivada es creciente, por lo tanto, la gráfica mostrada en c) cumple con las condiciones.

47. El valor del límite siguiente (donde e es la constante de Euler)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

es:

- a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

Respuesta d)

Hay varias formas de obtener este límite, por ejemplo se puede emplear la regla de L'Hopital que dice lo siguiente, sean f y g dos funciones tales que $f(a) = g(a) = 0$, derivables en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Así

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{1} = e^0 = 1$$

Otra forma es por medio de aproximaciones.

48. Considera a la función dada por $f(x) = e^{-x}$ cuya gráfica es convexa en el intervalo

- a) $(-\infty, \infty)$ b) $(0, \infty)$ c) $(-\infty, 0)$ d) $(0, 1)$ e) $(-1, 1)$

Respuesta a)

La segunda derivada nos indica la concavidad de una función, así derivemos a la función dos veces,

$$f''(x) = e^{-x}$$

Esta función siempre es positiva, así la segunda derivada es positiva y por ende la función es convexa en todo su dominio (en $\mathbb{R}$)

49. Si la función f tiene regla de correspondencia $f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ entonces $f'(0)$ es:

- a) -5 b) -4 c) 0 d) -1 e) 2

Respuesta d)

Apliquemos la regla del cociente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+e^{2x})(-2e^{2x}) - 2e^{2x}(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x}(-1-e^{2x}-1+e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-4e^0}{(1+e^0)^2} = -\frac{4}{4} = -1 \end{aligned}$$

50. Considera la función $f(x) = e^{\sin(x)}$ con ayuda de la regla de la cadena calcula el valor de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

a) $e^{\sin(\frac{\pi}{2})}$

b) -1

c) 0

d) e

e) $\frac{\pi}{2}e$

Respuesta c)

Aplicamos la regla de la cadena, esta se puede realizar de dos maneras, primero Consideremos a las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = \sin(x)$, entonces

$$f(x) = g(h(x))$$

La regla de la cadena nos dice que

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

Como

$$g'(x) = e^x \text{ y } h'(x) = \cos(x)$$

Se tiene

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin(\frac{\pi}{2})} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^1(0) = 0$$

Por otra parte, podemos definir como $u(x) = \sin(x)$ y se tendría

$$f(x) = e^{u(x)} \text{ con } \frac{df}{du} = e^u \text{ y } \frac{du}{dx} = \cos(x)$$

Mediante la notación de Leibniz

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = e^{u(x)} \cos(x) = e^{\sin(x)} \cos(x)$$

Con lo cual se obtiene el mismo resultado

51. La concentración C en partes por millón, de un medicamento en el cuerpo durante t horas después de la ingestión está dada por la función $C(t) = 10t^2e^{-t}$. Encuentre el valor máximo de la concentración y en dónde se presenta.

$$a) t = 0,0 \quad b) t = 1,10 \quad c) t = 2,40 \quad d) t = 2, \frac{40}{e^2} \quad e) t = 1,10e^{-1}$$

Respuesta d)

Calculemos a la primera derivada

$$C'(t) = 20te^{-t} - 10t^2e^{-t} = 10te^{-t}(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 2$$

Ahora para determinar si el punto crítico es un máximo o mínimo, derivemos nuevamente a la función C .

$$\begin{aligned} C''(t) &= 20e^{-t} - 20te^{-t} - (20te^{-t} - 10t^2e^{-t}) \\ &= 10e^{-t}(-t^2 - 4t + 2) \end{aligned}$$

Evaluamos el punto crítico

$$C''(2) = 10e^{-2}(-4 - 8 + 2) = -100e^{-2} < 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada hay un máximo en $t = 2$, cuya imagen es

$$C(2) = 10(2)^2 e^{-2} = \frac{40}{e^2}$$

52. Encuentra los puntos críticos de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ en el intervalo $[0,4]$.

- a) 0,4 b) 0,1 c) 2,4 d) 2,3 e) 0,2

Respuesta e)

Primero derivamos a la función

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

Los puntos críticos son $x = 0, 2$,

53. La pendiente de la recta tangente a la curva dada por la función $f(x) = \cos(2x) - e^{-2x}$ en el punto $x = 0$ es:

- a) 1 b) 2 c) e^{-2} d) $\cos(0) - 1$ e) 2.5

Respuesta b)

Primero encontremos a la derivada, con el fin de saber el valor de la pendiente de la recta tangente

$$f'(x) = -2\operatorname{sen}(2x) + 2e^{-2x}$$

$$\text{Así } m = m(0) = -2\operatorname{sen}(0) + 2e^0 = 2.$$

54. Los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

son:

- a) $x = -1, 0, 1$ b) $x = -1.241971, 1.241971$ c) $-1, 1$ d) $x = -2, 2$ e) $x = 0$

Respuesta c)

Los puntos de inflexión se encuentran en donde la segunda derivada es cero, para localizar estos puntos derivemos dos veces a la función

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-x^2/2}$$
$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} - x(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-1 + x^2)$$

Cuyas raíces son $x = -1, 1$.

55. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^{-2}e^{2x}$ en el punto $x = -1$, es:

a) $3x - e^2y + 4 = 0$

b) $x + e^2y = 0$

c) $2x - e^2y + 3 = 0$

d) $4x - e^2y + 5 = 0$

e) $3x + e^2y + 4 = 0$

Respuesta d)

Para encontrar la ecuación de la recta tangente, requerimos un punto el cual nos dan y la pendiente de la recta tangente, es decir la derivada de la función evaluada en ese punto dado, con este fin calculemos la imagen del punto dado y la derivada de la función

$$y = f(1) = (-1)^{-2}e^{-2} = e^{-2}$$

Así el punto de tangencia es $(-1, e^{-2})$, ahora calculemos a la derivada de la función

$$f'(x) = -2x^{-3}e^{2x} + 2x^{-2}e^{2x} = 2x^{-3}e^{2x}(-1 + x)$$

Evaluemos la derivada en $x = -1$, entonces

$$m = f'(-1) = 2(-1)^{-3}e^{-2}(-2) = 4e^{-2}$$

Usando la ecuación de la recta en su forma punto pendiente

$$y - e^{-2} = 4e^{-2}(x + 1) \Rightarrow ye^2 - 1 = 4x + 4$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$4x - ye^2 + 5 = 0$$

56. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \cos(3x) + e^x$, cuando $x = 0$, es:

a) $y - x - 2 = 0$

b) $y + x + 2 = 0$

c) $y - x + 2 = 0$

d) $x + y + 3 = 0$

e) $x - y + 3 = 0$

Respuesta a)

Calculemos la imagen del punto dado

$$f(0) = \cos(0) + e^0 = 2$$

El punto de tangencia es $(0,2)$, para calcular la pendiente, derivamos a la función y la evaluamos en el punto de tangencia.

$$f'(x) = -3\text{sen}(3x) + e^x$$

Por lo tanto

$$m = f'(0) = -3\text{sen}(0) + e^0 = 1$$

Usando la ecuación de la recta, en su forma punto pendiente, se tiene

así

$$y - 2 = x$$

$$y - x - 2 = 0$$

57. Considera la función $f(x) = e^{-x^2}$ ¿en qué intervalo la gráfica de la función f es cóncava?

- a) $(-\infty, \infty)$ b) $(0, \infty)$ c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ d) $(-1, 1)$ e) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Respuesta e)

Recordemos que la gráfica de una función es cóncava cuando su segunda derivada es positiva, así para determinar el (los) intervalo(s) en donde es cóncava, calculemos la segunda derivada de la función, a saber

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2)$$

La función f tiene dos posibles puntos de inflexión, a saber, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, su dominio natural se divide en tres intervalos, que se muestran a continuación

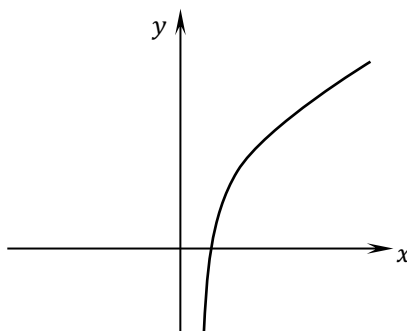


Evaluamos a la segunda derivada en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f''(-1) = 2e^{-1}(-1 + 2) > 0$, así la función f es cóncava en este intervalo, hagamos lo mismo en los otros dos intervalos

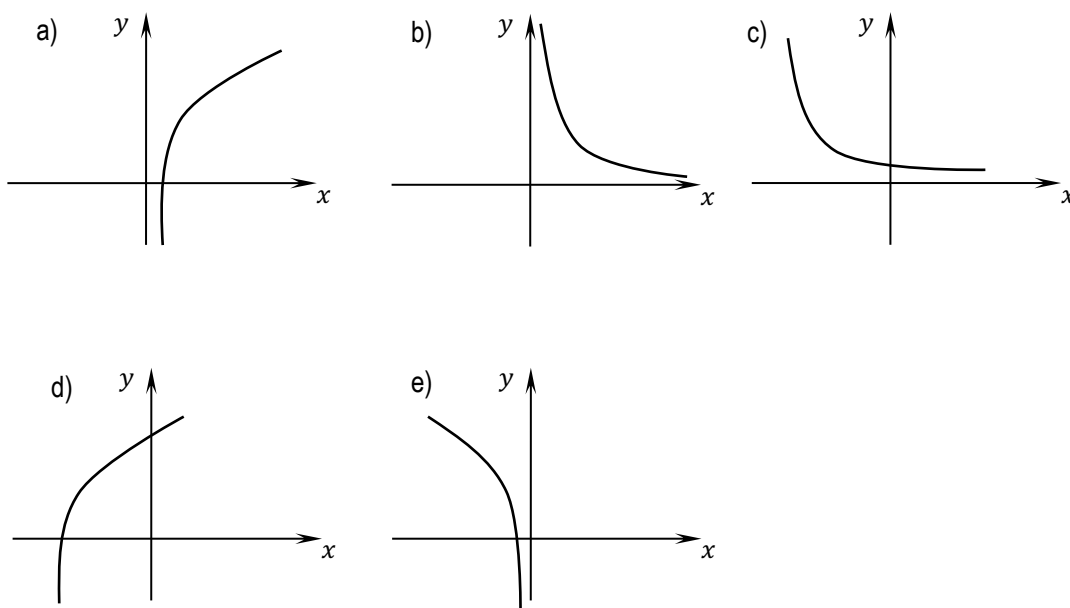
$f''(0) = 2(-1) = -2 < 0$, f es cóncava en el intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, finalmente, evaluemos a la función en $x = 1$, $f''(1) = 2e^{-1}(-1 + 2) > 0$, así la función es cóncava en el intervalo $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$. Por lo tanto, la gráfica de la función es cóncava en el intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Tema	Aprendizajes
Derivada de las funciones $\ln x, \ln u, \log x, \log u$	Infiere la derivada de las funciones logarítmicas. Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.

58. Considera la gráfica de la función $f(x) = \ln x$.



¿Cuál de las gráficas siguientes, representa a la gráfica de su derivada?



Respuesta b)

Por ser creciente la gráfica de la función su derivada es positiva $f' > 0$, así la gráfica de la derivada siempre está por arriba del eje x , también es convexa, es decir $f'' < 0$ lo cual implica que f' es decreciente, la única gráfica que cumple con las dos condiciones es la gráfica mostrada en el inciso b)

59. El valor del límite siguiente

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln h}{h - 1}$$

es:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) 2

Respuesta d)

Podemos calcular este límite por medio de aproximaciones, también por la regla de L'Hopital, así

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln(h)}{h - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{h}}{1} = 1$$

60. Empleando derivación logarítmica la derivada de la función $f(x) = 4^{\tan(x)}$ es:

a) $4^{\tan(x)} \sec^2(x) \ln(4)$

b) $4^{\tan(x)}$

c) $4^{\tan(x)} \sec^2(x)$

d) 0

e) $0^{\sec^2(x)}$

Respuesta a)

Hagamos $y = 4^{\tan(x)}$ tomemos logaritmos en ambos lados

$$\ln(y) = \ln(4^{\tan(x)}) = \tan(x) \ln(4)$$

Derivando ambos lados

$$\frac{y'}{y} = \sec^2(x) \ln(4) \Rightarrow y' = y \sec^2(x) \ln(4) = 4^{\tan(x)} \sec^2(x) \ln(4)$$

61. Para poder derivar a la función $f(x) = \ln \left[\frac{\cos^3(x)(3x^2+4)}{(e^x+1)^{3/2}} \right]$ las propiedades de los logaritmos se deben de aplicar en el orden:

- a) El logaritmo de un producto, logaritmo de un exponente y el logaritmo de un cociente.
- b) El logaritmo de un cociente, logaritmo de un exponente y el logaritmo de un producto.
- c) El logaritmo de un cociente, logaritmo de un producto y el logaritmo de una potencia.
- d) El logaritmo de un exponente, logaritmo de un producto y el logaritmo de un cociente.
- e) Se puede aplicar en cualquier orden.

Respuesta c)

62. ¿Cuál de las funciones siguientes es creciente en todo su dominio?

a) $f(x) = -\ln(x)$ b) $f(x) = e^{-x}$ c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = \sin(x)$ e) $f(x) = \ln x$

Respuesta e)

Recordemos que el dominio de la función $f(x) = \ln(x)$ es el intervalo $(0, \infty)$, su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ si } x > 0.$$

63. El mínimo de la función $f(x) = x^2 \ln(x)$ se encuentra en:

a) $e^{-1/2}$ b) e^0 c) e d) $e^{3/2}$ e) e^2

Respuesta a)

Encontremos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \left(\frac{1}{x} \right) = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } \ln(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-1/2}$$

Como $x = 0$, no está en el dominio de la función, consideraremos al punto crítico $x = e^{-1/2}$

La segunda derivada es $f''(x) = 2 \ln(x) + 2 + 1 = 2 \ln(x) + 3$, evaluamos en el punto crítico

$f''(e^{-1/2}) = 2\ln(e^{-1/2}) + 3 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2 > 0$, por lo tanto, por el criterio de la segunda derivada hay un mínimo en este punto crítico.

Tema	Aprendizajes
Resolución de problemas en diversos contextos.	Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

64. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \ln(x+1)$ en el punto (0,0) es:

a) $y = -x + 1$. b) $y + x = 0$. c) $y = x$. d) $2x + y - 1 = 0$. e) $x - y = 1$

Respuesta c)

Primero verificamos que el punto pertenece a la gráfica de la función, con este fin evaluamos a la función en el punto $x = 0$, así $f(0) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$, en efecto el punto pertenece a la gráfica de la función, ahora, procedamos a calcular la pendiente de la recta tangente, calculemos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow m = f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Así, se tiene la pendiente $m = 1$ y el punto de tangencia $T(0,0)$, ahora empleando la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, se tiene:

$$y = x$$

65. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x3^x$ en el punto (1,3) es:

a) $y = (3 + \ln(27))x - \ln(27)$ b) $y = 3x + \ln(27)$. c) $y = \ln(27)x + 3$
d) $y - 3 = x3^x(x-1)$ e) $y - 3 = (3^x + x3^x \ln(3))(x-1)$.

Respuesta b)

Verifiquemos que el punto pertenece a la gráfica de la función, $f(1) = 1(3^1) = 3$, así se verifica que el punto pertenece a la gráfica de la función, ahora, procedamos a calcular la pendiente de la recta.

$$f'(x) = 3^x + x(3^x)\ln(3)$$

La pendiente la encontramos evaluando a la derivada en el punto dado

$$m = f'(1) = 3^1 + 1(3^1)\ln(3) = 3 + 3\ln(3) = 3 + \ln(27)$$

Empleamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente.

$$y - 3 = (3 + \ln(27))(x - 1) = (3 + \ln(27))x - 3 - \ln(27)$$

$$y = (3 + \ln(27))x - \ln(27)$$

66. La abscisa del punto sobre la gráfica de $y = 2^x$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta dada por la ecuación $2y - 8x + 3 = 0$, es:

- a) 2. b) 2.5288. c) 3.567. d) 4.0123. e) $\ln(2)$
-

Respuesta b)

La abscisa la podemos encontrar igualando las pendientes de la recta dada y de la recta tangente, así pendiente de la recta dada $m = 4$, mientras que la pendiente general de la gráfica de la función es su derivada

$$y' = 2^x \ln(2)$$

Al igualarlas se tiene

$$2^x \ln(2) = 4 \Rightarrow 2^x = \frac{4}{\ln(2)} \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{4}{\ln(2)}\right)$$

$$x = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(4) - \ln(\ln(2))] = 2 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)} \approx 2.528766$$

67. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = xe^{\frac{1}{x^3}} + \ln(2 - x^2)$ en el punto $(1, e)$ es:

- a) $y = -2(1 + e)x + 2 + 3e$. b) $y = -x + e$. c) $y - e = 4(x - 1)$
d). $y - e = \left(xe^{\frac{1}{x^3}} + \ln(2 - x^2)\right)(x - 1)$ e) $y = x + e$
-

Respuesta a)

Primero verificamos que el punto está en la gráfica de la función,

$$f(1) = 1\left(e^{\frac{1}{1^3}}\right) + \ln(2 - 1^2) = e + \ln(1) = e$$

Ahora, calculemos su pendiente

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^3}} + x\left(-\frac{3}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x^3}} + \frac{-2x}{2 - x^2} = e^{\frac{1}{x^3}}\left(1 - \frac{3}{x^3}\right) - \frac{2x}{2 - x^2}$$

La pendiente es

$$f'(1) = e(1 - 3) - \frac{2}{2 - 1} = -2e - 2$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - e = -2(1 + e)(x - 1) = -2(1 + e)x + 2 + 2e$$

$$y = -2(1 + e)x + 2 + 3e$$

68. La ecuación de la recta normal a la curva $y = \ln x$ que es paralela a la recta $x - 2y - 1 = 0$ es:

a) $y = \frac{1}{x}(x - 2)$ b) $y - \ln(x) = \frac{1}{x}(x - 1)$ c) $y - \ln(2) = 2(x - 1)$
d) $2x + y - \ln(2) = 4.$ e) $2x - y + \ln(2) = 1$

Respuesta d)

Recordemos que dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si sus pendientes m_1 y m_2 respectivamente, satisfacen la relación $m_1 m_2 = -1$. La pendiente de la recta dada es $m_1 = \frac{1}{2}$ como la recta normal es perpendicular a la recta tangente, su pendiente debe de ser $m_2 = -2$, para encontrar el punto de tangencia (o el punto por donde pasa la recta normal), para ello calculemos la derivada de la función, a saber

$$y' = \frac{1}{x}$$

E igualamos a $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

Una vez encontrado el valor de la abscisa, encontremos el valor de la ordenada, evaluando el valor encontrado en la función

$$y = f(2) = \ln(2)$$

Así el punto de tangencia es $T(2, \ln(2))$, la ecuación punto pendiente de la recta normal es:

$$y - \ln(2) = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - \ln(2) = 4$$

69. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $x = e$ cruza al eje y?

a) $(e, 1)$ b) $(1, e)$ c) $(0, e)$ d) $(e, 0)$ e) $(0, 0)$

Respuesta e)

Primero encontremos el punto de tangencia, evaluamos en la función el valor de la abscisa

$$y = \ln(e) = 1$$

Así el punto de tangencia es el punto $T(e, 1)$, ahora calculemos la pendiente, con este fin derivamos a la función y la evaluamos en $x = e$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = f'(e) = \frac{1}{e}$$

La ecuación de la recta tangente en su forma punto pendiente es

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e} - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{e}$$

En el eje y , $x = 0$, por lo tanto $y = \frac{0}{e} = 0$, así la recta tangente cruza al eje y en el origen.

APLICACIONES DE VARIACIÓN.

70. El mínimo de la función $f(x) = x \ln(x)$ es:

- a) e^{-1} b) e c) 1. d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{e}$

Respuesta a)

Primero encontremos los puntos críticos

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

E igulemos a cero esta primera derivada

$$\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Calculemos a la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) = e > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada, hay un mínimo en el punto crítico.

71. ¿Para qué valores de a y b tendrá la función $f(x) = a(x - b \ln(x))$ un mínimo local en el punto $(2,5)$?

- a) $a = 1, b = 3.23$ b) $a = 2, b = 1.54$ c) $a = 8.147, b = 2$
d) $a = 4.56, b = 2.3$ e) $a = 3.12, b = 3.21$

Respuesta c)

Como la función pasa por el punto $(2,5)$, entonces

$$f(2) = a(2 - b \ln(2)) = 5$$

Por otra parte, en ese punto la función tiene un mínimo, es decir, la derivada en $x = 2$, es cero

$$f'(x) = a\left(1 - \frac{b}{x}\right) \Rightarrow f'(2) = a\left(1 - \frac{b}{2}\right) = 0$$

Suponiendo que $a \neq 0$, entonces $1 - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2$, sustituimos este valor en $f(2)$ y obtenemos

$$a(2 - 2 \ln(2)) = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2(1 - \ln(2))} \approx 8.147$$

72. El valor mínimo de la función $f(x) = 2^x - \ln(2^x)$ es:

a) - 1.

b) 0.

c) 0.5.

d) 1.

e) 1.5

Respuesta d)

Escribamos a la función de otra forma y derivémosla:

$$f(x) = 2^x - x \ln(2) \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln(2) - \ln(2) = \ln(2)(2^x - 1)$$

Así

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

La segunda derivada

$$f''(x) = \ln(2)(2^x \ln(2)) = (\ln(2))^2 2^x$$

y

$f''(0) = (\ln(2))^2 > 0$, por el criterio de la segunda derivada hay un mínimo en $x = 0$, ahora $f(0) = 2^0 - 0 \ln(2) = 1$, el valor mínimo es 1.

73. Un lago es repoblado con 500 peces y su población crece según la curva logística

$$p(t) = \frac{10000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

¿A qué ritmo crece la población de peces al cabo de un mes?

a) 50.

b) 60.

c) 80.56.

d) 102.435.

e) 113.506

Respuesta e)

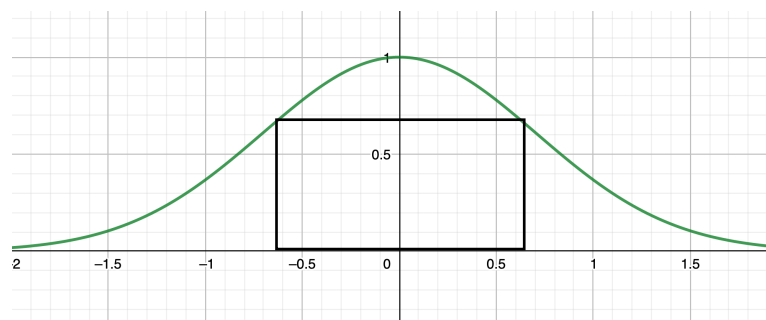
La velocidad de crecimiento se da con la derivada de la función, así

$$p'(t) = \frac{38000e^{-t/5}}{(1 + 19e^{-t/5})^2}$$

Ahora evaluamos esta derivada en $t = 1$, así

$$p'(1) = \frac{38000e^{-1/5}}{(1 + 19e^{-1/5})^2} \approx 113.506$$

74. El área del mayor rectángulo que puede inscribirse bajo la curva $f(x) = e^{-x^2}$ en el primero y segundo cuadrante es:



a) 0.2453

b) 0.556

c) 0.8

d) 0.858

e) 0.987

Respuesta d)

Llamemos $2x$ a la longitud de la base, así la longitud de la altura del rectángulo está dado por $y = e^{-x^2}$ y el área A del rectángulo es:

$$A(x) = 2xe^{-x^2}$$

Ahora calculemos el mínimo de la función área A , primero calculemos los puntos críticos

$$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calculemos la segunda derivada

$$A''(x) = -4xe^{-x^2}(1 - 2x^2) + 2e^{-x^2}(-4x) = -4xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$$

Evaluable en el punto crítico

$$A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\left(3 - 2\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{\sqrt{2}}e^{-1/2} < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada hay un máximo en el punto crítico, por lo que el área es

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} \approx 0.85776$$

75. Una población $P(t)$ de bacterias (en millones) en el instante t (en horas) es inicialmente (en el instante $t = 0$) de un millón. Si la población se triplica cada hora, entonces la población en el instante $t \geq 0$ está dada por $P(t) = 3^t$. ¿Cuál es la razón instantánea de crecimiento de esta población después de 4 horas?

- a) 3^4 b) 88.9876 c) 99.543 d) 102.324 e) 123.987

Respuesta b)

La razón de cambio instantánea está dada por la derivada de la función, así la razón de cambio instantánea en el tiempo t , es

$$P'(t) = 3^t \ln(3)$$

Así, en 4 horas, la razón de cambio instantánea es de

$$P'(t) = 3^4 \ln(3) \approx 88.9876$$

76. Para $t > 0$ ¿Cuál es el valor máximo de la función $f(t) = te^{-bt}$?

- a) $\frac{1}{b}$ b) b c) b^2 d) $\frac{1}{b^2}$ e) $2b$

Respuesta α)

Calculamos el punto crítico, $f'(t) = e^{-bt} - bte^{-bt} = e^{-bt}(1 - bt)$, el punto crítico es $t = \frac{1}{b}$, ahora la segunda derivada está dada por

$$f''(t) = -be^{-bt}(1 - bt) + e^{-bt}(-b) = e^{-bt}(-b + b^2t - b) = be^{-bt}(bt - 2)$$

Sustituimos el punto crítico

$$f''\left(\frac{1}{b}\right) = be^{-1}(1 - 2) = -be^{-1} < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada hay un máximo en $t = \frac{1}{b}$.

77. La concentración, $C(t)$ en mg/ml, de cierto medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente se ha modelado con

$$C(t) = 20te^{-0.03t}$$

- a) 1 b) 5 c) 15 d) 20.45 e) 33.33

Respuesta e)

El tiempo necesario para que la concentración alcance un máximo es:

Por el ejercicio anterior el máximo se encuentra en $t = \frac{1}{0.03} \approx 33.33$.

78. Si el tiempo t en horas y la concentración C es en mg/ml, la curva de concentración para cierto medicamento se encuentra con

$$C(t) = 12.4te^{-0.2t}$$

¿Cuál es la concentración máxima que alcanza la concentración?

- a) 22.8 b) 28.2 c) 31.2 d) 34.5 e) 37.2

Respuesta α)

Sabemos que el tiempo en que alcanza la concentración máxima se da en $t = \frac{1}{0.2} = 5$, es decir, a las cinco horas, sustituimos este valor en la concentración

$$C(5) = 12.4(5)e^{-0.2(5)} = 62e^{-1} \approx 22.8 \text{ mg/ml}$$

79. Una partícula se mueve en una línea recta conforme a la relación $s(t) = (t + 1)^2 \ln(t + 1)$ metros en donde s es la distancia dirigida de la partícula desde el punto de partida en t en segundos. La aceleración cuando $t = 3$ es:

a) 3.45

b) 4.763

c) 5

d) 5.773

e) 6.034

Respuesta d)

La aceleración está dada por la segunda derivada de la función, así derivemos a la función dos veces

$$s'(t) = 2(t+1)\ln(t+1) + (t+1)^2 \frac{1}{t+1} = (t+1)[2\ln(t+1) + 1]$$

$$s''(t) = 2\ln(t+1) + 1 + (t+1) \left[\frac{2}{t+1} \right] = 2\ln(t+1) + 3$$

Ahora evaluamos en $t = 3$,

$$a(3) = s''(3) = 2\ln(4) + 3 \approx 5.773$$

80. La función de posición de un punto que se está moviendo sobre una recta coordenada está dada por $s(t) = t^2 - 4\ln(t+1)$, donde $0 \leq t \leq 4$. La velocidad en $t = 2$ es:

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{9}{3}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $4 - 4\ln(4)$ e) 4

Respuesta a)

La velocidad se encuentra en la primera derivada, así

$$v(t) = s'(t) = 2t - \frac{4}{t+1}$$

Evaluamos en el punto pedido.

$$v(2) = 2(2) - \frac{4}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

UNIDAD 2.

LA INTEGRAL DEFINIDA.

PROPÓSITOS GENERALES.

- Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.
-

EL ÁREA BAJO UNA CURVA.

- El área bajo la gráfica de una función constante o lineal.

Supongamos que Manuel tiene un tinaco vacío. Este tinaco tiene una llave que al ser abierta vierte agua para llenarlo. Manuel sabe que la llave abierta tiene un flujo constante de 4.8 lt/min (4.8 litros por cada minuto) y le gustaría conocer cuánta agua tendrá el tinaco si abre la llave por 10 minutos. Para responder esta cuestión podemos abordarla utilizando la siguiente tabla:

Tiempo [min]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen [lt]	0	4.8	9.6	14.4	19.2	24	28.8	33.6	38.4	43.2	48

Por tanto, el tinaco tendrá 48 litros de agua después de 10 minutos. Este es un caso de una variación directamente proporcional y es muy sencillo resolverlo así; pero también se puede tratar de otra forma.

Ahora considera la siguiente gráfica:

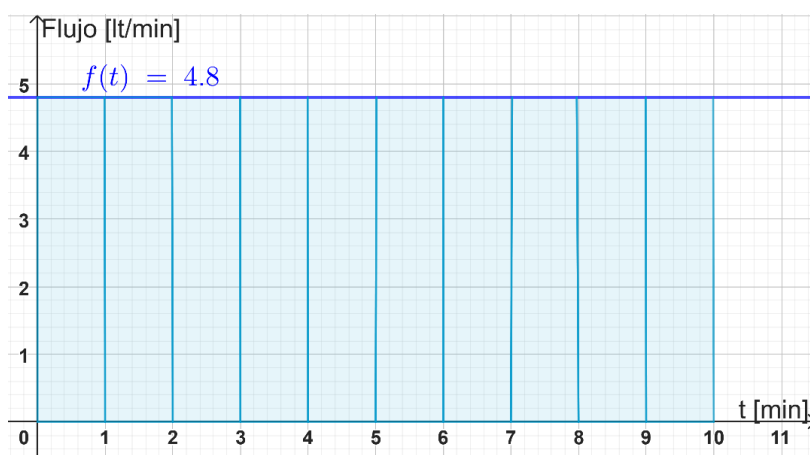


Figura 1.

En esta gráfica el eje horizontal corresponde al tiempo medido en minutos, mientras que el eje vertical corresponde al flujo de agua que vierte la llave. Observa que la función $f(t) = 4.8$ indica el flujo de agua de la llave, el cual es constante y por esa razón su gráfica es solo una recta horizontal. Manuel notó lo

siguiente: el área del rectángulo con base el subintervalo $[0,1]$ y altura 4.8 lt/min (esta altura corresponde al flujo de agua en todo este subintervalo) es

$$\text{Área del rectángulo 1} = \left(4.8 \frac{\text{lt}}{\text{min}}\right)(1 \text{ min}) = 4.8 \text{ lt.}$$

Es decir, el “área” de este rectángulo es igual a la cantidad de agua depositada en el tinaco durante el primer minuto y este rectángulo tiene como base un subintervalo del eje horizontal y como altura el valor del flujo.

Manuel también notó que el flujo de agua al inicio es $f(0) = 4.8$, y que al término del primer minuto es $f(1) = 4.8$ (sin tomar en cuenta unidades); esto no es sorprendente porque esta es una función constante. Sin embargo, el área del primer rectángulo se puede escribir como

$$\text{Área del rectángulo 1} = f(1) \cdot (1 - 0) = 4.8 \cdot 1 = 4.8$$

Donde, recordamos que $f(1) = 4.8$ es el flujo al momento 1 minutos con 0 segundos y $(1 - 0)$ es la “extensión” o “tamaño” del subintervalo $[0,1]$. El área del rectángulo 2, cuya base tomaremos como el subintervalo $[1,2]$, también se puede escribir como

$$\text{Área del rectángulo 2} = f(2) \cdot (2 - 1) = 4.8 \cdot 1 = 4.8$$

Donde $f(2)$ es el flujo al momento 2 minutos. Esta misma idea se puede aplicar con los demás rectángulos. Entonces el área total de los 10 rectángulos se puede expresar de la siguiente manera

$$\text{Área total} = f(1) \cdot (1 - 0) + f(2) \cdot (2 - 1) + f(3) \cdot (3 - 2) + \cdots + f(10) \cdot (10 - 9)$$

$$\text{Área total} = 4.8 \cdot 1 + 4.8 \cdot 1 + 4.8 \cdot 1 + \cdots + 4.8 \cdot 1 = 48$$

Esta cantidad es igual que el volumen de agua que se ha vertido en el tinaco durante 10 minutos. De esta manera, Manuel concluyó lo siguiente: *la cantidad total de agua que ingresó al tinaco durante 10 minutos es igual al “área bajo la gráfica” de la función $f(t) = 4.8$ sobre el intervalo $[0,10]$* . Esto es consecuencia de que cada rectángulo representa un aporte de agua al tinaco durante el lapso de un minuto, que corresponde a la extensión o tamaño de los subintervalos de tiempo mostrados en la figura 1. Al sumar todas las áreas de estos rectángulos matemáticamente estamos “acumulando” estos aportes de agua.

Podría pensarse que tratar este problema con este enfoque es engorroso; pero de hecho, este método para calcular “el área bajo una gráfica” es muy útil. Por ejemplo, Manuel pensó lo siguiente: ¿Cuánta agua tendría el tinaco al término de 10 minutos si la función de flujo de agua fuera $f(t) = 0.75t$ (este flujo también tiene unidades lt/min). Observa que ahora la función de flujo ya no es constante, pues la función f asigna un valor de flujo distinto para cada instante de tiempo; por ejemplo, cuando $t = 0$ minutos $f(0) = 0 \text{ lt/min}$ por tanto en el instante 0 el flujo de agua es 0; pero cuando $t = 0.5$ minutos, $f(0.5) = 0.375$ y por tanto a los 0.5 minutos el flujo de agua es 0.375 lt/min . Conforme transcurre el tiempo, el flujo que sale de la llave va aumentando. En esta situación el flujo está cambiando, ya no es fijo como en el caso anterior. Aún con esto es posible calcular la cantidad de agua, considerando $f(t) = 0.75t$, después de 10 minutos, y para esto utilizaremos la idea de los rectángulos en la siguiente sección.

- **Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos.**

Como ya hemos visto en el ejemplo anterior, una manera de calcular la cantidad de agua que ingresa al tinaco es dividiendo el tiempo total en varios subintervalos y calcular el área de cada rectángulo bajo la gráfica de la función de flujo f , tomando como base la extensión de cada subintervalo.

Sin embargo, en el caso en que $f(t) = 0.75t$ no es tan sencillo porque ahora el flujo aumenta conforme pasa el tiempo. Aun así podemos utilizar la idea del caso anterior; para esto observa la siguiente figura en la que se muestra la gráfica de la función de flujo $f(t) = 0.75t$.

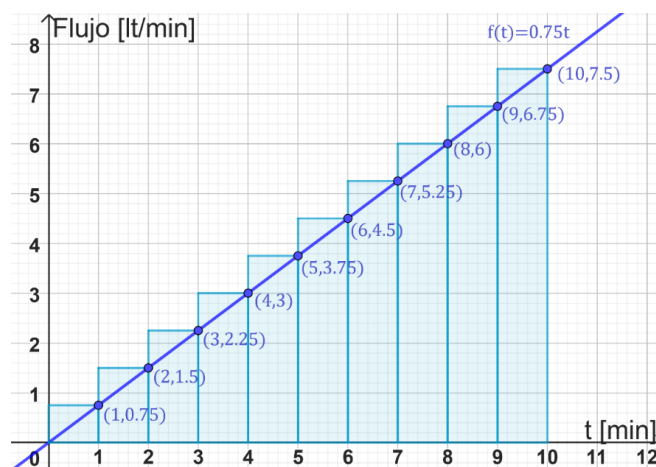


Figura 2.

A partir de la figura anterior, Manuel observa que el agua que ingresa al tinaco durante el primer minuto es aproximadamente igual al área del primer rectángulo de izquierda a derecha; es decir, durante el primer minuto ingresa aproximadamente

$$\text{Área del rectángulo 1} = f(1) \cdot (1 - 0) = 0.75 \cdot 1 = 0.75$$

Donde $f(1) = 0.75$ es el valor que toma la función f en $t = 1$. Es importante advertir que esta es una aproximación que supone que la cantidad de agua que ingresa al tinaco durante el primer minuto es en todo momento 0.75 lt/min ; lo cual no es cierto porque el flujo no es constante, pero nos da una idea de cuánta agua ingresa al primer minuto.

Del minuto 1 al minuto 2, ahora Manuel estima que la cantidad de agua que ingresa al tinaco es aproximadamente igual al área del segundo rectángulo

$$\text{Área del rectángulo 2} = f(2) \cdot (2 - 1) = 1.5 \cdot 1 = 1.5$$

Aquí $f(2) = 1.5$ es el valor que toma la función f en $t = 2$. Otra vez esto es una aproximación que considera que el flujo durante el segundo minuto es en todo momento 1.5 lt/min , y esto nuevamente no es cierto porque el flujo está aumentando instantáneamente, pero da una idea de cuánta agua ingresa al tinaco en este lapso. Nótese que al hacer estas aproximaciones, Manuel supone que el flujo “cambia a saltos” cada que transcurre un minuto completo.

Estas aproximaciones también se pueden realizar sobre los demás rectángulos; de tal manera que el agua total que ingresa al tinaco después de 10 minutos será aproximadamente igual a la acumulación del agua ingresada en cada subintervalo de tiempo, es decir, correspondería a la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$$\text{Área total} = f(1) \cdot (1 - 0) + f(2) \cdot (2 - 1) + f(3) \cdot (3 - 2) + \cdots + f(10) \cdot (10 - 9)$$

$$\text{Área total} = 0.75 \cdot 1 + 1.5 \cdot 1 + 2.25 \cdot 1 + \cdots + 7.5 \cdot 1 = 41.25$$

De esta manera, Manuel estimó que el agua que ingresó al tinaco después de 10 minutos fue aproximadamente 41.25 lt.

Manuel también se dio cuenta que las aproximaciones anteriores consideran “excesos de área”, ya que al observar la gráfica de la figura 2, el área de cada rectángulo corresponde a una aproximación del área bajo la gráfica de la función f en cada subintervalo. Por tanto, en cada subintervalo se está considerando “área de más”, lo que resulta en que se está tomando en cuenta más agua de la que realmente ingresó al tinaco. Para evitar esto, Manuel ahora consideró la siguiente figura

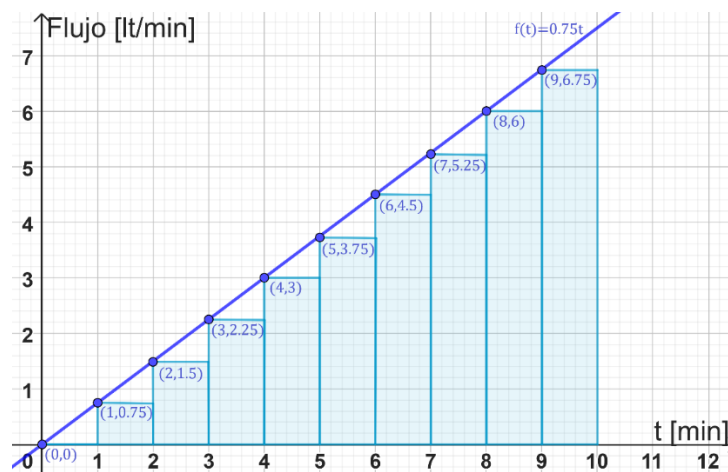


Figura 3.

En la figura anterior se observa que los rectángulos ahora están totalmente por debajo de la gráfica de la función $f(t) = 0.75t$. De esta manera la cantidad de agua que ingresa al tinaco en el primer minuto sería aproximadamente igual al área del primer rectángulo, es decir,

$$\text{Área del rectángulo 1} = f(0) \cdot (1 - 0) = 0 \cdot 1 = 0$$

Esto evidentemente no es cierto, pero hay que recordar que se trata de una aproximación del cálculo del agua vertida por la llave durante el primer minuto. Durante el segundo minuto, el agua que entra al tinaco sería aproximadamente igual al área del segundo rectángulo

$$\text{Área del rectángulo 2} = f(1) \cdot (2 - 1) = 0.75 \cdot 1 = 0.75$$

Mientras que la cantidad de agua introducida al tinaco durante el tercer minuto sería aproximadamente igual a

$$\text{Área del rectángulo 3} = f(2) \cdot (3 - 2) = 1.5 \cdot 1 = 1.5$$

Entonces, Manuel se percató que la cantidad de agua que entró al tinaco durante 10 minutos es aproximadamente igual al área de los 10 rectángulos de la figura 3; es decir,

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= f(0) \cdot (1 - 0) + f(1) \cdot (2 - 1) + f(2) \cdot (3 - 2) + \dots + f(9) \cdot (10 - 9) \\ \text{Área total} &= 0 \cdot 1 + 0.75 \cdot 1 + 1.5 \cdot 1 + \dots + 6.75 \cdot 1 = 33.75 \end{aligned}$$

Por tanto, el agua que ingresó al tinaco durante los 10 minutos fue aproximadamente 33.75 lt. Sin embargo, esta aproximación tiene la desventaja de que en el cálculo del área de cada rectángulo se está considerando “menos área” bajo la gráfica de la función $f(t) = 0.75t$, por lo que se está tomando en cuenta menos agua de la que realmente se introdujo en el tinaco.

De todo lo realizado anteriormente podemos destacar lo siguiente:

- Con la aproximación correspondiente a la figura 2 se obtuvo que 41.25 *lt* ingresaron al tinaco
- Con la aproximación correspondiente a la figura 3 se obtuvo que 33.75 *lt* ingresaron al tinaco.

Manuel notó que una manera de calcular el agua que ingresó al tinaco durante los 10 minutos es considerando que el área bajo la gráfica de la función $f(t) = 0.75t$ corresponde al área de un triángulo rectángulo cuya base mide 10 y su altura mide 7.5; de tal manera que

$$\text{Área total bajo la gráfica} = \frac{10 \cdot 7.5}{2} = 37.5$$

Por tanto, la cantidad de agua total es exactamente 37.5 *lt*. De este resultado, Manuel concluyó que, si bien, las estimaciones realizadas con los rectángulos no son exactas, sí son del mismo orden y de hecho son cantidades similares entre ellas, por lo que dichas estimaciones no están muy alejadas del valor exacto.

Como ya hemos visto, el cálculo del área bajo una gráfica de una función puede ayudar en la resolución de problemas, entre ellos están: cálculo de áreas, volúmenes, cantidad de fluido, distancias recorridas, energía potencial, etc. En las situaciones anteriores, el cálculo del área bajo una gráfica no resultó muy complicado; sin embargo, hay muchas situaciones donde esto no es así por lo que se recurre a aproximaciones o a teoremas que facilitan el cálculo; todo esto se verá adelante.

A continuación, se darán algunas definiciones y uso de notación que serán de mucha utilidad

Definición. Partición.

Sea un intervalo cerrado $[a, b]$ donde $a < b$, una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de números reales de dicho intervalo de tal manera que cumplen lo siguiente:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Ejemplo. Si consideramos el intervalo $[0, 10]$, entonces una partición de este intervalo sería el conjunto $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Otra partición sería el conjunto $Q = \{0, 2, \pi, 5, 9.5, 9.75, 10\}$.

Ejercicio. Escribe tres ejemplos de particiones para los siguientes intervalos

- $[0, 5]$
- $[-2, \pi]$

Notación de suma

La letra griega Σ “sigma” se utiliza para denotar sumas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=m}^n A_i = A_m + A_{m+1} + \cdots + A_n$$

Donde m , n e i son números enteros que cumplen $m \leq i \leq n$, y A_i es un número real. Al número i se le conoce como índice ya que indica el orden en que se presentan los sumandos A_i .

Ejemplo. A continuación, daremos algunos ejemplos del uso de la notación anterior

-

$$\sum_{i=0}^5 i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

b)

$$\sum_{i=1}^4 2i^2 = 2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + 2(4)^2 = 60$$

c)

$$\sum_{i=-2}^2 3i = 3(-2) + 3(-1) + 3(0) + 3(1) + 3(2) = 0$$

Ejercicio. Escribe las siguientes sumas utilizando la notación del símbolo Σ “sigma”.

a) $1+2+3+4+5$

b) $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

Definición. Aproximación por la izquierda del área bajo una gráfica

Sea f una función real definida sobre el intervalo $[a, b]$, sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ como

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Observa que el índice i va desde 1 hasta n , por lo que esta suma tiene n sumandos.

Ejemplo. Observa que el cálculo del área total de los rectángulos mostrados en la figura 3 corresponde a una aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de la función $f(t) = 0.75t$ sobre el intervalo $[0, 10]$ y cuya partición es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. El único aspecto distinto es el intercambio de la variable t por x , pero esto no afecta el resultado final. Nota que la suma efectuada tiene 10 sumandos, cada uno corresponde al área de un rectángulo.

Ejercicio. Considera la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$, tomemos la siguiente partición

$$P = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

Observa que esta partición tiene 11 puntos equidistantes (la separación entre cualesquiera dos puntos próximos es igual). Consideremos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2, \dots, x_{10} = 1$. Entonces, la aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$ requiere de 10 sumandos y se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_{i-1})^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = (x_0)^2(x_1 - x_0) + (x_1)^2(x_2 - x_1) + \dots + (x_9)^2(x_{10} - x_9)$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_{i-1})^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0^2(0.1 - 0) + 0.1^2(0.2 - 0.1) + \dots + 0.9^2(1 - 0.9)$$

Desarrolla la suma anterior y muestra que:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_{i-1})^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0^2(0.1) + 0.1^2(0.1) + \cdots + 0.9^2(0.1) = 0.285$$

Definición. Aproximación por la derecha del área bajo una gráfica

Sea f una función real definida sobre el intervalo $[a, b]$, sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la aproximación por la derecha del área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ como

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Observa que el índice i va desde 1 hasta n , por lo que esta suma tiene n sumandos.

Ejemplo. Observa que el área total del cálculo del área de los rectángulos de la figura 2 corresponde a una aproximación de por la derecha del área bajo la gráfica de la función $f(t) = 0.75t$ sobre el intervalo $[0, 10]$ y cuya partición es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. El único aspecto distinto es el intercambio de la variable t por x , pero esto no afecta el resultado final. Nota que la suma efectuada también tiene 10 sumandos, cada uno corresponde al área de un rectángulo.

Ejercicio. Considera la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$, tomemos la siguiente partición

$$P = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

Consideremos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2, \dots, x_{10} = 1$. Entonces, la aproximación por la derecha del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$ requiere de 10 sumandos y se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = (x_1)^2 \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + (x_{10})^2 \cdot (x_{10} - x_9)$$

Desarrolla lo anterior y muestra que el resultado de esta aproximación es 0.385.

Las aproximaciones de los ejercicios 3 y 4 corresponden a la estimación del área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$. En ambos ejercicios se dividió el intervalo $[0, 1]$ en diez subintervalos iguales y cada uno representó la base para un rectángulo. Sin embargo, es posible obtener mejores aproximaciones si se divide dicho intervalo en partes más pequeñas, de esa manera se espera que los rectángulos en las aproximaciones no tengan mucha “área de más” o “área de menos” y la estimación total del área bajo la gráfica sea más cercana. En la siguiente sección se mostrará cómo obtener mejores estimaciones para el cálculo del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el mismo intervalo $[0, 1]$.

- **Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$ donde k es una constante.**

Ejemplo. Consideremos nuevamente la función $f(x) = x^2$ definida sobre el intervalo $[0,1]$, pero ahora tomemos la partición $P = \{0, 0.02, 0.04, 0.06, \dots, 0.98, 1\}$; es decir, esta partición contempla puntos cuya separación es 0.02, por lo que contemplaremos 50 subintervalos (habrá 50 rectángulos para nuestras aproximaciones). Una buena forma de denotar a los puntos de esta partición es mediante la expresión

$$x_i = 0.02i$$

Donde el índice i toma los valores $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 50$. Así, por ejemplo, el punto 0 de esta partición es $x_0 = 0.02(0) = 0$, o el punto 3 es $x_3 = 0.02(3) = 0.06$, y el punto 50 es $x_{50} = 0.02(50) = 1$. Por otro lado, la aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = (x_0)^2(x_1 - x_0) + \dots + (x_i)^2(x_{i+1} - x_i) + \dots + (x_{49})^2(x_{50} - x_{49})$$

Como los puntos están separados entre ellos por 0.02; entonces $x_1 - x_0 = 0.02$, $x_2 - x_1 = 0.02, \dots$, $x_{50} - x_{49} = 0.02$. Además $x_i = 0.02i$; por tanto, la expresión anterior resulta en

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = (0)^2(0.02) + \dots + (0.02i)^2(0.02) + \dots + (0.02 \cdot 49)^2(0.02)$$

Aunque esta suma es muy larga se puede simplificar haciendo algunas maniobras; por ejemplo, el término 0.02 es un término común en todos los sumandos, entonces es posible factorizarlo. Luego,

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.02((0)^2 + \dots + (0.02i)^2 + \dots + (0.02 \cdot 49)^2)$$

Notemos que $(0.02i)^2 = 0.0004i^2$ (recuerda que i toma valores desde 0 hasta 49), entonces

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.02(0.0004 \cdot 0^2 + \dots + 0.0004i^2 + \dots + 0.0004 \cdot 49^2)$$

Y nuevamente aparece un término común en los sumandos, el número 0.0004, y podemos volver a factorizar, a partir de esto se obtiene

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.02 \cdot 0.0004(0^2 + \dots + i^2 + \dots + 49^2)$$

Ahora, notemos que encontrar el valor de la suma anterior ya se ha simplificado bastante pues la expresión $0^2 + \dots + i^2 + \dots + 49^2$ corresponde a la suma de los números enteros consecutivos elevados al cuadrado comenzando desde el 0 hasta el 49, esto porque i toma valores desde 0 hasta 49. Por ahora nos

concentraremos en esta suma y para esto utilizaremos la siguiente identidad

Suma de los primeros números naturales elevados al cuadrado

Si $m \geq 1$ es un número natural, entonces

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Luego,

$$0^2 + \dots + i^2 + \dots + 49^2 = 0 + 1^2 + \dots + 49^2 = \frac{49(49+1)(2 \cdot 49 + 1)}{6} = \frac{242550}{6} = 40425.$$

Y en conclusión

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.02 \cdot 0.0004(40425) = 0.3234.$$

Por lo tanto, la aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ es igual a 0.3234.

Ejercicio. Siguiendo el desarrollo anterior, de manera similar, obtén la aproximación por la derecha del área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ utilizando la partición $P = \{0, 0.02, 0.04, 0.06, \dots, 0.98, 1\}$ (la misma partición utilizada para la aproximación por la izquierda). Para lograrlo desarrolla la expresión

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = (x_1)^2(x_1 - x_0) + \dots + (x_i)^2(x_i - x_{i-1}) + \dots + (x_{50})^2(x_{50} - x_{49})$$

Recuerda que $x_i = 0.02i$. El resultado correcto de esta aproximación es 0.3434.

La siguiente definición es una generalización de las aproximaciones usadas para la estimación del cálculo del área bajo la gráfica de una función f en un intervalo $[a, b]$.

Definición. Suma de Riemann

Sea f una función real definida sobre el intervalo $[a, b]$, sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Se define la suma de Riemann como la aproximación del área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\hat{x}_1) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + f(\hat{x}_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Donde $\hat{x}_i$ es algún punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Observa que la aproximación por la derecha del área bajo la gráfica de alguna función f es un tipo de suma de Riemann si escogemos $\hat{x}_{i+1}$ como el extremo derecho de cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que

la aproximación por la izquierda del área bajo la gráfica de f también es un tipo de suma de Riemann si escogemos $\hat{x}_{i+1}$ como el extremo izquierdo de cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. De aquí en adelante se utilizará suma de Riemann con puntos por la izquierda para referirnos a una aproximación por la izquierda, y suma de Riemann con puntos por la derecha para referirnos a una aproximación por la derecha. Utilizaremos una suma de Riemann en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea la función $f(x) = 4x^3$ definida en el intervalo $[0, 2]$. Encontraremos una aproximación del área bajo la gráfica de esta función en dicho intervalo mediante una suma de Riemann con puntos por la derecha. Consideremos la partición $P = \{0, 0.05, 0.1, \dots, 1.95, 2\}$; de este modo los subintervalos generados tendrán una longitud de $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ y además habrá un total de 40. Los puntos de esta partición se pueden expresar mediante

$$x_i = x_0 + \frac{(x_n - x_0)i}{n} = 0 + \frac{(2 - 0)i}{40} = \frac{i}{20}$$

Donde $i = 0, 1, \dots, 40$. El punto $x_0 = 0$ y $x_{40} = 2$; por tanto $x_1 = \frac{1}{20} = 0.05$, $x_2 = \frac{2}{20} = 0.1$, etc. Entonces la suma de Riemann con puntos por la derecha se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) &= f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ \sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) &= 4(x_1)^3 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + 4(x_{40})^3 \cdot (x_{40} - x_{39}) \end{aligned}$$

Pero la longitud de cada subintervalo es $\frac{1}{20}$; entonces,

$$\sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 4(x_1)^3 \cdot \frac{1}{20} + \dots + 4(x_{40})^3 \cdot \frac{1}{20}$$

Nota que se pueden factorizar que cada sumando tiene como factor común a $4(0.05)$; por lo que se puede simplificar de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 4 \cdot \frac{1}{20} (x_1^3 + \dots + x_{40}^3)$$

Además, $x_i = \frac{i}{20}$, entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) &= 4 \cdot \frac{1}{20} \left(\left(\frac{1}{20} \right)^3 + \dots + \left(\frac{i}{20} \right)^3 + \dots + \left(\frac{40}{20} \right)^3 \right) \\ \sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) &= \frac{4}{20} \left(\frac{1^3}{20^3} + \dots + \frac{i^3}{20^3} + \dots + \frac{40^3}{20^3} \right) \end{aligned}$$

Observa que $\frac{1}{20^3}$ es un factor común en la suma de la parte derecha; luego podemos factorizar

$$\sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{4}{20} \cdot \frac{1}{20^3} (1^3 + \dots + i^3 + \dots + 40^3)$$

Ahora la suma de Riemann está expresada en términos de la suma de los primeros números naturales elevados al cubo. Para esta suma utilizaremos la siguiente identidad

Suma de los primeros números naturales elevados al cubo

Si $m \geq 1$ es un número natural, entonces

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2$$

Con ayuda de esta identidad podemos terminar de calcular la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{40} 4(x_i)^3 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{4}{20^4} \left(\frac{40(41)}{2} \right)^2 = 16.81$$

Por tanto, el área bajo la gráfica de $f(x) = 4x^3$ sobre el intervalo $[0,2]$ es aproximadamente 16.81.

Ejercicio. Siguiendo un ejemplo similar al del ejemplo 6, calcula la suma de Riemann con puntos por la izquierda de la función $f(x) = 4x^3$ sobre el intervalo $[0,2]$.

Hasta el momento se ha aproximado el valor del área bajo la gráfica de funciones de tipo $f(x) = kx^n$, con $n = 0,1,2,3$. Esto porque el área bajo una curva, o en nuestro caso “el área bajo una gráfica”, es una cantidad que muchas veces está relacionada con magnitudes de interés para las Matemáticas y la Física: longitud, área, volumen, distancia recorrida, energía potencial, velocidad, etc.

Al área bajo la gráfica de alguna función real f , sobre un intervalo $[a, b]$, se le conoce como *integral de la función f en $[a, b]$* y se denota con el símbolo “ $\int$ ” de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Lo anterior se lee “la integral de la función f con respecto a la variable x en el intervalo $[a, b]$ ”. Más adelante se dará una definición más formal de la integral.

• **Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva.**

Ya hemos estudiado la integral de una función f en un intervalo $[a, b]$ cuando la gráfica está arriba del eje x ; pero es posible que la gráfica de alguna función también esté debajo del eje x . En este caso, el área que se toma en consideración es de aquella región que se encuentra entre el eje x y la gráfica de la función. Por ejemplo, considera la figura 4, en la que se observa la gráfica de la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $[-2,3]$. La región de color azul es la que se considera para el cálculo de la integral de esta función en dicho intervalo.

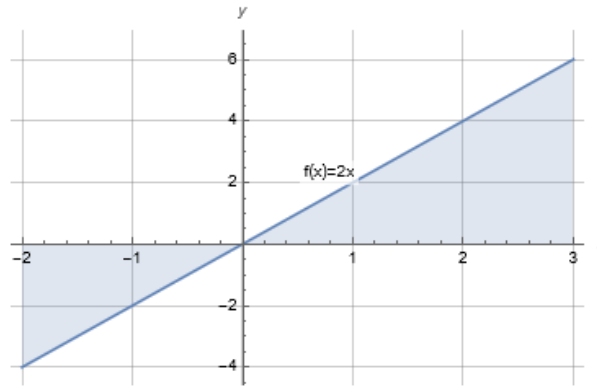


Figura 4.

Sin embargo, a diferencia del área geométrica que siempre es positiva, en el cálculo de integrales es posible tener “área negativa”; así por ejemplo, en la figura 4 la integral de la función $f(x) = 2x$ en $[-2, 3]$ se puede ver como el área de dos regiones: la región del intervalo $[-2, 0]$ y la región del intervalo $[0, 3]$. En la primera región, el área será

$$\text{Área del triángulo 1} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(0 - (-2))(-4)}{2} = \frac{2(-4)}{2} = -4$$

Nota que el resultado que se obtuvo fue negativo. Esto se debe a que los valores que toma la función sobre $[-2, 0]$ son negativos (excepto en $x = 0$, ahí $f(0) = 0$). Para argumentar mejor este resultado, calcularemos una suma de Riemann con puntos por la derecha con la partición $P = \{-2, -2.01, \dots, 0\}$, es decir, esta partición tiene 201 puntos los cuales se pueden expresar como

$$x_i = x_0 + \frac{(x_{200} - x_0)i}{200} = -2 + \frac{(0 - (-2))i}{200} = -2 + \frac{2i}{200} = -2 + \frac{i}{100}$$

Donde i toma valores enteros desde 0 hasta 200. Observa que cuando $i = 0$ se obtiene $x_0 = -2$; y cuando $i = 200$, $x_{200} = 0$. Además la separación entre cualesquiera dos puntos consecutivos es $\frac{1}{100}$; entonces, la suma de Riemann con puntos por la derecha será:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) &= f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ \sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} &= 2x_1 \cdot \frac{1}{100} + \dots + 2x_i \cdot \frac{1}{100} + \dots + 2x_n \cdot \frac{1}{100} \\ \sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} &= 2 \frac{1}{100} (x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n) \\ \sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} &= \frac{2}{100} \left(\left(-2 + \frac{1}{100} \right) + \dots + \left(-2 + \frac{i}{100} \right) + \dots + \left(-2 + \frac{200}{100} \right) \right) \end{aligned}$$

Observa que en la suma de la derecha cada término tiene un -2 que es sumado 200 veces porque el índice de la suma va desde 1 hasta 200. Tomando en cuenta esto, reacomodaremos la suma como

$$\sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} \left((-2) + \dots + (-2) + \dots + (-2) + \frac{1}{100} + \dots + \frac{i}{100} + \dots + \frac{200}{100} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} \left(-400 + \frac{1}{100} + \dots + \frac{i}{100} + \dots + \frac{200}{100} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} (-400) + \frac{1}{50} \left(\frac{1}{100} + \dots + \frac{i}{100} + \dots + \frac{200}{100} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} = -8 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{100} (1 + \dots + i + \dots + 200)$$

Ahora la suma de Riemann ha quedado expresada en términos de la suma de los primeros 200 números naturales, para lo cual utilizaremos la siguiente identidad

Suma de los primeros números naturales

Si $m \geq 1$ es un número natural, entonces

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Y en conclusión,

$$\sum_{i=1}^{200} 2x_i \cdot \frac{1}{100} = -8 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{200(201)}{2} \right) = -3.98$$

Por tanto, mediante esta suma de Riemann, la aproximación del área sobre el intervalo $[-2,0]$ (la aproximación de la integral sobre $[-2,0]$) es -3.98. Nota que este resultado es muy próximo a -4 , el correspondiente al cálculo del área del triángulo 1, sobre el intervalo $[-2,0]$, de la figura 4.

Finalmente, terminaremos de calcular la integral de la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $[-2,3]$, que como ya habíamos mencionado se puede ver como el área de la región sobre el intervalo $[-2,0]$ y el área de la región sobre $[0,3]$. Procederemos con el cálculo del área de la segunda región-

$$\text{Área del triángulo 2} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(3-0)(6)}{2} = \frac{3(6)}{2} = 9$$

Y por lo tanto,

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^3 2x dx = \text{Área del triángulo 1} + \text{Área del triángulo 2} = -4 + 9 = 5$$

A continuación, procederemos con una definición más formal de la integral de una función.

LA INTEGRAL DEFINIDA.

Hasta el momento se han calculado aproximaciones de integrales por medio de sumas de Riemann, las cuales implican la suma de áreas de muchos rectángulos inscritos o circunscritos, y parece ser que mientras mayor sea el número de estos rectángulos, mejor será la aproximación del “área bajo una gráfica”, lo cual se acerca al concepto de integral; pero ¿qué tantos rectángulos se requieren para obtener el verdadero valor de una integral? En la gran mayoría de los casos, se requiere una cantidad infinita de rectángulos que pareciera algo imposible porque tendríamos que efectuar una suma infinita de áreas y ello podría tener un valor infinito; sin embargo, esto no es así para muchos casos y se debe al concepto de límite.

Definición. Integral definida

Sea f una función con dominio un intervalo cerrado $[a, b]$. Si existe

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

donde $|\mathcal{P}|$ es la longitud de cada uno de los subintervalos generados por alguna partición del intervalo $[a, b]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; se dice que f es integrable en $[a, b]$. Además, llamada integral definida (o integral de Riemann) de f entre a y b , es el valor de dicho límite, es decir,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Nota que en la definición anterior, mientras más pequeños sean los subintervalos generados por alguna partición, más pequeña será la cantidad $|\mathcal{P}|$ por lo que ésta tenderá a cero. Pero esto también hace que el número de subintervalos generados sea cada vez mayor y tienda a infinito. Sin embargo, como veremos adelante, el concepto de límite permitirá encontrar el valor de muchas integrales. Más aún, una manera de facilitar los cálculos es tomando particiones que generen subintervalos del mismo tamaño, tal y como lo hemos venido haciendo. Ahora se presentan algunos ejemplos del uso de la definición anterior.

Ejemplo. Utilizando la definición de integral definida, calcula

$$\int_0^4 x dx$$

La función en cuestión es $f(x) = x$ y el intervalo es $[0, 4]$. Tomaremos una partición con $n + 1$ puntos, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, donde n es un número natural cualesquiera; entonces, los puntos de esta partición se pueden expresar mediante

$$x_i = x_0 + \frac{(x_n - x_0)i}{n} = 0 + \frac{(4 - 0)i}{n} = \frac{4i}{n}$$

donde i toma valores desde 0 hasta n ; de esta manera, la longitud Δx_i de los subintervalos es la misma y es igual a $\frac{4}{n}$, por lo que $|\mathcal{P}| = \frac{4}{n}$. Para hacer muy pequeña la cantidad $|\mathcal{P}|$ podemos hacer que $n \rightarrow \infty$. Luego, por definición de integral definida,

$$\int_0^4 x dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

El último paso efectuado fue “sacar” el término $\frac{4}{n}$ porque es un factor común en todos los términos de la suma de Riemann. Continuando con el desarrollo y recordando que $x_i = \frac{4i}{n}$, se obtiene

$$\int_0^4 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

Nuevamente $\frac{4}{n}$ es un factor común en los términos de la suma de Riemann y por eso se pudo “sacar”. Ahora, la última expresión está en términos de la suma de los primeros n números naturales; entonces, de la identidad antes mencionada resulta que

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Entonces,

$$\int_0^4 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{2n^2} (n^2 + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2}{n^2} + \frac{8n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 + \frac{8}{n} = 8$$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 x dx = 8$$

Este es el resultado exacto de la integral de $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0,4]$. Nota que de manera implícita se consideró una infinidad de puntos que dividen al intervalo en cuestión, a este método se le conoce como *Método de exhaución de Eudoxio*. Compara con lo que se observa en la figura 5.

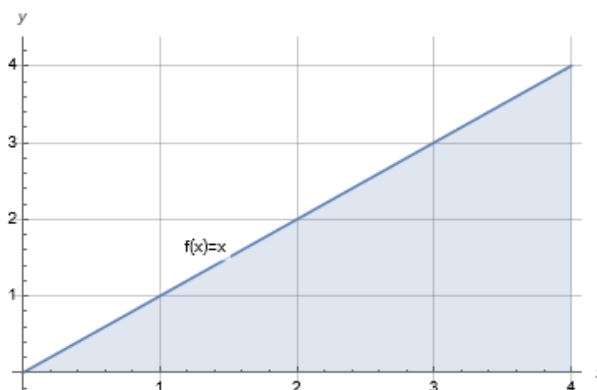


Figura 5.

En esta figura se observa la gráfica de la función $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0,4]$. El área bajo esta gráfica es

$$\text{Área} = \frac{(4-0)(4)}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Lo cual coincide con lo que obtuvimos con la definición de integral definida.

Ejercicio. Desarrollando la definición de integral definida comprueba que

$$\int_0^6 x^2 dx = 72$$

Ayuda: en algún momento del desarrollo de tus cálculos deberás llegar la suma de los cuadrados de los primeros números naturales, usa la identidad correspondiente.

Como ya hemos visto, el cálculo de integrales suele ser un poco engorroso; pero afortunadamente las integrales tienen propiedades que resultan muy útiles, las cuales se enlistan abajo.

• **Propiedades.**

Consideremos dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, integrables en un intervalo $[a, b]$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:

1. Si c es un número real, entonces la función $cf(x)$ es integrable en $[a, b]$ y su integral es

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

2. La función $(f + g)(x)$ es integrable en $[a, b]$ y su integral está dada por

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. Si r es un número real tal que $a \leq r \leq b$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

Estas propiedades se pueden deducir a partir de la definición de integral y de las propiedades de las sumas de Riemann; pero aquí nos enfocaremos en que en su utilidad en el proceso de integración de funciones.

Ejemplo. Considera las siguientes integrales:

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \quad y \quad \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

Ambas integrales se presentan con su valor exacto (un valor aproximado de la segunda integral se dio en el ejemplo 5), más adelante se dará una herramienta muy útil para calcular cada una de ellas. Observa que ambas integrales están calculadas sobre el intervalo $[0, 1]$. Entonces, a partir de estas integrales se puede calcular la siguiente

$$\int_0^1 2x + 5x^2 dx$$

Para esto observa que por la propiedad 2

$$\int_0^1 2x + 5x^2 dx = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 5x^2 dx$$

Luego, por la propiedad 1

$$\int_0^1 2x + 5x^2 dx = 2 \int_0^1 x dx + 5 \int_0^1 x^2 dx$$

Pero sabemos que $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ y que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$; entonces,

$$\int_0^1 2x + 5x^2 dx = 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 5 \left(\frac{1}{3} \right) = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}.$$

También se puede calcular

$$\int_0^1 4x^2 - x dx$$

Y esto resultaría como

$$\int_0^1 4x^2 - x dx = \int_0^1 4x^2 + (-1)x dx = 4 \int_0^1 x^2 dx + (-1) \int_0^1 x dx = 4 \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx$$

Y finalmente,

$$\int_0^1 4x^2 - x dx = 4 \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Ejercicio. Considera la siguiente integral

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

Utilizando las propiedades mencionadas y con ayuda del ejemplo 8 calcula las siguientes integrales:

- a) $\int_0^1 3x^3 + 4x^2 dx$
- b) $\int_0^1 2x^3 - 7x dx$
- c) $\int_0^1 5x^3 - 3x^2 + 4x dx$

El Teorema Fundamental del Cálculo

La obtención del área bajo una gráfica, o mejor dicho, la obtención de la integral de alguna función real en un intervalo puede resultar muy laborioso mediante límites aplicados a sumas de Riemann; afortunadamente existe un teorema muy importante que puede facilitar mucho el cálculo de diversas integrales. Veremos las ideas más básicas que permiten la formulación de este teorema.

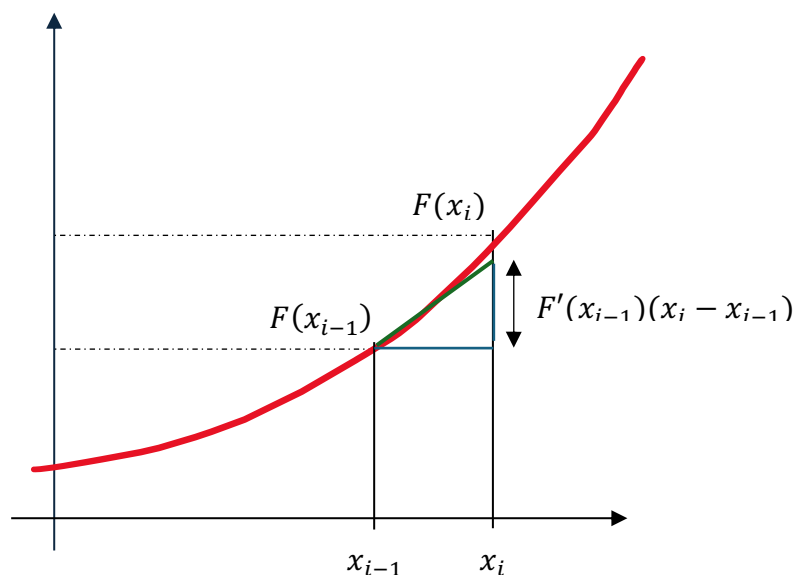


Figura 6.

En la figura 6 muestra la gráfica de una función $F(x)$ que supondremos como derivable. Observa el triángulo rectángulo que está sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, este triángulo tiene como hipotenusa la recta de color verde, esta es una recta tangente a la gráfica de color rojo en el punto $(x_{i-1}, F(x_{i-1}))$ y por tanto la hipotenusa de este triángulo tiene pendiente igual a:

$$F'(x_{i-1}).$$

Entonces, el cateto vertical de este triángulo rectángulo mide $F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Entonces se sigue la siguiente aproximación:

$$F(x_i) \approx F(x_{i-1}) + F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Esta aproximación suele ser mejor mientras el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ sea más pequeño. Otra manera de ver esta aproximación es de la forma

$$F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \approx F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Esta manera de escribir la aproximación la utilizaremos en el siguiente razonamiento.

Ahora, supongamos una función $f(x)$ integrable en un intervalo $[a, b]$, supongamos también una partición de $n + 1$ puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con n algún número natural. Entonces la integral definida de esta función es por definición

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Recuerda que la cantidad $|\mathcal{P}|$ representa el tamaño de cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ (no necesariamente tienen que ser del mismo tamaño). Además supongamos que existe una función $F(x)$ cumple que $f(x) = F'(x)$ para cualquier número real x en $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F'(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Pero como se expresa en el límite, $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$, por lo que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ son extremadamente pequeños y por lo visto anteriormente, la aproximación deducida de la figura 6 se vuelve exacta, luego

$$F'(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Sin embargo, la suma que está dentro del límite se puede desarrollar, término a término, de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \dots$$

Observa que el término $F(x_1)$ se cancela con $-F(x_1)$, $F(x_2)$ se cancela con $-F(x_2)$, y así sucesivamente y solo quedan los términos $F(x_n)$ y $-F(x_0)$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

Sustituyendo esto en el cálculo de la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} F(b) - F(a)$$

Observa que la cantidad dentro del límite no depende de $|\mathcal{P}|$, por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este importante resultado se conoce como “Teorema Fundamental del Cálculo” y representa una poderosa herramienta para obtener integrales. Es importante aclarar que el razonamiento realizado no es una demostración de este teorema, pues carece de rigor, pero contiene sus ideas fundamentales. Si observas con atención la última ecuación notarás que si queremos calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y por alguna razón conocemos una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ en este mismo

intervalo, entonces la obtención de esa integral resulta muy sencilla porque equivale a realizar la resta $F(b) - F(a)$. A la función $F(x)$ se le suele llamar *antiderivada de f* o *primitiva de f* . Las primeras personas que dedujeron este importante teorema fueron los matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, junto con Isaac Barrow (este último fue profesor de Newton). Veremos algunos ejemplos del uso de este teorema, pero antes daremos un enunciado del mismo.

Teorema. Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable y con dominio un intervalo cerrado $[a, b]$. Si existe una función F con dominio en $[a, b]$ tal que $f(x) = F'(x)$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo. Utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener las siguientes integrales

- a) $\int_{-1}^2 x dx$
- b) $\int_1^3 x^2 dx$
- c) $\int_0^5 x^3 dx$
- d) $\int_a^b x^n dx$ para cualquier número entero $n \geq 1$ y números reales a y b tales que $a < b$.

Solución. En el a) observa que si tomamos $f(x) = x$ y $F(x) = \frac{x^2}{2}$; entonces $F'(x) = x = f(x)$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_{-1}^2 x dx = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

En el b) observa que si tomamos $f(x) = x^2$ y $F(x) = \frac{x^3}{3}$; entonces,

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}.$$

En el c) si tomamos $f(x) = x^3$ y $F(x) = \frac{x^4}{4}$; entonces,

$$\int_0^5 x^3 dx = \frac{5^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{625}{4}.$$

En el inciso d), habrás notado que si tomamos $f(x) = x^n$ y $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, entonces

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Ejercicio. Utiliza las propiedades de la integral y el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener las siguientes integrales.

- a) $\int_{-2}^5 3x dx$
- b) $\int_{-3}^3 4x^2 dx$
- c) $\int_{-5}^5 2x^3 dx$

Hasta el momento hemos visto como calcular integrales, en la siguiente sección veremos algunas de sus aplicaciones.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

En esta sección veremos algunas situaciones para las cuales es útil la integral.

- Área comprendida entre dos funciones.

Considera la siguiente figura

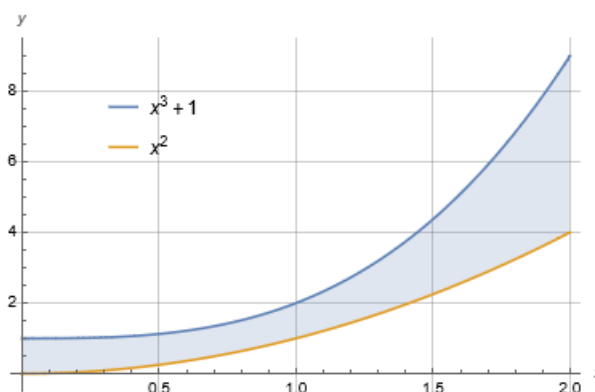


Figura 7.

Se muestran las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Mediante el cálculo de integrales es posible conocer el área encerrada entre las gráficas de dichas funciones. Observa que esta área será igual al área bajo la gráfica de $f(x) = x^3 + 1$ menos el área bajo la gráfica de $g(x) = x^2$. Entonces:

$$\text{Área encerrada} = \int_0^2 x^3 + 1 dx - \int_0^2 x^2 dx$$

Y utilizando las propiedades de las integrales y el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos:

$$\text{Área encerrada} = \int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 1 dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$\text{Área encerrada} = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) + (2 - 0) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{10}{3}$$

Por lo tanto, el área encerrada es $\frac{10}{3}$ y tiene unidades u^2 , donde u es una unidad arbitraria de longitud.

- **Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.**

Supongamos que un objeto tiene una velocidad dada por $v(t) = 3t^2 - 5t$ medida en m/s y en un intervalo de tiempo que va desde $t = 2$ s hasta $t = 8$ s. ¿Cuál será la distancia recorrida por este objeto en ese intervalo de tiempo?

Solución. Supongamos que $[2, 8]$ representa el intervalo de tiempo y sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de este intervalo. Si la partición es muy fina y los subintervalos de tiempo son muy cortos; entonces, en algún subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (donde i es un índice que puede tomar un valor desde 0 hasta n) podríamos decir que la distancia recorrida será:

$$\text{"Distancia recorrida en } [t_{i-1}, t_i]\text{"} = v(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

Entonces la distancia total recorrida será aproximadamente igual a la suma de todas las distancias recorridas en los subintervalos de tiempo; es decir:

$$Distancia\ total \approx \sum_{i=0}^n v(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=0}^n v(t_i)\Delta t_i.$$

Pero, si el número de puntos de la partición P tiende a infinito; entonces los $\Delta t_i \rightarrow 0$, y la suma de Riemann anterior se convierte en integral:

$$Distancia\ total = \int_{t_0}^{t_n} v(t)dt = \int_2^8 3t^2 - 5t\ dt = \int_2^8 3t^2 dt + \int_2^8 (-5)t\ dt$$

$$Distancia\ total = 3 \int_2^8 t^2 dt - 5 \int_2^8 t dt = 3 \left(\frac{8^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) - 5 \left(\frac{8^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 354$$

Por lo tanto el objeto recorrió 354 m en total.

UNIDAD 2.

LA INTEGRAL DEFINIDA.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

Niveles cognoscitivos (Bloom)

1. Conocer, 2. Comprender, 3. Aplicar

Tema	Aprendizaje	Niveles Cognitivos		
		1	2	3
EL ÁREA BAJO UNA CURVA. - El área bajo una curva constante o lineal. - Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. - Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$ donde k es una constante. - Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva.	Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos. Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de área a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general. Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$ como un límite de sumas infinitas para $n = 1, 2$ y 3. Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$ y calcula con ella el área en el intervalo $[a, b]$.	1, 2	6	3, 4, 5
		7, 9	8, 10, 11	
			12, 13, 14	
		15, 16		
			17, 18	
LA INTEGRAL DEFINIDA. - Definición. - Propiedades. - Función área como una antiderivada. - Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo.	Identifica a la integral definida como el límite de sumas infinitas. Utiliza propiedades de la integral definida. Identifica una función área como una antiderivada o primitiva. Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del Cálculo.	15, 16		
			30, 31	
		19, 20, 26, 41	27, 28	21
		22, 23		
			24, 25, 26	

	• Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.		24, 25, 26, 40,	42, 43
Aplicación de la integral definida	• Identifica los elementos que sustentan el teorema fundamental del cálculo.	27, 36, 37, 38	28, 29	35
• Área comprendida entre dos funciones.		30, 31,	39	32, 33, 34
• Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.	• Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.	44	45	46, 47, 48, 49
• Cálculo de una población a partir de la tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.	• Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una función velocidad.			50, 51, 52
	• Identifica a la velocidad de crecimiento de una población y con ayuda del TFC calcula la función del crecimiento de la población.			

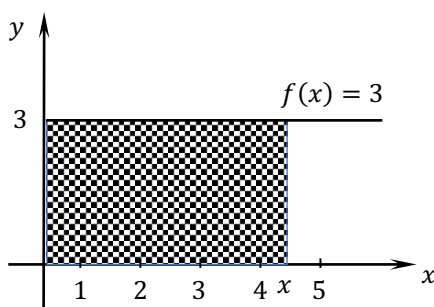
**PROBLEMAS UNIDAD 2.
LA INTEGRAL DEFINIDA.**

Aprendizajes: Al finalizar la unidad el alumno:

Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.

TEMA	APRENDIZAJES
El área bajo una curva.	Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos.

1. Considera a la función constante $f(x) = 3$, cuya gráfica se muestra abajo.



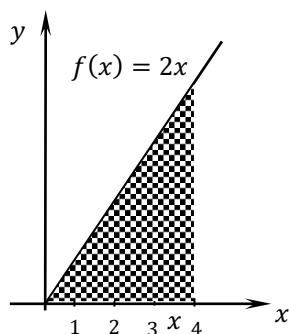
Considera el área A del rectángulo desde el origen hasta el punto x (positivo), el valor de $A(4)$ es:

- a) 8 b) 9 c) 11 d) 12 e) 14

Respuesta: d)

Utilizamos la fórmula de área para el rectángulo

2. Considera a la función $f(x) = 2x$, cuya gráfica se muestra abajo.



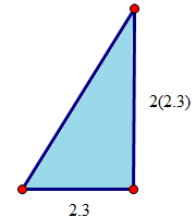
Considera el área A del triángulo desde el origen hasta el punto x (positivo), el valor de $A(2.3)$ es:

- a) 3.2 b) 3.57 c) 4.49 d) 5.00 e) 5.29

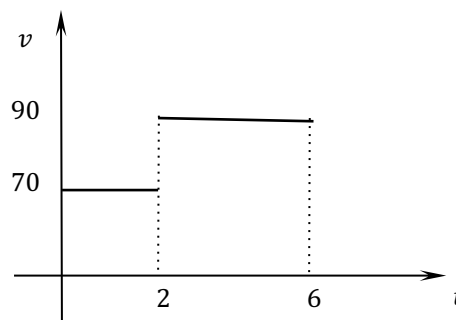
Respuesta: e)

Obtenemos un rectángulo con las siguientes medidas:
Utilizando la fórmula del área del triángulo tenemos

$$A(2.3) = \frac{(2.3)(2)(2.3)}{2}$$
$$A(2.3) = \frac{10.58}{2} = 5.29$$



3. Suponga que un estudiante viaja en un automóvil, primero viaja a una velocidad y posteriormente con otra velocidad mayor, un amigo hace la gráfica de la trayectoria de la velocidad durante las seis horas que estuvo viajando, la gráfica se muestra abajo, con base en ella, calcula la distancia que recorrió el auto.



- a) 400 b) 500 c) 550 d) 600 e) 650

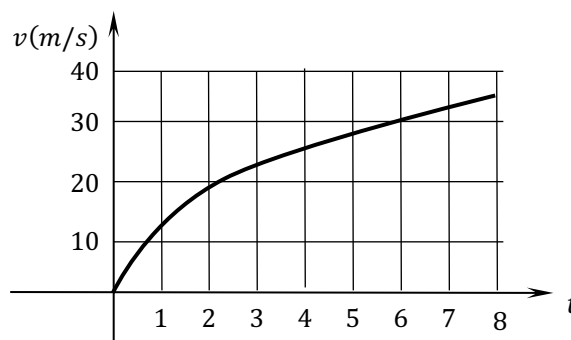
Respuesta: b)

Haciendo un despeje de la fórmula $v = \frac{d}{t}$ tenemos que la distancia sería en este contexto la velocidad por el tiempo ($d = vt$), también lo podemos ver geoméricamente como las áreas de los rectángulos que se ven en la figura.

Distancia = Área rectángulo 1 + Área rectángulo 2

En este caso Distancia = $2(70) + 4(90) = 140 + 360 = 500$

4. En la gráfica siguiente se muestra la velocidad, v , de un objeto (en m/s). Una estimación de la distancia total que el objeto recorrió entre $t = 0$ y $t = 8$, es:

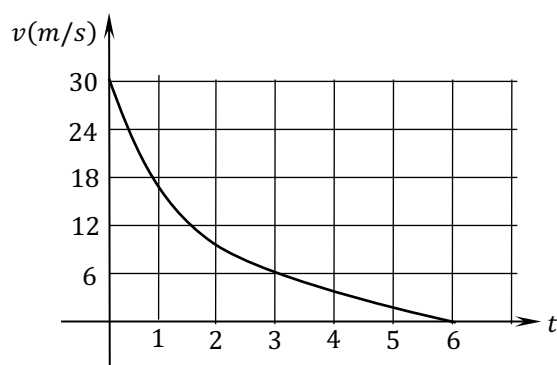


- a) entre 155 y 175 b) entre 100 y 110 c) entre 120 y 130 d) entre 185 y 195 e) entre 180 y 200

Respuesta a)

Cada rectángulo tiene un área de 10 unidades, debajo de la gráfica hay del punto $t = 2$ a $t = 8$ y debajo de la velocidad 20, 12 rectángulos (120 metros) de $t = 5$ a $t = 8$, entre las velocidades 20 y 30, hay 3 rectángulos (30 metros), y la parte de los rectángulos restantes aproximadamente son otros dos rectángulos (20 metros), así en total hay aproximadamente $120+30+20 = 160$ metros

5. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Emplea esta gráfica para estimar la distancia que recorre durante la aplicación de los frenos.



- a) entre 40 y 70 b) entre 50 y 80 c) entre 100 y 130 d) entre 105 y 115 e) entre 120 y 130

Respuesta a)

Cada rectángulo tiene un área de 6 unidades, el área representa la distancia recorrida por el automóvil, ahora calculemos aproximadamente el número de rectángulos, de $t = 0$ a $t = 4$ y velocidad entre 0 y 6, hay 4 rectángulos (24 metros), entre $t = 0$ y $t = 1$, y velocidad 6 a 18, hay aproximadamente 2 rectángulos, es decir 12 metros, entre $t = 1$ y $t = 2$, velocidad entre 6 y 12, hay otro rectángulo, es decir 6 metros más, el área restante aproximadamente tiene otro rectángulo, es decir 6 metros más, en total aproximadamente hay $24+12+6+6=48$ metros.

6. La región del plano cartesiano limitada por las curvas asociadas a: $f(x) = 4x^3$, $x = -2$, $x = 2$ y el eje x tiene un área de:

a) $4u^2$

b) $-16u^2$

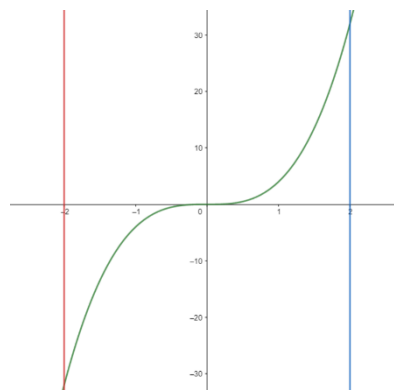
c) $32u^2$

d) $0u^2$

e) $16u^2$

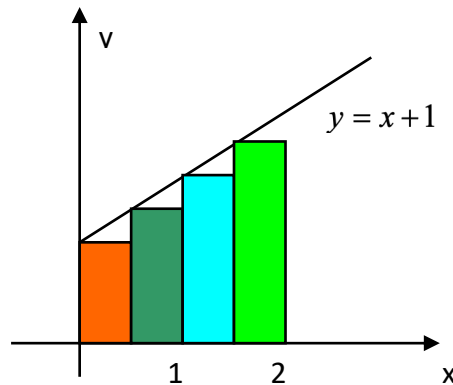
Respuesta: d)

Podemos observar que la función $4x^3$ es simétrica con respecto al eje de las x (ver figura de la derecha) por lo cual el área positiva ($x > 0$) y el área negativa ($x < 0$) tendrán la misma área y al restarlas el resultado será 0.



TEMA	APRENDIZAJES
Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos.	Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de área a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general. Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito

7. El área del polígono indicado, inscrito es:



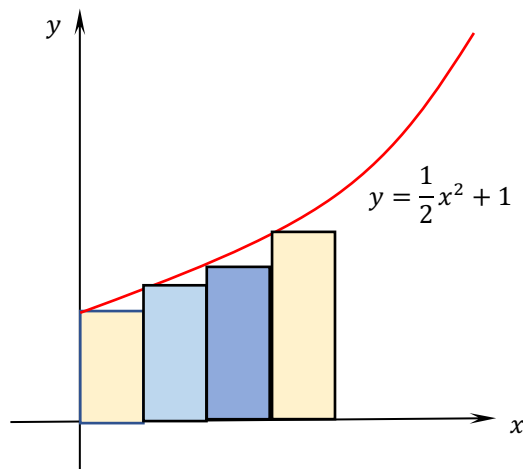
- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

Respuesta e)

Las bases de cada rectángulo tienen una longitud de 0.5, el polígono está por debajo de la recta con ecuación $y = x + 1$, los puntos que consideraremos para calcular las alturas de dichos rectángulos son $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$, las alturas son respectivamente $f(0) = 1, f(0.5) = 1.5, f(1) = 2, f(1.5) = 2.5$ el área A del polígono es

$$A = 0.5(1 + 1.5 + 2 + 2.5) = 0.5(7) = 3.5 = \frac{7}{2}$$

8. El área del polígono indicado, inscrito es:



- a) 1 b) 2 c) 2.87 d) 3.14 e) 3.46

Respuesta c)

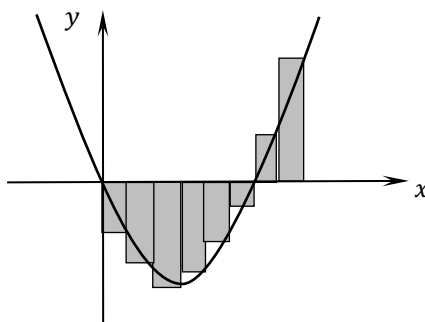
Las bases de los rectángulos tienen una longitud de 0.5, los puntos a considerar para calcular las alturas son

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$$

las alturas son: $f(0) = 1, f(0.5) = 1.125, f(1) = 1.5, f(1.5) = 2.125$ y en consecuencia el área A del polígono es

$$A = 0.5(1 + 1.125 + 1.5 + 2.125) = 2.875$$

9. Una aproximación de la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x) dx$, usando una suma de Riemann con los puntos extremos de la derecha y $n = 8$, es:



- a) -2 b) -1.5 c) -1 d) 0 e) 0.5

Respuesta: b)

Debido a que tenemos una partición de 8 segmentos, cada uno tiene una longitud de 0.5 necesitamos obtener el área de cada uno de los rectángulos que se forman en la gráfica.

Realizando las operaciones y evaluando la función en los puntos; 0.5, 1, 1.5, ..., respectivamente obtenemos lo siguiente:

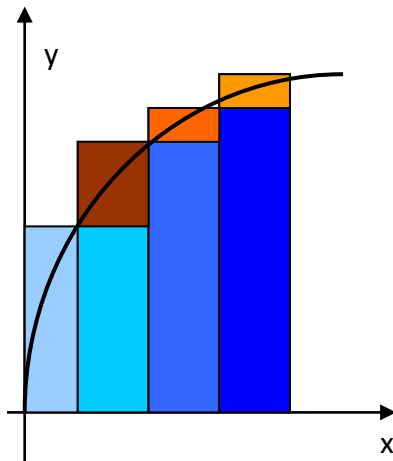
X_i	$f(X_i)$	Área
0.5	-1.25	-0.625
1	-2	-1
1.5	-2.25	-1.125
2	-2	-1
2.5	-1.25	-0.625
3	0	0
3.5	1.75	0.875
4	4	2

Suma de Áreas -1.5

10. Empleando las sumas superiores para aproximar el área de la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el intervalo $[0, 1]$ del eje x . toma el número $n = 4$ subintervalo, el área aproximada es:

- a) 0.5623 b) 0.69345 c) 0.76828 d) 0.89123 e) 1

Respuesta: c)



Al hacer cuatro divisiones con bases de la misma longitud, tenemos para el polígono inferior una longitud de las bases de 0.25, los puntos a considerar para calcular las alturas

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75$$

cuyas imágenes son respectivamente

$$f(0.25) = 0.5, \quad f(0.5) = 0.707106781 \\ f(0.75) = 0.86625403, \quad f(1) = 1$$

la longitud de la base de cada rectángulo es de 0.25, por lo cual el área A del polígono inferior es

$$A = 0.25(.5 + .707106781 + .866025403 + 1) \\ = 0.25(3.073132184) = 0.768283046.$$

11. Empleando las sumas inferiores para aproximar el área de la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y el intervalo $[0,2]$ del eje x . toma el número $n = 5$ subintervalo, el área aproximada es:

a) 3.555 b) 4.0404 c) 5.987 d) 6.0324 e) 6.2345

Respuesta: a)

Cálculo del área del polígono inferior la longitud de la base de cada rectángulo es de 0.4, los puntos a considerar para calcular las alturas son:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2, x_4 = 1.6$$

las alturas respectivas

$$f(0) = 1, f(0.4) = 1.632455532, f(0.8) = 1.894427191$$

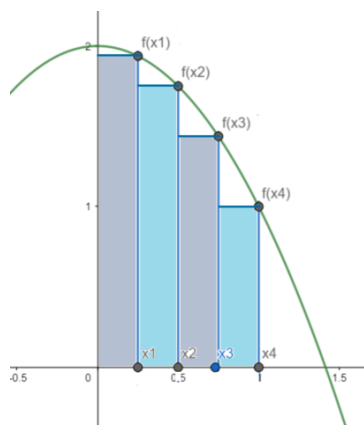
$$f(1.2) = 2.095441115, f(1.6) = 2.264911064$$

el área A del polígono inferior es

$$A = 0.4(1 + 1.632455532 + 1.894427191 + 2.095441115 + 2.264911064) \\ = 0.4(8.887238902) = 3.554895561$$

12. Evalúa la suma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$ con cuatro subintervalos de la misma longitud, toma los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Esta suma tiene el valor de:

a) $\frac{35}{32}$ b) $\frac{49}{32}$ c) $\frac{166}{100}$ d) $\frac{1667}{1000}$ e) 1.66667



Respuesta: b)

Debido a que tenemos una partición de 4 segmentos, cada uno tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ necesitamos obtener el área de cada uno de los rectángulos que se forman en la gráfica.

El área de cada rectángulo será

$$A_i = \left(\frac{1}{4}\right) f(x_i)$$

Realizando las operaciones y evaluando la función en los puntos; $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ respectivamente obtenemos lo siguiente:

$$A\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \left(2 - \left(\frac{1}{16}\right)\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{31}{16} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{31}{64}$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \left(2 - \left(\frac{1}{4}\right)\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16} = \frac{28}{64}$$

$$A\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \left(2 - \left(\frac{9}{16}\right)\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{23}{16} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{23}{64}$$

$$A(1) = f(1) \left(\frac{1}{4}\right) = (2 - (1)) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = \frac{16}{64}$$

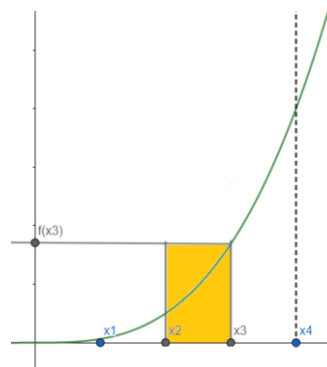
Sumando obtenemos

$$A\left(\frac{1}{4}\right) + A\left(\frac{1}{2}\right) + A\left(\frac{3}{4}\right) + A(1) = \frac{31 + 28 + 23 + 16}{64} = \frac{98}{64} = \frac{49}{32}$$

13. Aproxima el área bajo la curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 2$. Divide el dominio en 4 partes iguales, llama a los puntos de división por x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , (pero da el valor de ellos) después calcula $f(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Ahora calcula la longitud de cada subintervalo de $[0, 2]$. Multiplica esta longitud por su altura $f(x_i)$ correspondiente, suma estos productos. Esa suma es la aproximación pedida. Observa la figura.

El área así aproximada es:

- a) 2 b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{9}{4}$ e) 4



Respuesta: b)

Los puntos de división son:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2$$

luego entonces

$$f(x_1) = \frac{1}{8}, f(x_2) = 1, f(x_3) = \frac{27}{8}, f(x_4) = 8$$

entonces, recordando que cada rectángulo tiene ancho de longitud $1/2$ la suma que se pide es:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8} + 8 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{100}{8} \right] = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

14. Empleando las sumas inferiores para aproximar el área de la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y el intervalo $[1,2]$ del eje x . toma el número $n = 5$ subintervalo, el área aproximada es:

a) .3555 b) .40404 c) .5987 d) .60324 e) 0.64563492

Respuesta: e)

Cálculo del área del polígono inferior

Longitud de la base de cada rectángulo 0.2, los puntos a considerar para calcular las alturas

$$x_0 = 1.2, x_1 = 1.4, x_2 = 1.6, x_3 = 1.8, x_4 = 2$$

las alturas son:

$$f(1.2) = 0.8333, f(1.4) = 0.714285714, f(1.6) = 0.625, f(1.8) = 0.555, f(2) = 0.5$$

así el área A es

$$\begin{aligned} A &= 0.2(0.833333333 + 0.714285714 + 0.625 + 0.555555555 + 0.5) \\ &= 0.2(3.228174602) = 0.64563492 \end{aligned}$$

TEMA	APRENDIZAJES
Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$ donde k es una constante	Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$ como un límite de sumas infinitas para $n = 1, 2$ y 3 .
Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva.	Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$ y calcula con ella el área en el intervalo $[a, b]$.

Iniciemos esta sección dando la definición de la integral definida en un intervalo $[a, b]$, a continuación, se muestra.

Definición:

INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función con dominio un intervalo cerrado $[a, b]$. Si existe

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

se dice que f es integrable en $[a, b]$. Además,

$$\int_a^b f(x) dx$$

llamada integral definida (o integral de Riemann) de f entre a y b , es el valor de dicho límite, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Es conveniente hacer ejercicios desde el cálculo de la longitud de la base de cada rectángulo así como sus alturas, después calcular las áreas respectivas de estos rectángulos, para posteriormente calcular el límite de esta suma y obtener la integral definida.

Realicemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Calcula la integral siguiente por medio del método de exhaustión de Eudoxio.

$$\int_0^2 (3x + 2) dx$$

Solución.

Primero calculemos las x_i así como Δx_i , es claro que el dominio es el intervalo $[0,2]$, por lo que:

$$x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x_i = \frac{2}{n}$$

por medio de la definición.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x + 2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[3\left(\frac{2i}{n}\right) + 2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^n 2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\frac{6}{n} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) + 2n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 6n}{n^2} + 4 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 + \frac{6}{n} \right) \end{aligned}$$

ahora se observa el comportamiento de la suma de las áreas conforme n se hace cada vez más grande, se concluye finalmente que la integral tiene un valor de 10.

15. Para calcular la integral $\int_{-1}^3 5 dx$ se requiere calcular el límite siguiente:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 20 \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} 20 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 5$$

Respuesta: c)

Empleando la definición anterior se tiene

$$\int_{-1}^3 5 \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

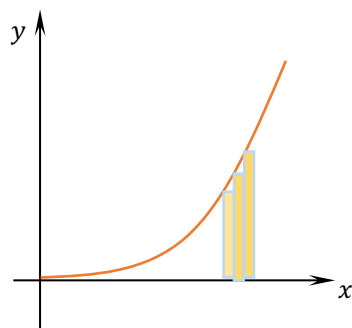
Ahora $f(x_i) = 5$ y $\Delta x_i = \frac{3 - (-1)}{n} = \frac{4}{n}$, así

$$\int_{-1}^3 5 \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 5 \left(\frac{4}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 20 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 20$$

16. Cuando se calcula el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, entre $x = 0, x = 2$, empleando el método de exhaución de Eudoxio, la expresión en términos de n (número de rectángulos) está dada por

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^2 x^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} & \text{b) } \int_0^2 x^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \\ \text{c) } \int_0^2 x^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{7} \frac{2n^3 + 3n^2 - n}{n^3} & \text{d) } \int_0^2 x^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \\ \text{e) } \int_0^2 x^2 \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \end{aligned}$$

Respuesta: a)



Introduzcamos n rectángulos con base de igual longitud, como el dominio de la función es $[0, 2]$, entonces, la base de cada rectángulo tiene una longitud de $\frac{2}{n}$, así, las alturas de los respectivos rectángulos son

$$\left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{4}{n}\right)^2, \left(\frac{6}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{2n}{n}\right)^2,$$

por lo que la suma de sus áreas es

$$\frac{2}{n} \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n}{n}\right)^2 \right]$$

En notación sigma, la suma de las áreas de los rectángulos se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4}{3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

el área debajo de la región la encontraremos cuando n se haga cada vez más y más grande, es decir,

$$\text{área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{4}{3} (2) = \frac{8}{3}$$

de esta manera

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

17. Cuando se calcula el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 1 + 2x$, entre $x = 0, x = 5$, empleando el método de exhaustión de Eudoxio, la expresión en términos de n (número de rectángulos) está dada por:

$$\begin{array}{lll} a) 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 5 \frac{n+1}{n} \right] & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 5 \frac{n+1}{n} \right] & c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 - 2n}{n} \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n+1}{n} & e) 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n+1}{n} \right] & \end{array}$$

Respuesta: a)

En este caso el dominio $[0,5]$ tiene una longitud de 5, al introducir n rectángulos del mismo ancho, cada uno de ellos debe de tener una longitud de $\frac{5}{n}$, y los puntos de la división son de la forma $x_i = \frac{5i}{n}$ y sus imágenes son $f\left(\frac{5i}{n}\right) = 1 + 2\left(\frac{5i}{n}\right) = 1 + 10\frac{i}{n}$ por lo que la integral está dada por

$$\begin{aligned} \int_0^5 (1 + 2x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + 10\frac{i}{n} \right) \frac{5}{n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n 1 + \frac{10}{n} \sum_{i=1}^n i \right] \\ &= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{10n(n+1)}{2} \right] = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 5 \frac{n+1}{n} \right] = 5(1 + 5) = 30 \end{aligned}$$

18. Cuando se calcula el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = x^3$, entre $x = 0, x = 1$, empleando el método de exhaustión de Eudoxio, la expresión en términos de n (número de rectángulos) está dada por:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i^3 & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} & c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n}{n^3} \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{n^4} & e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} & \end{array}$$

Respuesta: e)

El dominio se divide en n partes iguales, así la base de cada rectángulo tiene una longitud de $\frac{1}{n}$, así los puntos de división son de la forma $x_i = \frac{i}{n}$, las alturas son: $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^3}{n^3}$ por definición la integral está dada de la manera siguiente:

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i^3}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

TEMA	APRENDIZAJES
Función área como una antiderivada.	Identifica la función área como una antiderivada o primitiva.
Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo.	Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del Cálculo.
	Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.
	Identifica los elementos que sustentan el teorema fundamental del cálculo.
	Aplica el teorema fundamental del cálculo.

19. La derivada de la función $g'(x) = f(x) = 6x$, si $g(2) = 4$ entonces $g(x)$ es:

- a) $3x^2 - 8$ b) $3x^2 + 2$ c) $3x^2 - 2$ d) $3x^2 + 9$ e) $3x^2$

Respuesta: a)

Como $f(x) = 6x$, su primitiva $g(x)$ sería $3x^2 + C$ para determinar el valor de la constante utilizamos la condición dada en el enunciado $g(2) = 4$, por lo cual, si sustituimos la condición, tendremos:

$$g(2) = 3(2)^2 + C = 4$$

Se sigue que:

$$12 + C = 4 \Rightarrow C = 12 - 4 = 8$$

Entonces:

$$g(x) = 3x^2 - 8$$

20. La función F que satisface las condiciones siguientes $F(3) = -1$ y $F'(x) = 8x - 10$ está dada por:

- a) $F(x) = 4x^2 - 10x - 15$ b) $F(x) = 4x^2 - 10x$ c) $F(x) = 8x^2 - 10x - 7$
d) $F(x) = 4x^2 - 10x - 7$ e) $F(x) = 4x^2 + 10x + 15$

Respuesta: d)

Procedemos a encontrar a la función $F(x)$, la antiderivada de $F'(x)$ y después buscaremos la constante utilizando la condición dada.

En este caso

$$F(x) = 4x^2 - 10x + C$$

Evaluando tenemos:

$$F(3) = 4(3)^2 - 10(3) + C = -1$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F(3) &= 4(9) - 10(3) + C \\ &= 36 - 30 + C \\ &= 6 + C \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por lo cual $C = -7$ dándonos como resultado el inciso d.

21. Si C y F denotan las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit respectivamente, entonces la tasa de variación de F con respecto a C está dada por $\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$. Si $F = 32$ cuando $C = 0$, usa antiderivadas para obtener una fórmula general para F en términos de C .

a) $F = 9C + 32$. b) $5C = 9F + 32$ c) $F = 9C - 32$ d) $9C = 5F + 21$

e) $F = \frac{9}{5}C + 32$

Respuesta: e)

Anti derivemos como $F' = \frac{9}{5} \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + c$, ahora por las condiciones iniciales, se tiene $F(0) = \frac{9}{5}(0) + c = 32 \Rightarrow c = 32$ y la relación entre F y C es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

22. Si la derivada de la función f está dada por $f'(x) = -6x + 18$, el valor máximo de la función si $f(5) = 30$ es:

a) 32 b) 37 c) 42 d) 48.2 e) 52.4

Respuesta: c)

El punto crítico es $x = 3$ para verificar si es un máximo, derivamos nuevamente a la derivada de la función $f''(x) = -6 < 0$, por lo tanto hay un máximo en el punto crítico, por el criterio de la segunda derivada, la primitiva de la función en forma general es $f(x) = -3x^2 + 18x + c$ mediante las condiciones iniciales se tiene $f(5) = -75 + 90 + c = 30 \Rightarrow c = 15$ por lo que la función es $f(x) = -3x^2 + 18x + 15$ y la imagen del punto crítico es $f(3) = -27 + 54 + 15 = 42$

23. Encuentra la solución particular de la ecuación determinada por las condiciones iniciales.
 $f' = x^2 - 4x - 4, f(3) = -6$.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 15$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + c$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + c$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 9$

Respuesta: a)

La función general está dada por la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + c$, emplenado la condición inicial, hacemos lo siguiente

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 - 4(3) + c = 9 - 18 - 12 + c = -6 \Rightarrow c = 15$$

La solución particular es $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x + 15$.

24. Encuentra la solución particular de la ecuación determinada por la condición inicial.

$f' = x^4 - 3x + \frac{1}{x^2}$, $f(1) = 0$, con base en ella, el valor de $f(0)$ es:

- a) -3 b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{13}{10}$ d) $\frac{23}{10}$ e) 3.4

Respuesta: d)

La función en su forma general está dada por $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c$, empleando la condición inicial se obtiene $f(1) = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} - 1 + c = -\frac{23}{10} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{23}{10}$ así la solución particular es $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + \frac{23}{10}$, ahora evaluemos en $x = 0$, $f(0) = \frac{23}{10}$

25. El punto $(3,2)$ se encuentra en la gráfica de una función f y en cualquier otro punto de ella la recta tangente tiene pendiente igual a $2x - 3$, la función f es:

- a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = x^2 - 3x$
d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = 1$

Respuesta: a)

Dado que la pendiente a la recta tangente en todos los puntos es $2x - 3$, la función que buscamos pertenece a la familia de funciones:

$$\int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C$$

Pero como sabemos que $f(3) = 2$, tenemos que:

$$3^2 - 3(3) + C = 2$$

Entonces;

$$9 - 9 + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

La función buscada es entonces:

$$x^2 - 3x + 2$$

26. Obtener una posible antiderivada de $y' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

- a) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 5$ b) $y = 12x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x$ c) $y = 10x^6$
d) $y = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x$ e) $y = 12x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 1x + 1$

Respuesta: a)

Procedemos a encontrar a la función y , dado a que es un polinomio, la antiderivada de cada entrada (sumando) es de la forma

$$\int ax^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Por lo cual, haciendo las operaciones tenemos:

$$y = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$$

La única opción con la estructura mencionada es el inciso a.

27. Encuentra la solución particular de la ecuación determinada por la condición inicial.

$f' = \sqrt{x+5}$, $f(-1) = -1$, con base en ella, el valor de $f(-4)$ es:

a) -5 b) $-\frac{10}{3}$ c) -3.5 d) 0 e) 1.4

Respuesta: b)

La solución general es $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} + c$, mediante la condición inicial, se tiene

$$f(-1) = \frac{2}{3}\sqrt{(-1+5)^3} + c = \frac{2}{3}(4) + c = \frac{8}{3} + c = -1 \Rightarrow c = -4$$

Así la solución particular es

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} - 4 \text{ y } f(-4) = \frac{2}{3}\sqrt{(-4+5)^3} - 4 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3}$$

28. Qué función $F(x)$ cumple las condiciones siguientes; $F(2) = -2$, con derivada $F'(x) = 6x - 4$

a) $F(x) = 3x^2 - 4x + 6$ b) $F(x) = 3x^2 - 4x - 2$ c) $F(x) = 3x^2 - 4x - 6$
d) $F(x) = 6x^2 - 4x - 6$ e) $F(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Respuesta: c)

Debido a que $F'(x) = 6x - 4$

$$F(x) = \int (6x - 4) dx = 3x^2 - 4x + C$$

Pero como sabemos que $F(2) = -2$, tenemos:

$$3(2)^2 - 4(2) + C = 12 - 8 + C = -2 \\ C = -2 - 4 = -6$$

Por lo tanto

$$F(x) = 3x^2 - 4x - 6$$

29. Si $f'(t) = t^2 + 6t - 2$ Determinar $f(t)$ cuando $f(1) = 3$.

a) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 - 2t + 3$ b) $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 2t$
c) $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 2t + \frac{5}{3}$ d) $f(t) = 2t + 9$ e) $f(t) = t^2 + 6t + 1$

Respuesta: c)

Sabemos que $f'(t) = t^2 + 6t - 2$ por lo que:

$$f(t) = \int (t^2 + 6t - 2) dt = \frac{t^3}{3} + 3t^2 - 2t + C$$

Pero como sabemos que $f(1) = 3$, utilizamos esa información para obtener el valor de la constante C

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{(1)^3}{3} + 3(1)^2 - 2(1) + C = 3 \\ &= \frac{1}{3} + 3 - 2 + C = 3. \\ C &= 3 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Entonces

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 2t + \frac{5}{3}$$

TEMA	APRENDIZAJES
Aplicación de la integral definida	
Área comprendida entre dos funciones.	Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.
Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.	Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una función velocidad.
Cálculo de una población a partir de la tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.	Identifica a la velocidad de crecimiento de una población y con ayuda del TFC calcula la función del crecimiento de la población.

30. Al resolver correctamente la integral $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 1)dx$ el resultado es:

- a) 3 b) 1 c) 2 d) 9 e) -1

Respuesta: d)

Resolvemos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^2 + 2x - 1)dx &= x^3 + x^2 - x \Big|_1^2 \\ &= (2^3 + 2^2 - 2) - (1^3 + 1^2 - 1) \\ &= 8 + 4 - 2 - 1 = 9 \end{aligned}$$

31. El área de la región acotada por la recta dada por $y = 2x - 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a:

- a) $\int 2x - 1$ b) $\int_5^1 (2x - 1)dx$ c) 15 d) 20 e) $\int_1^5 (2x - 1)dx$

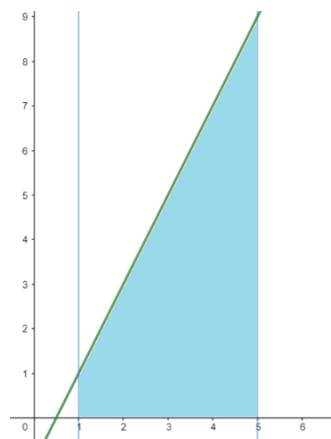
Respuesta: d)

Buscamos el área delimitada por la función y y las dos rectas dadas, (ver figura). De acuerdo con lo que viste en tu curso, esto se puede expresar con la integral definida

$$\int_1^5 (2x - 1) dx$$

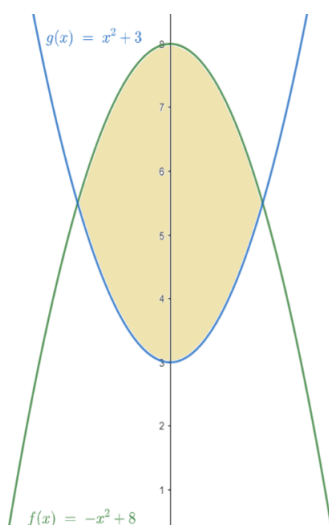
Misma que al resolver nos da:

$$\begin{aligned} \int_1^5 (2x - 1) dx &= x^2 - x \Big|_1^5 \\ &= (5^2 - 5) - (1^2 - 1) = 25 - 5 - 0 = 20 \end{aligned}$$



32. El área de la región que se encuentra entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 8$ y $g(x) = x^2 + 3$ es:

a) $9.55 u^2$ b) $10.54 u^2$ c) $12.11 u^2$ d) $22.66 u^2$ e) $37.44 u^2$



Respuesta: b)

El primer paso es encontrar los puntos donde estas funciones se intersectan, esto para conocer los valores de integración de nuestra integral definida.

Con este fin, igualamos las dos funciones para encontrar el valor en x de nuestras intersecciones, esto es:

$$-x^2 + 8 = x^2 + 3$$

Por lo cual, despejando a la incógnita x

$$2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

vez obtenidos nuestros puntos de intersección procedemos a plantear la integral definida, la cual sería de la forma:

$$\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} f(x) dx - \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} g(x) dx = \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (f(x) - g(x)) dx$$

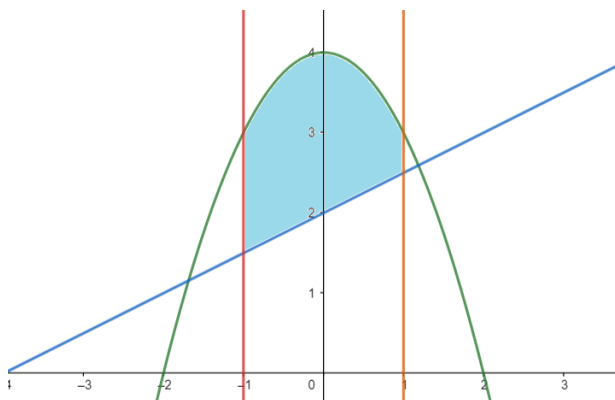
Sustituyendo en las funciones f y g tenemos:

$$\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-x^2 + 8) - (x^2 + 3) dx = \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} -2x^2 + 5 dx$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3}x^3 + 5x \Big|_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}^3 + 5\sqrt{\frac{5}{2}} \right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}^3 + 5\sqrt{\frac{5}{2}} \right) \\
 & = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}^3 + 10\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}^3 + 10\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{5}{2}} + 10\sqrt{\frac{5}{2}} \\
 & = -\frac{4}{3}\left(\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{5}{2}} + 10\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{20}{6}\sqrt{\frac{5}{2}} + 10\sqrt{\frac{5}{2}} \\
 & = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(10 - \frac{10}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{20}{3}\right) \cong 10.54
 \end{aligned}$$

33. El área de la región comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$, y las recta $y = \frac{1}{2}x + 2$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ (ver figura) se puede calcular mediante:



- a) $A = \int_{-1}^1 (2x - 1) dx$
b) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx + \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$
c) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
d) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
e) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx - \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

Respuesta: c)

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ determina la región bajo la cual vamos a integrar, es decir, los límites de nuestra integral.

Podemos ver en la imagen que $y = 4 - x^2 > y = \frac{1}{2}x + 2$ en nuestra región, así que para hallar el área hay que hacer la resta.

$$4 - x^2 - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)$$

Entonces el área estará dada por

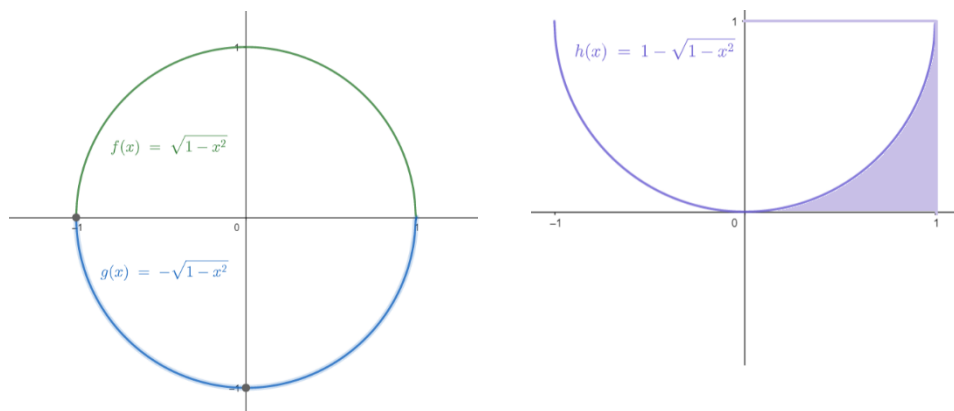
$$A = \int_{-1}^1 4 - x^2 - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$$

34. Determina el área bajo la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, entre $x = 0$, $x = 1$.

- a) $\frac{\pi}{2}u^2$ b) $1 - \frac{\pi}{4}u^2$ c) $\frac{\pi}{8}u^2$ d) $0.7854u^2$ e) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}u^2$

Respuesta: b)

Recordemos que $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación del círculo unitario con radio 1 y centro en (0,0). Entonces $-\sqrt{1-x^2}$ es la semicircunferencia inferior (ver imagen).



al sumar 1 como en la función original del problema nuestro semicírculo se desplaza una unidad hacia arriba (imagen derecha).

Podemos ver que el área buscada con la integral es la región sombreada en la segunda gráfica. Por lo cual procedemos a calcular el área del cuadrado de lado 1 y a eso restar $\frac{1}{4}$ del área del círculo unitario.

Sabemos que el área de un círculo de radio 1 es π , por lo tanto, el área buscada sería $1 - \frac{\pi}{4}$

35. Determina la integral definida de

$$\int_{-1}^1 (4x^2 - 5x + 3) dx$$

a) $\frac{26}{3}$

b) $-\frac{26}{3}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

Respuesta: a)

Realizamos la integral definida

$$\int_{-1}^1 (4x^2 - 5x + 3) dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right) - \left(-\frac{4}{3} - \frac{5}{2} - 3 \right) = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 3 + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + 3$$

$$= \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3}$$

36. Dado que

$$2x^2 - 8 = \int_a^x f(t) dt$$

Un valor para $f(x)$, es:

$$a) f(x) = x^2 + C$$

$$b) f(x) = 2x^2$$

$$c) f(x) = 4x$$

$$d) f(x) = \sqrt{x} - 8$$

$$e) f(x) = x - 8$$

Respuesta: c)

Supongamos que existe una $F(x)$ tal que $F(x) = \int f(x)dx$ entonces $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ de donde, se obtiene la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 8 = F(x) - F(a)$$

$$2x^2 = F(x) - F(a) + 8$$

Derivando por ambos lados de la ecuación llegamos a que:

$$4x = F'(x) = f(x)$$

37. La solución de la integral siguiente

$$\int_3^4 \frac{2\sqrt{3x-5}}{3} dx$$

Es:

$$a) 0.09$$

$$b) 1.56$$

$$c) 3.51$$

$$d) 3.93$$

$$e) 7.01$$

Respuesta: b)

Realizamos el siguiente cambio de variable $u = 3x - 5 \Rightarrow du = 3dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{3x-5}}{3} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{2\sqrt{u}}{3} du = \frac{2}{9} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{4}{27} u^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{2\sqrt{3x-5}}{3} dx &= \frac{4}{27} (3x-5)^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4 \\ &= \frac{4}{27} \left[(7)^{\frac{3}{2}} - (4)^{\frac{3}{2}} \right] \cong \frac{4}{27} [10.520259] \cong 1.558 \end{aligned}$$

38. Si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio, entonces su integral indefinida es:

a) Cualquier función

b) Cualquier función que tiene derivada

c) Cualquier función cuya derivada es $f(x)$

d) Cualquier función que no tiene derivada

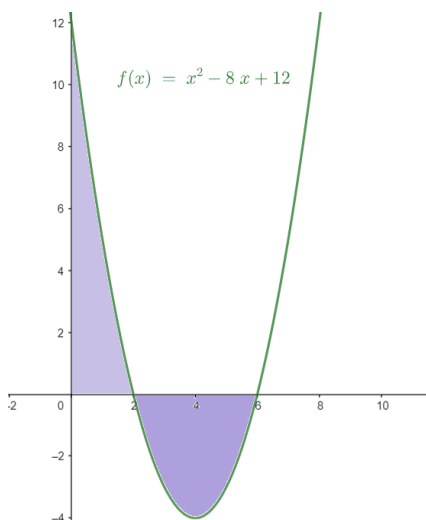
e) Es exactamente $f(x)$ más una constante

Respuesta: c)

Como la integral es indefinida, existe una familia de funciones que pueden ser la integral de $f(x)$

39. Hallar el valor del área comprendida por la gráfica de la función $y = x^2 - 8x + 12$ con $x \in [0,6]$

a) $\frac{64}{3}u^2$ b) $\frac{19}{3}u^2$ c) $\frac{41}{9}u^2$ d) $\frac{28}{5}u^2$ e) $0u^2$



Respuesta: e)

Para hallar esta área (ver figura) basta con resolver la siguiente integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^6 (x^2 - 8x + 12) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \Big|_0^6 \\ &= \frac{(6)^3}{3} - 4(6)^2 + 12(6) \\ &= \frac{216}{3} - 144 + 72 = 0 \end{aligned}$$

40. Encontrar el valor de:

$$\int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx$$

a) 0 b) $e + \frac{1}{e}$ c) $e - \frac{1}{e}$ d) $\frac{1}{e} - e$ e) $\frac{1}{e} + 1$

Respuesta: c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x} dx \\ &= \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx = e^x \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= (e - 1) - (e^{-1} - 1) \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

41. Si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio, entonces su integral indefinida es:

- b) Cualquier función b) Cualquier función que tiene derivada
d) Cualquier función cuya derivada es $f(x)$ d) Cualquier función que no tiene derivada
f) Es exactamente $f(x)$ más una constante

Respuesta: c)

Como la integral es indefinida, existe una familia de funciones que pueden ser la integral de $f(x)$

42. El valor más próximo a

$$\int_0^2 x^2 e^{\frac{x^3}{2}} dx$$

es:

- a) 35 b) 45 c) 25 d) 30 e) 40

Respuesta: a)

Tomamos el siguiente cambio de variable: $u = \frac{x^3}{2}$, entonces $du = \frac{3x^2}{2} dx$, donde

$$\int x^2 e^{\frac{x^3}{2}} dx = \frac{2}{3} \int e^u du = \frac{2}{3} e^{\frac{x^3}{2}} + C$$

Por lo cual

$$\int_0^2 x^2 e^{\frac{x^3}{2}} = \frac{2}{3} e^{\frac{x^3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (e^4 - 1) \cong \frac{2}{3} (53.59) \cong 35.7$$

La respuesta que más se aproxima es 35

43. Si evalúas

$$\int_0^2 \frac{1}{2x+1} dx$$

obtienes:

- a) 1 b) $\frac{1}{5} \ln 5$ c) $\frac{1}{2} \ln 5$ d) $\frac{1}{2} \ln 2$ e) $\frac{1}{5} \ln 2$

Respuesta: c)

Procedemos a hacer un cambio de variable;

$$\text{Sea } u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

Por lo cual

$$\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(u) = \frac{1}{2} \ln(x+1) + C$$

Entonces:

$$\int_0^2 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln(5)$$

La antiderivada tiene varias aplicaciones como las que hemos descrito anteriormente, una aplicación más es cuando se tiene un movimiento rectilíneo, supongamos que una partícula se mueve en un movimiento rectilíneo, el movimiento de la partícula queda descrita por su función de posición $s = s(t)$, en donde s es la distancia y t el tiempo, la **velocidad** v es la derivada de la partícula, con respecto a su posición

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

y la **aceleración** a es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En problemas típicos se tiene la información siguiente:

$a(t)$	La aceleración de la partícula
$s(0) = s_0$	La posición inicial
$v(0) = v_0$	La velocidad inicial.

Correspondiente a la función velocidad v . conociendo $v(t)$ podemos resolver el problema con condición inicial

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \quad s(0) = s_0$$

Para la función de posición s de la partícula.

Ejemplo. Las marcas de derrape de unos neumáticos indican que se han aplicado los frenos durante una distancia de 30 metros antes de detenerse el automóvil. Supongamos que el auto en cuestión tiene una desaceleración de 20 m/s^2 bajo las condiciones del derrape ¿A qué velocidad viajaba el auto cuando comenzó a frenar?

Solución.

Consideramos que $s_0 = 0$ en $t = 0$, entonces la función v es una función decreciente con respecto al tiempo t , así su aceleración es negativa, en este caso $a = -20 \text{ m/s}^2$, por lo que tenemos la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -20$$

Anti derivamos

$$v = \int -20 dt = -20t + c$$

Aunque la velocidad inicial no se conoce sabemos que en $t = 0$, $v = v_0$ implica que $c = v_0$, así la función velocidad del auto es

$$v(t) = -20t + v_0$$

Volvemos a anti derivar

$$s = \int -20t + v_0 dt = -10t^2 + v_0t + c_1$$

Para calcular el valor de la constante, evaluamos con los datos conocidos, es decir, $t = 0$, $s = 0$, obtenemos el valor de c_1

$$s(0) = -10(0)^2 + v_0(0) + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Por lo que la función de posición s está dada por

$$s(t) = -10t^2 + v_0t$$

El hecho de que las llantas tengan 30 metros de derrape nos dice que
 $s = 30$ cuando $v = 0$

Sustituimos estos valores en la velocidad y en la posición, obteniendo dos ecuaciones simultaneas

$$-20t + v_0 = 0, \quad -10t^2 + v_0t = 30$$

Resolvemos estas ecuaciones y obtenemos

$$t = \sqrt{3} \text{ seg}, v_0 = 20\sqrt{3} \approx 34.64 \text{ m/seg}$$

La velocidad del auto era de 34.64 m/seg cuando aplica los frenos por primera vez.

44. Una partícula se mueve en línea recta, s representa la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v metros/segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos y a metros/segundos² la aceleración. Con base en lo anterior ¿quién es la distancia s si $a = 800$, $v = 20$, cuando $s = 1$?

- a) $s(t) = 1$ b) $s(t) = 20t + 1$ c) $s(t) = 9.8t^2 + v_0t + 1$
d) $s(t) = 800t^2 + 20t$ e) $s(t) = 400t^2 + 20t + 1$

Respuesta: e)

Cuando la aceleración es constante se puede probar que $v(t) = at + v_0$, $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + t_0 + s_0$, en donde v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la distancia inicial, así se tiene

$$s(t) = 400t^2 + 20t + 1$$

45. Una partícula se mueve en línea recta, s representa la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v metros/segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos y a metros/segundos² la aceleración. Con base en lo anterior ¿quién es la velocidad v si $a = 40$, $v = 10$, cuando $s = 5$?

- a) $v(t) = 10$ b) $v(t) = 20t + 10$ c) $v(t) = 40$. d) $v(t) = 40t$
e) $v(t) = 40t + 5$

Respuesta: b)

Como la aceleración a es la derivada de la velocidad v se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = \int 40 dt = 20t + c$$

Sustituyendo los valores conocidos

$$v(0) = 20(0) + c = 10 \Rightarrow c = 10$$

Así la velocidad en función del tiempo t es $v(t) = 20t + 10$.

46. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 20m/seg. La velocidad con que la piedra llega al suelo es:

- a) 0 b) - 2.3 c) - 10 d) - 15 e) - 20

Respuesta: e)

Sabemos que la aceleración a es la derivada de la velocidad v , es decir

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = \int -9.8 dt = -9.8t + v_0$$

Ya que la velocidad es constante e igual a $9.8m/seg^2$, el signo menos es por que se hace referencia que se lanza desde el suelo, de esta manera la velocidad es

$$v(t) = -9.8t + 20$$

Necesitamos el tiempo en que llega al suelo, como la velocidad es la derivada de la distancia, se tiene

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s(t) = \int -9.8t + 20 dt = -4.9t^2 + 20t + c$$

Como la piedra se lanza desde el suelo, la distancia inicial es cero, así la distancia es

$$s(t) = -4.9t^2 + 20t$$

La piedra llega al suelo cuando la distancia es cero, es decir

$$-4.9t^2 + 20t = t(-4.9t + 20) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o } t = \frac{20}{4.9} \approx 4.08$$

Así el tiempo que tarda en llegar al suelo es aproximadamente en 4 segundos, la velocidad con que llega al suelo es

$$v(4) = -9.8(4.08) + 20 = -19.984 m/seg$$

47. Alejandro arroja una piedra hacia arriba con una resortera desde el suelo, la piedra alcanza una altura de 500 metros. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la piedra?

a) $20 \frac{m}{seg}$

b) $40 \frac{m}{seg}$

c) $65 \frac{m}{seg}$

d) $87 \frac{m}{seg}$

e) $99 \frac{m}{seg}$

Respuesta: e)

Como Alejandro arroja la piedra desde el suelo su distancia inicial es de cero, así la función es de

$$s(t) = -4.9t^2 + v_0t$$

Con velocidad

$$v(t) = -9.8t + v_0$$

La altura que alcanza la piedra es de 500 metros, en ese tiempo t_0 la velocidad es cero, así que

$$1) -9.8t + v_0 = 0 \text{ y } 2) -4.9t^2 + v_0t = 500$$

Tenemos de 1) $t = \frac{v_0}{9.8}$ sustituyendo en 2) $-4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = 500$, resolviendo la segunda ecuación para v_0 se tiene

$$v_0^2 = \frac{500(9.8)^2}{4.9} = 9800 \Rightarrow v_0 \approx 98.995$$

Es decir, la velocidad inicial debe ser aproximadamente de 99 m/seg

48. ¿Desde qué altura sobre la superficie de la tierra debe dejarse caer una pelota para que golpee el piso con una velocidad de 130 m/s ?

a) 832 m b) 623 m c) 456 m d) 210 m e) 130 m

Respuesta: a)

La función de desplazamiento está dada por $s(t) = 4.9t^2 + s_0$, ya que la pelota se deja caer, es decir la velocidad inicial es de cero, ahora la velocidad está dada por $v(t) = 9.8t$ y queremos que sea de 130 , por lo que se tiene

$$v(t) = 9.8t = 130 \Rightarrow t = \frac{130}{9.8} \approx 13.265 \text{ seg}$$

de esta manera

$$s(13.265) = 4.9(13.265)^2 \approx -862.2 \text{ metros}$$

La pelota debe dejarse caer desde una altura de 862 metros.

49. Se lanza una pelota cuesta abajo sobre un plano inclinado con una aceleración de 0.6 m/s^2 . Si la pelota no se le da ninguna velocidad inicial, ¿qué distancia recorre en t segundos? ¿Qué velocidad inicial debe dársele a la pelota para que recorra 30 metros en 5 segundos?

a) $4 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ b) $4.5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ c) $5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ d) $5.5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ e) $6 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$

Respuesta: b)

En este caso $a = 0.6 \text{ m/seg}^2$ y tanto la velocidad inicial como la distancia inicial con cero, por lo que la función distancia es de

$$s(t) = 0.3t^2$$

por otra parte, supongamos que la velocidad inicial es de $v_0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, la función de desplazamiento sería

$$s(t) = 0.3t^2 + v_0t$$

y se quiere que

$$s(5) = 0.3(5)^2 + v_0(5) = 30$$

por lo que

$$v_0 = \frac{30 - 0.3(5)^2}{5} = \frac{22.5}{5} = 4.5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

se requiere de una velocidad inicial de 4.5 m/s .

50. El uranio se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 10g y después de 2 horas se ve que ha perdido 5% de su masa original. ¿Qué cantidad de uranio hay después de 5 horas?

a) $9.55u^2$ b) $10.54u^2$ c) $12.11u^2$ d) $22.66u^2$ e) $8.82u^2$

Respuesta: e)

Sea $f(t)$ la cantidad de uranio en un tiempo t , la velocidad a la que cambia la cantidad de uranio es entonces $f'(t)$.

Dado que la velocidad de descomposición es proporcional, podemos decir que

$$f'(t) = -kf(t)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad, entonces tenemos que:

$$\frac{df}{dt} = -kf(t)$$

Entonces:

$$df = -kf(t)dt \Rightarrow \frac{1}{f}df = -kdt$$

Integrando

$$\int \frac{1}{f(t)}df = \int -kdt \Rightarrow \ln(f(t)) = -kt + C$$

Por lo tanto

$$f(t) = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}$$

así

$$f(t) = C_0 e^{-kt}$$

En donde $C_0 = e^C$

Sabemos que inicialmente hay 10g, así que $f(0) = 10$, en el tiempo $t = 0$, había 10 g

$$f(0) = C_0 e^0 = 10$$
$$C_0 = 10$$

Como se perdió 5% de la masa original a las 2 horas, en símbolos

$$f(2) = 9.5$$

Por lo que

$$f(2) = 10e^{-k(2)} = 9.5$$

$$10e^{-2k} = 9.5$$

$$e^{-2k} = \frac{9.5}{10} = .95 \Rightarrow -2k = \ln(0.95) = -0.05$$

$$k = .02$$

Entonces

$$f(5) = 10e^{-0.025(5)} = 10e^{-.125} \cong 8.82$$

51. En cierta población de bacterias, su ritmo de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. Si $F(t)$ representa el número de bacterias en un cultivo en un instante t y k es la constante de proporcionalidad. Entonces lo anterior se presenta como:

$$a) \frac{F'(t)}{F(t)} = k \quad b) \frac{F(t)}{k} = F(t) \quad c) \frac{F'(t)}{k} = F'(t) \quad d) \frac{F(t)}{F(t)} = k \quad e) \frac{k}{F(t)} = F'(t)$$

Respuesta: a)

Si $F(t)$ es el número de bacterias, el crecimiento estaría representado por $F'(t)$.

Si el crecimiento es proporcional a la cantidad por una variante k , entonces:

$$F'(t) = kF(t) \Rightarrow \frac{F'(t)}{F(t)} = k$$

52. El uranio se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 10g y después de 2 horas se ve que ha perdido 5% de su masa original. ¿Qué cantidad de uranio hay después de 5 horas?

a) $9.55u^2$ b) $10.54u^2$ c) $12.11u^2$ d) $22.66u^2$ e) $8.82u^2$

Respuesta: e)

Sea $f(t)$ la cantidad de uranio en un tiempo t , la velocidad a la que cambia la cantidad de uranio es entonces $f'(t)$.

Dado que la velocidad de descomposición es proporcional, podemos decir que

$$f'(t) = -kf(t)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad, entonces tenemos que:

$$\frac{df}{dt} = -kf(t)$$

Entonces:

$$df = -kf(t)dt \Rightarrow \frac{1}{f}df = -kdt$$

Integrando

$$\int \frac{1}{f(t)}df = \int -kdt \Rightarrow \ln(f(t)) = -kt + C$$

Por lo tanto

$$f(t) = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}$$

así

$$f(t) = C_0 e^{-kt}$$

En donde $C_0 = e^C$

Sabemos que inicialmente hay 10g, así que $f(0) = 10$, en el tiempo $t = 0$, había 10 g

$$\begin{aligned} f(0) &= C_0 e^0 = 10 \\ C_0 &= 10 \end{aligned}$$

Como se perdió 5% de la masa original a las 2 horas, en símbolos

$$f(2) = 9.5$$

Por lo que

$$f(2) = 10e^{-k(2)} = 9.5$$

$$10e^{-2k} = 9.5$$

$$e^{-2k} = \frac{9.5}{10} = .95 \Rightarrow -2k = \ln(0.95) = -0.05$$

$$k = .025$$

Entonces

$$f(5) = 10e^{-0.025(5)} = 10e^{-.125} \cong 8.82$$

UNIDAD 3.

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

PROPÓSITOS GENERALES.

- Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.

FÓRMULAS INMEDIATAS DE INTEGRACIÓN.

Como hemos visto en la unidad anterior, se pueden ir deduciendo las integrales a partir de la definición dada por el matemático Bernard Riemann (aunque Arquímedes de Siracusa (287 – 212 AC). ya había resuelto problemas relativos a lo que hoy llamamos cálculo integral, Eudoxo ya había inventado el método de exhaustión) e ir construyendo fórmulas de integración. Primero se deducen las integrales de los polinomios y con ayuda del teorema fundamental del cálculo (TFC) se pueden obtener fórmulas cada vez más complejas.

Una función que tiene una fórmula directa para resolver la integral se le llama *integral inmediata* pues para integrarla sólo se sustituye los valores de acuerdo con la fórmula correspondiente y realizar las operaciones pertinentes

Por ejemplo, sabemos que la derivada de la función $f(x) = kx^n$ con k una constante y n un número natural, tiene como derivada a la función $f'(x) = nkx^{n-1}$ con el apoyo del TFC podemos deducir que:

$$\int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + c$$

En donde c es una constante y $n \neq -1$.

Con el apoyo del TFC podemos escribir para cualquier función f derivable,

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

Por esta razón podemos realizar las integrales que a continuación se indican.

si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$ nos conduce a

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Hagamos, en la tabla siguiente, un resumen de algunas de las integrales inmediatas.

<i>Función y su derivada</i>	<i>Integral</i>
$f(x) = x, f'(x) = 1$	$\int dx = x + c$
$f(x) = kx^n, f'(x) = nkx^{n-1}$	$\int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$
$f(x) = e^x, f'(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$

$f(x) = \ln(x), f'(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$f(x) = \operatorname{sen} x, f'(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$
$f'(x) = \cos x, f(x) = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$
$f'(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

Ejemplos.

Calcula las integrales siguientes

$$a) \int x^3 dx \quad b) \int (x + \sqrt{x}) dx \quad c) \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4} \right) dx \quad d) \int \frac{2}{3x+2} dx$$

Solución.

$$a) \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c \quad b) \int (x + \sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

En el inciso b), podemos escribir $\sqrt{x} = x^{1/2}$ así la integral será

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{3/2} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

$$\begin{aligned} c) \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4} \right) dx &= \int 3x^{-1/2} - \frac{1}{4} x^{1/2} dx = 3 \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c. \\ &= 3 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) x^{1/2} - 4 \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} \right) x^{\frac{3}{2}} + c = 6\sqrt{x} - \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$d) \int \frac{2}{3x+2} dx = \frac{2}{3} \ln|3x+2| + c$$

Recordemos de la primera unidad que

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

Nos percatamos que la función $f(x) = 3x + 2$, tiene derivada $f'(x) = 3$, por lo que, sólo requerimos el número 3, en la integral para obtener su derivada.

$$d) \int \frac{2}{3x+2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{2}{3} \int (\ln(3x+2))' dx = \frac{2}{3} \ln|3x+2| + c$$

Ejemplos.

Encuentra las integrales siguientes.

$$a) \int (10x^4 - 2\sec^2 x) dx \quad b) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$$

Solución.

$$a) \int (10x^4 - 2\sec^2 x) dx = \frac{10}{5}x^5 - 2\tan x + c = 2x^5 - 2\tan x + c$$

$$b) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin x} \right) \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) dx = \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

RELACIÓN ENTRE LA CONDICIÓN INICIAL Y LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN.

Iniciemos definiendo a la función que llamamos primitiva.

DEFINICIÓN.

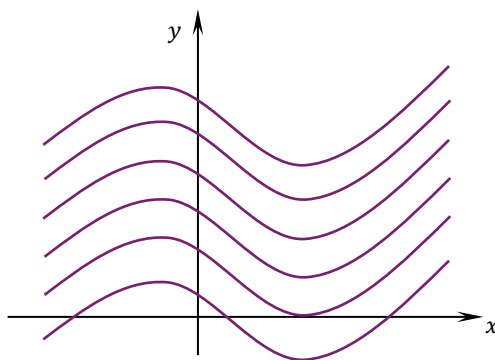
La función primitiva $F(x)$, se representa por

$$F(x) = \int f(x) dx$$

es el conjunto de funciones F cuyas derivadas son iguales a f , es decir, F es una primitiva (o antiderivada) de f si $F'(x) = f(x)$.

Observa que $F(x) = x^2 + 4$ y $G(x) = x^2 + 5$ son primitivas de la función $f(x) = 2x$, ya que la diferencia entre las funciones F y G es una constante, no sabremos cual es la primitiva de la función f si sólo hay una constante que las hace diferente. Por esta razón cuando resolvemos una integral indefinida, siempre escribimos la constante (llamada *constante de integración*), esta constante puede ser cualquier valor, su valor se determina si nos dan alguna condición que deba de cumplir la función primitiva. Esta constante puede ser cualquier número real, comúnmente se denota con la letra $c \in \mathbb{R}$.

Observemos que la letra c , sugiere un desplazamiento vertical en todas las gráficas que representan a las primitivas de una función, como se indica en la gráfica siguiente:



El valor de la constante se puede encontrar en diversas formas según distintas condiciones iniciales.

Ejemplo.

Determina la función de posición s si la función velocidad v es $v(t) = -12t + 3$ y la posición inicial es $s(0) = 3$.

Solución.

Como hemos estudiado en el primer curso la velocidad es la derivada de la posición, es decir $v'(t) = s(t)$, entonces

$$s = \int -12t + 3 dt = -6t^2 + 3t + c$$

Ahora, para encontrar a la constante c , debemos evaluar a la función de posición en el origen

$$s(0) = -6(0)^2 + 3(0) + c = 3$$

Por lo tanto $c = 3$ y la función de posición es.

$$s(t) = -6t^2 + 3t + 3$$

Ejemplo.

Encuentra la función de posición s si la función aceleración $a(t) = 3 \operatorname{sen} t + 1$, la velocidad inicial $v(0) = 0$, y la posición inicial es $s(0) = 4$.

Solución.

Sabemos que la aceleración a es la doble derivada de la función posición y a la vez la derivada de la función velocidad v , así primero calculemos la velocidad

$$v = \int (3 \operatorname{sen} t + 1) dt = -3 \cos t + t + c$$

Evaluamos a la velocidad en cero, para determinar el valor de la constante,

$$v(0) = -3 \cos(0) + 0 + c = -3 + c = 0 \Rightarrow c = 3$$

Ahora, encontremos a la función posición

$$s = \int (-3 \cos t + t + 3) dt = -3 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} t^2 + 3t + c_1$$

Evaluamos a la función en $t = 0$, $s(0) = -3 \operatorname{sen}(0) + \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + c_1 = c_1 = 0$

Por lo tanto, la función de posición es:

$$s(t) = -3 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} t^2 + 3t$$

Ejemplo.

Encuentra la función f tal que $f'(x) = 2x - 2$ y pasa por el punto $P(3,2)$.

Solución.

Integramos a la derivada de la función para encontrarla

$$f = \int (2x - 2) dx = x^2 - 2x + c$$

Evaluamos a la función en $x = 3$,

$$f(3) = 3^2 - 2(3) + c = 9 - 6 + c = 3 + c = 2 \Rightarrow c = -1$$

La función buscada es:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

- Cambio de variable.

Este método consiste en un cambio de la variable de manera adecuada que permita convertir a la función que se integra (integrando) en una función sencilla de integrar (integral inmediata). Este método es lo opuesto a la regla de la cadena.

REGLA DE CAMBIO DE VARIABLE (SUSTITUCIÓN).

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo y la función f es continua en ese intervalo, entonces

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

Debemos tener en cuenta que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$ lo cual es una forma de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du .

Ejemplo (polinomios).

Encuentra

$$\int (x^3 - 2x^2 + 3x + 3)^{50} (3x^2 - 4x + 3) dx$$

Solución.

Podemos observar que se presenta un polinomio y su derivada, es decir, si hacemos la propuesta

$u = x^3 - 2x^2 + 3x + 3$, entonces $du = (3x^2 - 4x + 3)dx$, tendremos que la integral se puede escribir como:

$$\int \underbrace{(x^3 - 2x^2 + 3x + 3)}_u^{50} \underbrace{(3x^2 - 4x + 3)}_{du} dx = \int u^{50} du = \frac{1}{51} u^{51} + c = \frac{1}{51} (x^3 - 2x^2 + 3x + 3)^{51} + c$$

Ejemplo (potencia dentro de un seno).

Halla la integral

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx$$

Solución.

Observamos, como en el caso anterior que si $u = x^3$, entonces $du = 3x^2 dx$, así el cambio sugerido es el que hemos observado y la integral se convierte en

$$\int 3x^2 \cos(x^3) dx = \int \cos u du = \operatorname{sen} u + c = \operatorname{sen}(x^3) + c$$

Ejemplo.

No siempre se tendrá la derivada exacta, pero si es por una constante no debe haber problema ya que en las integrales ella puede entrar o salir.

Realiza la integral siguiente.

$$\int x^3 \operatorname{sen}(x^4) dx$$

Solución.

En este caso si hacemos la propuesta $u = x^4$, entonces $du = 4x^3 dx$, pero el número 4, no lo tenemos en la integral, así que procedemos de una de dos formas.

Primera forma, se lo añadimos, pero se lo quitamos, al multiplicar por 1, de la forma $\frac{4}{4}$, así de esta manera tendremos

$$\int x^3 \operatorname{sen}(x^4) dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \operatorname{sen}(x^4) dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}(u) du = -\frac{1}{4} \cos(u) + c = -\frac{1}{4} \cos(x^4) + c$$

Segunda forma.

Despejamos $x^3 dx$ de la igualdad en la diferencial

$u = x^4$, entonces $du = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{4} du$ y la integral toma la forma

$$\int x^3 \operatorname{sen}(x^4) dx = \int \operatorname{sen}(x^4) (x^3 dx) = \int \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{4} du\right) = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} u du$$

que ya fue integrada anteriormente.

Ejemplo, una función trigonométrica dentro de un exponente.

Encuentra la integral

$$\int (4 + \operatorname{sen} x)^7 \cos x dx$$

Solución.

Se tiene a la función seno y a su derivada la función coseno, como la derivada de una constante es cero, se propone el cambio

$$u = 4 + \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$$

así

$$\int (4 + \operatorname{sen} x)^7 \cos x dx = \int u^7 du = \frac{1}{8} u^8 + c = \frac{1}{8} (4 + \operatorname{sen} x)^8 + c$$

Ejemplo Raíz dentro de una función trigonométrica.

Halla la integral

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

Solución.

Sabemos que si $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, podemos observar que nos hace falta el número 2, procedemos como la hicimos en un ejemplo anterior, la integral toma la forma.

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sec^2 u du = 2 \tan u + c = 2 \tan(\sqrt{x}) + c$$

Ejemplo, cuando el numerador es la derivada del denominador.

Halla la integral

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 3} dx$$

Solución.

Proponemos la función $u = x^4 + 3 \Rightarrow du = 4x^3 dx$, así se obtiene

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln|u| + c = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 3| + c$$

En general, para cualquier función f , se cumple

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Ejemplo.

Encuentra la integral siguiente:

$$\int \tan x dx$$

Solución.

La integral la podemos escribir como

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \ln|\cos x| + c$$

- **Integración por partes.**

En el apartado anterior, trabajamos con la importante técnica de cambio de variables que, aunque no se hizo exhaustivamente nos ayuda a encontrar muchas integrales, sin embargo hay una infinidad de integrales en las que requerimos de otra técnica para poder resolverlas, por ejemplo, la integral

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

Aún no podemos integrarla con lo que hemos visto.

Sabemos que la derivada y la integral están estrechamente relacionadas y las técnicas de derivación nos ayudan a encontrar técnicas de integración, por ejemplo, la regla del producto, en donde se tienen dos funciones derivables f y g , se quiere obtener la derivada de su producto, como sabemos,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Al integrar, se obtiene

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x)dx$$

La integral de izquierda es $f(x)g(x)$, así podemos escribir

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Despejamos a la segunda integral

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

La forma en que hemos poder escribir a la integral recibe el nombre de *integración por partes* la notación que es la más común y que todos los libros manejan es la siguiente:

cambiamos $u = f(x)$, $v = g(x)$, por lo que $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, de esta manera podemos escribir

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Ejemplo.

Encuentra a la integral

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solución.

En la regla de integración por partes, se elige una función u a la que debemos derivar y a una función dv a la que debemos de integrar

elegimos

$$u = x \text{ y } dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

por lo tanto $du = dx$ y $v = \cos x$, se acostumbra escribir lo anterior de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \operatorname{sen} x \, dx \\ du &= dx & v &= \cos x \end{aligned}$$

e integramos

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_u \underbrace{\text{sen } x \, dx}_{dv} &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \text{sen } x + c\end{aligned}$$

¿Qué ocurre si no elegimos bien a nuestras funciones?

Ejemplo.

Encuentra la integral

$$\int x \text{sen } x \, dx$$

Solución.

Esta integral es la misma, pero supongamos que ahora invertimos la elección de las funciones, entonces tendremos

$$\begin{aligned}u &= \text{sen } x, & dv &= x \, dx \\ du &= \cos x \, dx, & v &= \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

la integral toma la forma

$$\int x \text{sen } x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \text{sen } x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx$$

La última integral es más complicada que la original, así que nuestra elección de las funciones no fue correcta.

Una sugerencia para elegir a las funciones en la integración por partes, es por medio de la palabra ILATE, que son las letras iniciales para elegir a las funciones, estas letras sugieren que primero, en caso de presentarse se elija a la función u como una función inversa (I), logaritmo (L), algebraica (A), trigonométrica (T), exponencial (E), en ese orden, en nuestro caso se eligió primero a la función algebraica $u = x$ y como $dv = \text{sen } x \, dx$ a la trigonométrica.

En ocasiones la integral pareciera tener una sola función.

Ejemplo.

Halla

$$\int \ln(x) \, dx$$

Solución.

En este caso hay una función que esta “escondida” y es la función 1, la cual es algebraica, según la sugerencia debemos elegir

$$\begin{aligned}u &= \ln x, & dv &= 1 \, dx \\ du &= \frac{1}{x} \, dx, & v &= x\end{aligned}$$

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) \, dx = x \ln x - x + c$$

En este tipo de integración, a veces es necesario aplicar la integración por partes dos o más veces, porque la segunda integral resultante así lo requiere.

Ejemplo integral iterada.

Encuentra la integral

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

Solución.

$$\begin{aligned}u &= x^2, & dv &= \cos x \, dx \\ du &= 2x \, dx, & v &= \text{sen } x\end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

La segunda integral la debemos integrar nuevamente, pero ya la hemos calculado así que sólo daremos su solución.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + c \\ &= x^2 \sin x + 2x \sin x - 2 \sin x + c \end{aligned}$$

Ejemplo.

halla

$$\int e^{2x} \sin x \, dx$$

Solución.

Por la sugerencia, hacemos la elección siguiente:

$$u = \sin x, \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = \cos x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx$$

procedemos de manera similar con la segunda integral

$$u = \cos x, \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = -\sin x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \frac{1}{2} \int e^{2x} (-\sin x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx$$

reunamos la información

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

observamos que tenemos al final una integral similar a la que estamos integrando, pero afortunadamente tiene un factor diferente de uno, así podemos escribir

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx \\ \int e^{2x} \sin x \, dx + \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x \end{aligned}$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x$$

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x \right] + c$$

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + c$$

Hay un método que se llama *método tabular* el cual, si una de las funciones al derivarla reiteradamente en algún momento es cero, entonces se puede aplicar.

Ejemplo.

Calcula

$$\int x^3 \cos x dx$$

Solución.

Integremos de la manera usual

$$u = x^3, \quad dv = \cos x dx$$

$$du = 3x^2 dx, \quad v = \sin x$$

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx$$

Nuevamente

$$u = x^2, \quad dv = \sin x dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

Finalmente

$$u = x, \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Reunimos en una sola integral

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos x dx &= x^3 \sin x - 3(-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)) + c \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c \end{aligned}$$

El método tabular consiste en hacer una tabla en donde se ubica en la primera columna el signo, se inicia con positivo, continua negativo y se alternan, en la segunda columna se sitúa la función u y sus derivadas y en la otra columna a la función dv y sus integrales, como se muestra a continuación.

Signo	u y sus derivadas	dv y sus integrales
+	x^3	$\cos x$
-	$3x^2$	$\sin x$
+	$6x$	$-\cos x$
-	6	$-\sin x$
+	0	$\cos x$

Se multiplica como muestran las flechas, respetando el signo.

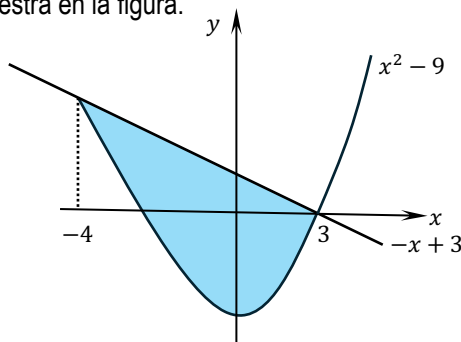
$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c.$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN EN DIFERENTES CONTEXTOS.

En esta sección se darán algunos ejemplos de aplicación de la integral, principalmente al cálculo de áreas, pero también se darán en otros contextos, pues la integral, aunque nace en el cálculo de áreas, no solo se ocupa de calcular áreas.

1. Calcula el área acotada por las gráficas $y = -x + 3$ e $y = x^2 - 9$.

Solución. Como se muestra en la figura.



encontremos los puntos de intersección, para este fin se igualan las dos funciones y se resuelve la ecuación resultante.

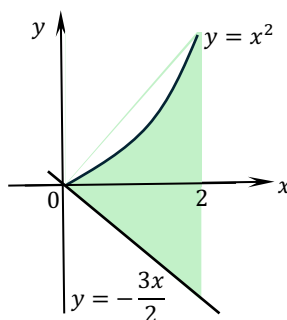
$$x^2 - 9 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4) = 0$$

los puntos de intersección se localizan en $x = 3$ y $x = -4$. Ahora debemos checar cual gráfica está arriba y cual abajo, como se ve en la figura, la recta está por arriba en el intervalo $[-4, 3]$, de esta manera el área A está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^3 (-x + 3) - (x^2 - 9) dx = \int_{-4}^3 -x^2 - x + 12 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x \right]_{-4}^3 = \left[-\frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{2}3^2 + 12(3) \right] - \left[-\frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{2}4^2 + 12(4) \right] \\ &= \frac{343}{6} \end{aligned}$$

2. Encuentra el área de la región comprendida entre las gráficas dadas por las funciones $y = x^2$ y las rectas $y = -\frac{3x}{2}$, $x = 2$.

Solución. Se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = -\frac{3x}{2}$ con $x \in [0, 2]$, podemos observar que la función que está arriba es la parábola y la de abajo es la recta.



El área A está dada por

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 \left[x^2 - \left(-\frac{3x}{2} \right) \right] dx = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{3x}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 \\
 &= \left[\frac{2^3}{3} + \frac{3}{4}2^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + \frac{3}{4}0^2 \right] \\
 &= \frac{17}{3}
 \end{aligned}$$

La integral también nos ayuda a encontrar el volumen de sólidos en el espacio, enunciaremos una definición de volumen

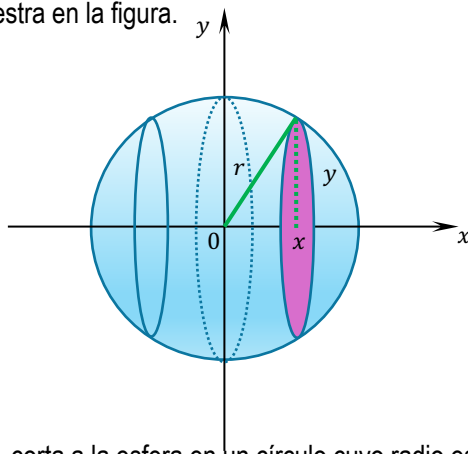
DEFINICIÓN DE VOLUMEN.

Sea S un sólido que se encuentra entre las rectas $x = a$, $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x , que pasa por x y es perpendicular al eje x , es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el *volumen* de S es

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

3. Encuentra el volumen de una esfera de radio r .

Solución. Coloquemos a la esfera, sin perder generalidad, de tal forma que su centro esté en el origen, como se muestra en la figura.



Entonces el plano P_x corta a la esfera en un círculo cuyo radio es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal es

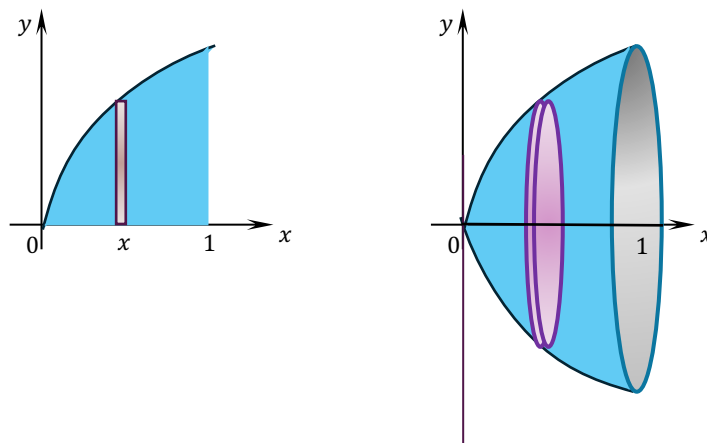
$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Aplicamos la definición de volumen, con $a = -r$ y $b = r$, resulta

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r \\
 &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right) - \left(-r^3 - \frac{1}{3}(-r)^3 \right) \right] \\
 &= \frac{4}{3}r^3
 \end{aligned}$$

4. Encuentra el volumen que se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$, con $x \in [0, 1]$. Haz un dibujo que ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación típico.

Solución. Realicemos la gráfica de la función, iluminando su área respectiva.



Al girar alrededor del eje x obtenemos un sólido como el que se muestra del lado derecho, al cortar una rebanada que contenga a x se obtiene un cilindro (disco) con radio $\sqrt{x}$. Por lo que el área A de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

El volumen del sólido (llamado paraboloides) se encuentra en el intervalo $[0, 1]$ de manera que su volumen V es

$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

El trabajo W efectuado al mover un objeto de a a b se define como:

$$W = \int_a^b f(x) \, dx$$

Donde f es la fuerza

5. Cuando una partícula está a x pies del origen, actúa sobre ella una fuerza igual a $f(x) = x^2 + x$ libras ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla de $x = 1$ a $x = 3$?

Solución.

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 (x^2 + x) \, dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} 3^3 + \frac{1}{2} 3^2 \right) - \left(\frac{1}{3} (1) + \frac{1}{2} (1) \right) \\ &= \frac{50}{3} \end{aligned}$$

UNIDAD 3.

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

Niveles cognoscitivos (Bloom)

1. Conocer, 2. Comprender, 3. Aplicar

Tema	Aprendizaje	Niveles Cognitivos		
		1	2	3
• Fórmulas inmediatas de integración.	• Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración.	1, 2, 3, 4	5, 6	
• Relación entre la condición inicial y la constante de integración.	• Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación. • Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren.	7,	8, 9, 10	
		11,	12, 13, 14	15, 16
Métodos de integración.	• Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada.	17		
• Cambio de Variable.	• Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales. • Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. • Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla.		18, 19, 20	
			21, 22, 23	
		30	24, 25, 26, 27, 28	31
• Integración por partes.	• Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones.	32	33, 34, 38, 39, 40	35, 36, 37
• Problemas de aplicación en diferentes contextos.	• Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.	41, 42, 43, 63	44, 45, 46, 50, 51, 52, 53, 54, 61, 62	47, 48, 49, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 64

PROBLEMAS UNIDAD 3.
INTEGRAL INDEFINIDA.

Propósito: Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral. de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.

Tema	Aprendizajes
Fórmulas inmediatas de integración.	Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración.
Relación entre la condición inicial y la constante de integración.	Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación. Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren.

INTEGRALES INMEDIATAS.

En la unidad 2, se ha mostrado el Teorema Fundamental del Cálculo, a saber

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ definamos a la función F mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Entonces $F(x)$ es derivable en $[a, b]$. Además, para todo x de $[a, b]$ se tiene $F'(x) = f(x)$.

Definición. Antiderivada o primitiva.

Una **antiderivada o primitiva** de la función f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Siempre y cuando la función f este definida.

La primitiva más general.

Si $F'(x) = f(x)$ en cada punto del intervalo abierto (a, b) , entonces cada primitiva G de f en (a, b) tiene la forma

$$G(x) = F(x) + c$$

Donde c es una constante.

En los cursos hemos trabajado con las integrales de las funciones siguientes

$$a) \int kx^n dx = k \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, \quad b) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$c) \int \operatorname{sen}(x) dx = \cos(x) + c \quad d) \int e^x dx = e^x + c$$

$$e) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$f) \int \cos(x) dx = -\operatorname{sen}(x) + c$$

Entre otras integrales.

1. La integral indefinida $\int \sqrt{x}(x^2 - 3x + 5)dx$ es igual a:

$$a) x^{5/2} - 3x^{3/2} + 5\sqrt{x} + c.$$

$$b) \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$c) \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x - 3) + c.$$

$$d) \sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) + c$$

$$e) \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$$

Respuesta e)

Para calcular la antiderivada escribamos los exponentes de manera fraccionaria o negativa

$$\sqrt{x}(x^2 - 3x + 5) = x^{5/2} - 3x^{3/2} + 5x^{1/2}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}(x^2 - 3x + 5) dx &= \int (x^{5/2} - 3x^{3/2} + 5x^{1/2}) dx \\ &= \int x^{5/2} dx - 3 \int x^{3/2} dx + 5 \int x^{1/2} dx \\ &= \frac{x^{7/2}}{7/2} - 3 \frac{x^{5/2}}{5/2} + 5 \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\ &= \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c. \end{aligned}$$

2. El valor de la integral $\int \frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} dt$ es:

$$a) 3t - 2 + t^{1/2} - t^{-2} + c$$

$$b) \frac{3}{2}t^2 - 2t - \frac{1}{3}t^{3/2} - t^{-1} + c$$

$$c) \frac{3}{2}t^2 - 2t - \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \frac{1}{t} + c$$

$$d) 3t^2 - 2t + \frac{1}{2}t^{3/2} - \ln(t^2) + c$$

$$e) \ln(t^2)(9t^2 - 4t + 2t\sqrt{t}) + c$$

Respuesta c)

Primero escribamos a la función como

$$\frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} = 3t - 2 + t^{1/2} - t^{-2}$$

Ahora integremos, empleando la linealidad de la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} dt &= \int 3t - 2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2} dt \\&= 3 \int t dt - 2 \int dt - \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{-2} dt \\&= \frac{3}{2}t^2 - 2t - \frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}} + t^{-1} + c \\&= \frac{3}{2}t^2 - 2t - \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \frac{1}{t} + c\end{aligned}$$

3. La integral indefinida

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx$$

Es:

- a) $\sec(x) + c$ b) $\tan(x) + c$ c) $\ln(\cos^2(x)) + c$ d) $\frac{1}{\cos(x)} + c$
e) $\csc(x) + c$

Respuesta a)

Escribimos el equivalente $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \frac{1}{\cos(x)} = \tan(x) \sec(x)$, así

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$$

4. El valor de la integral $\int \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} dx$ es:

- a) $2 \ln(\operatorname{sen}(x)) (x - \operatorname{sen}(x)) + c$ b) $-\cot(x) + \csc(x) + c$
c) $\frac{2(1 - \cos(x)) \cos(x) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^4(x)} + c$ d) $\csc^2(x) - \cot(x) \csc(x) + c$
e) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} + c$

Respuesta b)

Escribamos la función de la manera siguiente

$$\frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \csc^2(x) - \cot(x) \csc(x)$$

Por lo tanto

$$\int \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \csc^2(x) - \cot(x) \csc(x) dx = \int \csc^2(x) dx - \int \csc(x) \cot(x) dx$$
$$= -\cot(x) + \csc(x) + c$$

5. Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar el valor de la integral siguiente

$$\int_1^{10} \frac{x^3 + 5}{x^2} dx$$

- a) 42 b) 48 c) 52 d) 54 e) 60.23

Respuesta d)

Escribamos a la función de la manera siguiente

$$\frac{x^3 + 5}{x^2} = x + 5x^{-2}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$\int_1^{10} \frac{x^3 + 5}{x^2} dx = \int_1^{10} x + 5x^{-2} dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} \right)_1^{10} = \left(50 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 5 \right) = 54$$

6. Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar el valor de la integral siguiente

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx$$

- a) 3 b) $\frac{3}{4}$ c) 3.78 d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{10}{3}$

Respuesta e)

Recordemos la identidad

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x \right)_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 4 = \frac{10}{3}$$

7. La función F que satisface la condición dada

$$F'(x) = \sqrt{x}, F(1) = 2,$$

es:

- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{6}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

Respuesta a)

Mediante el teorema fundamental del Cálculo

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

ahora

$$F(1) = \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + c = 2 \Rightarrow c = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

8. El valor de t para que la ecuación $\int_0^4 x^3 dx = t^3$ sea cierta es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Respuesta d)

Calculemos la integral dada

$$\int_0^4 x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^4 = 4^3$$

Entonces la ecuación $4^3 = t^3$ tiene como solución $t = 4$.

9. Sea la función $F(t) = \int_4^t \left(\frac{x}{25-x^2}\right)^{1/2} dx$, la función $F'(t)$ está dada por:

a) $\left(\frac{t}{25-t^2}\right)^{1/2}$ b) $\left(\frac{t}{25-t^2}\right)^{1/2} - 4$ c) $\sqrt{\frac{t}{25-t^2}} + 4$

d) $\frac{\frac{25-3t^2}{(25-t^2)^2}}{2\sqrt{\frac{t}{25-t^2}}} = \frac{25-3t^2}{2\sqrt{t}(25-t^2)^{3/2}}$ e) $\frac{1}{2}\left(\frac{t}{25-t^2}\right)^{-1/2} - 4$

Respuesta a)

Mediante el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$F'(t) = \left(\frac{t}{25-t^2}\right)^{1/2}$$

10. Supongamos que h es una función tal que

$$h(1) = 2, h'(1) = 2, h''(1) = 3, h(2) = 6, h'(2) = 5, h''(2) = 13$$

El valor de la integral

$$\int_1^2 h''(u) du$$

es:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

Respuesta e)

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_1^2 h''(u) du = h'(u)|_1^2 = h'(2) - h'(1) = 5 - 2 = 3$$

11. La gráfica de una función pasa por el punto (3,2) y su derivada es $f'(x) = 5x^2 - x + 1$, la función está dada por:

a) $5x^2 - x + 3$

b) $10x - 1$

c) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

d) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

e) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{83}{2}$

Respuesta e)

Como $f'(x) = 5x^2 - x + 1$, entonces $f(x) = \int 5x^2 - x + 1 dx$, integrando la función, se obtiene

$$f(x) = \int 5x^2 - x + 1 dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Como pasa por el punto (3,2), se debe de cumplir

$$f(3) = \frac{5}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 3 + c = 2$$

Por lo tanto

$$\frac{5}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 3 + c = 45 - \frac{9}{2} + 3 + c = 2 \Rightarrow c = -\frac{83}{2}$$

La función está dada por

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{83}{2}$$

12. La gráfica de una función f pasa por el punto (3,7) y tiene pendiente $4x^2 - 3$ en el punto (x, y) , el valor de $f(0)$ es:

a) -20

b) -10

c) $\frac{9}{2}$

d) 12

e) 15

Respuesta a)

La función está dada por su integral, así

$$f(x) = \int 4x^2 - 3 dx = \frac{4}{3}x^3 - 3x + c$$

Como pasa por el punto (3,7), se debe de cumplir

$$f(3) = \frac{4}{3}(3)^3 - 3(3) + c = 7 \Rightarrow c = -20$$

La función f es

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x - 20$$

Por lo tanto

$$f(0) = -20$$

13. El mínimo de una función g es 8, si su derivada está dada por la función

$$g'(x) = 3x - 7$$

El valor de $g(5)$ es:

- a) 6 b) 8 c) 12 d) $\frac{56}{3}$ e) $\frac{62}{3}$

Respuesta d)

El punto crítico se encuentra en $x = \frac{7}{3}$, para encontrar a la función g integramos

$$g(x) = \int (3x - 7) dx = \frac{3}{2}x^2 - 7x + c$$

Sabemos que en $g\left(\frac{7}{3}\right) = 8$, así $g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{3}\right) + c = 8 \Rightarrow c = \frac{97}{6}$, por lo tanto la función g está dada por

$$g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x + \frac{97}{6} \Rightarrow g(5) = \frac{3}{2}(5)^2 - 7(5) + \frac{97}{6} = \frac{56}{3}$$

14. Si la derivada de una función f está dada por

$$f'(x) = -6x + 18$$

y $f(5) = 30$, entonces el máximo de la función se encuentra en:

- a) $x = 30$ b) $x = \frac{92}{3}$ c) 38 d) 40 e) 42

Respuesta e)

La función f está dada por

$$f(x) = \int (-6x + 18) dx = -3x^2 + 18x + c$$

Con la condición

$$f(5) = -3(5)^2 + 18(5) + c = 30 \Rightarrow c = 15$$

El punto crítico es $x = \frac{18}{6} = 3$, así $f(3) = -3(3)^2 + 18(3) + 15 = 42$

15. Suponga que el ritmo al cual se consume petróleo en el mundo se puede modelar con

$$r = 32e^{0.05t}$$

Donde r está en miles de millones de barriles por año, t está en años y $t = 0$ es el 1 de enero de 1990.

- a) 100 b) 149.34 c) 175.345 d) 181.77 e) 201.34

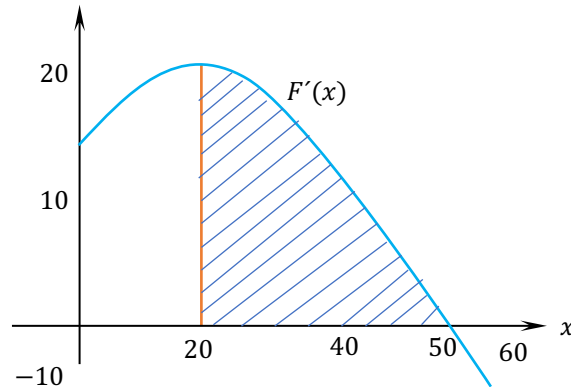
Respuesta d)

La cantidad total de petróleo consumida entre el principio de 1990 y el principio de 1995 es:

Hay 5 años desde el inicio de 1990 y el inicio de 1995, así el consumo se puede calcular a través de la integral

$$\int_0^5 32e^{0.05t} dt = \frac{32}{0.05} e^{0.05t} \Big|_0^5 = 640[e^{0.25} - 1] \approx 181.776$$

16. En la figura siguiente se muestra la gráfica de la derivada F' de una función F . Dado que $F(20) = 150$, el valor máximo de F es:



- a) 300 b) 350.23 c) 400.564 d) 430 e) 450

Respuesta e)

Sabemos que $F(x)$ aumenta para $x < 50$ (porque F' es positiva), también $F(x)$ decrece para $x > 50$. Por lo tanto, la gráfica de F sube hasta el punto en que $x = 50$ y luego inicia a descender. Por consiguiente, el punto más alto está en $x = 50$ y el máximo valor alcanzado por F es $F(50)$. Como $F(20) = 150$, utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo evaluemos a $F(50)$

$$F(50) - F(20) = \int_{20}^{50} F'(x) dx$$

así

$$F(50) = 150 + \int_{20}^{50} F'(x) dx$$

La integral definida es el área de la superficie sombreada, debajo de la gráfica de la función F' que es aproximadamente igual al área del rectángulo de altura 10 y ancho 30. Por lo tanto, el área achurada es alrededor de 300 y el máximo valor alcanzado por la función F es

$$F(50) \approx 150 + 300 = 450$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN. CAMBIO DE VARIABLES.

Contamos con una buena base de funciones integrables y sabemos como realizar su integral, las hemos llamado integrales inmediatas, a saber, consideremos las siguientes:

$$a) \int kx^n dx = k \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$b) \int e^x dx = e^x + c$$

$$c) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Con ayuda de las propiedades de la integral y de la regla de la cadena, podemos realizar integrales de aspecto más complicado, sólo basta con llevarlas a una de las formas que hemos enunciado.

Enunciamos el teorema del cambio de variables.

Método de sustitución o cambio de variable.

Sea g una función derivable y suponga que F es una antiderivada de f . Entonces, si $u = g(x)$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Ejemplo. Calcula la integral siguiente:

$$\int x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx$$

Una idea para llevar a cabo la integración de una función por medio de un cambio de variables, es “ver” a la función y su derivada, en este caso la derivada de la función $x^3 - 5$ es $3x^2$, como el integrando tiene el factor x^2 sólo debemos multiplicar por el número 3, aunque también dividir entre el mismo número, así

$$\int x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx$$

Podemos hacer el cambio de variable

$$u = x^3 - 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx &= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \frac{2}{3} u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{9} (x^3 - 5)^{3/2} + c \end{aligned}$$

La idea central en la integración por cambio de variable es “ver” a la función y su derivada, es ahí en donde radica el cambio de variable, las constantes se pueden sacar o bien introducir en la integral ya que la integral es lineal

17. La integral

$$\int x e^{x^2} dx$$

Es:

a) $x e^{x^2} + c$ b) $e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + c$ c) $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$ d) $x + e^{x^2} + c$ e) $e^{x^2} + 2x + c$

Respuesta c)

Podemos observar que la derivada de la función x^2 es $2x$, así el cambio de variable adecuado es

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

Por lo tanto

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

18. El valor de la integral

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

es:

a) $\frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1)$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} + 1$ e) 5

Respuesta a)

Hagamos el cambio de variables $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$, la integral la podemos escribir como

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1)$$

19. El valor de la integral siguiente

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$$

es:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) 2

Respuesta b)

Como la derivada de la función seno es la función coseno, conviene hacer el cambio siguiente

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

20. El valor de la integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x) \sec^2(x) dx$$

es:

- a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 2

Respuesta c)

como la derivada de la función tangente es la función secante cuadrada, es conveniente hacer el cambio siguiente

$$u = \tan(x) \Rightarrow du = \sec^2(x) dx$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x) \sec^2(x) dx = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

21. Mediante un cambio de variables adecuado, el valor de la integral

$$\int \frac{dx}{x \ln(x)}$$

es:

- a) $\frac{1}{x} + c$ b) $\ln(x) + c$ c) $\frac{1}{x^2} + c$ d) $\ln(x) + c$ e) $\ln(\ln x) + c$

Respuesta e)

Hagamos el cambio de variable siguiente

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x \ln(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln x) + c$$

22. El valor de la integral

$$\int \frac{2e^x}{3 - e^x} dx$$

es

- a) $\ln(3 - e^x) + c$ b) $\frac{2(3 - e^x) - 2e^{2x}}{(3 - e^x)^2} + c$ c) $3 - e^x + c$
d) $2 \ln(3 - e^x) + c$ e) $x + c$

Respuesta d)

Hagamos el cambio $u = 3 - e^x \Rightarrow du = -e^x dx$, podemos escribir a la integral como

$$\int \frac{2e^x}{3 - e^x} dx = 2 \int \frac{e^x}{3 - e^x} dx = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln u + c = 2 \ln(3 - e^x) + c$$

23. El valor de la integral

$$\int \frac{\sec^2(x)}{1 - \tan(x)} dx$$

Es:

a) $\sec^2(x) + c$ b) $-\ln(1 - \tan(x)) + c$ c) $\ln(1 + \tan(x)) + c$

d) $\frac{2(1 - \tan(x)) \sec(x) \tan(x) - \sec^3(x)}{(1 - \tan(x))^2} + c$ e) $2 \ln(\sec(x)) + c$

Respuesta b)

Mediante el cambio $u = 1 - \tan(x) \Rightarrow du = -\sec^2(x) dx$, por lo tanto

$$\int \frac{\sec^2(x)}{1 - \tan(x)} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln(u) + c = -\ln(1 - \tan(x)) + c$$

24. La integral

$$\int \frac{1 - \ln(x)}{x} dx$$

Es igual a:

a) $\ln(x) \left[1 - \frac{1}{2} \ln(x) \right] + c$ b) $\ln(1 - \ln(x)) + c$ c) $\ln(x) (1 - \ln(x)) + c$

d) $\frac{x \left(-\frac{1}{x} \right) - (1 - \ln(x))}{x^2} + c = \frac{-2 + \ln(x)}{x^2} + c$ e) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + c$

Respuesta a)

Escribamos a la integral como

$$\int \frac{1 - \ln(x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) - \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

En la última integral hagamos

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c$$

Por lo cual

$$\int \frac{1 - \ln(x)}{x} dx = \ln(x) - \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + c = \ln(x) \left[1 - \frac{1}{2} \ln(x) \right] + c$$

25. Calcula el valor de la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx$$

a) $\sec^2(x) + c$

b) $\cos^2(x) + c$

c) $\ln(\cos(x)) + c$

d) $\frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} + c$

e) $\ln|\sec(x)| + c$

Respuesta e)

Hagamos $u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)dx$, por lo que

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c = \ln|(\cos(x))^{-1}| + c = \ln|\sec(x)| + c$$

26. El valor de la integral

$$\int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^2} dx$$

es

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) $\frac{3}{2}$

Respuesta b)

Hagamos el cambio de variable

$$u = x^3 - x \Rightarrow du = (3x^2 - 1)dx$$

La integral toma la forma

$$\int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^2} dx = \int_6^{24} \frac{du}{u^2} = \int_6^{24} u^{-2} du = -\frac{1}{u} \Big|_6^{24} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

27. El valor de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5(x) \cos(x) dx$$

es

a) 0

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{3}$

Respuesta d)

hagamos el cambio siguiente

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5(x) \cos(x) dx = \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{6} u^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

28. Una primitiva de la función F , dada por

$$\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx$$

es

- a) $\ln(\sqrt{x} + 1) + c$ b) $(\sqrt{x} + 1)^{3/2} + c$ c) $\frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{1/2} + c$
d) $\frac{4}{3}(\sqrt{x} + 1)^{3/2} + c$ e) $\ln(\sqrt{x} + 1)^{1/2} + c$

Respuesta d)

Mediante el cambio de variable

$$u = \sqrt{x} + 1$$

Se tiene

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^{1/2}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int u^{1/2} du = \frac{4}{3} u^{3/2} + c \\ &= \frac{4(\sqrt{x} + 1)^{3/2} * c}{3} \end{aligned}$$

29. La integral

$$\int \frac{dx}{1 + e^{-x}}$$

es

- a) $\ln|e^x + 1| + c$ b) $\ln|1 + e^{-x}| + c$ c) $\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} + c$
d) $\frac{1}{1 + e^x} * c$ e) $-\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + c$

Respuesta a)

Primero, multipliquemos al integrando por e^x , así se obtiene

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{1 + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

Hagamos $u = e^x + 1$, entonces $du = e^x dx$, así

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1 + e^x| + c$$

30. El valor de la integral

$$\int \frac{\sec^2(x)}{1 + \tan(x)} dx$$

es:

- a) $\frac{2 \sec(x) \tan(x) \sec^2(x) - \sec^3(x)}{(1 + \tan(x))^2} + c$ b) $\ln|\tan(x)| + c$ c) $\sec^2(x) + c$
d) $\ln(\sec^2(x)) + c$ e) $\ln|1 + \tan(x)| + c$

Respuesta e)

Mediante el cambio de variable $u = 1 + \tan(x)$, se tiene $du = \sec^2(x) dx$, por lo tanto

$$\int \frac{\sec^2(x)}{1 + \tan(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1 + \tan(x)| + c$$

31. La integral

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4 \frac{dx}{x^2}$$

Es igual a

- a) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + c$ b) $\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5 + c$ c) $\ln \left|1 - \frac{1}{x}\right| + c$
d) $4 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{1}{x^2}\right) + c$ e) $\frac{1}{4} (x - \ln(x)) + c$

Respuesta b)

Mediante el cambio $u = 1 - \frac{1}{x}$, se tiene $du = \frac{dx}{x^2}$, por lo tanto

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4 \frac{dx}{x^2} = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + c = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5 + c$$

INTEGRACIÓN POR PARTES.

Primero, establecemos el teorema de la fórmula de la integración por partes, a saber:

Teorema. (Fórmula de integración por partes). Si u y v son funciones de x con derivadas continuas, entonces

$$\int u dv = uv - \int v du$$

En los ejercicios que se presentaran trabajaremos únicamente con el cambio que nos llevará al resultado que buscamos. Una manera de lograr esto es recordar la palabra ILATE, la cual nos permite tener un criterio para escoger a la función u y a la diferencial dv . Pero hay que tener en cuenta la traducción de las letras.

I=Inversa, L=logaritmo, A=algebraica, T=trigonométrica y E=exponencial

Por ejemplo, cuando aparece un integrando de la forma (algebraica) (logaritmo), se sugiere elegir a la función u , como el logaritmo y a la diferencial dv a la función algebraica (en el orden en el que aparecen las letras de la palabra ILATE).

Ejemplo. Encuentra la integral (justifica las operaciones realizadas, en caso necesario realiza las operaciones faltantes).

$$\int x \ln(x) dx$$

Solución.

Como se mencionó, elegiríamos a la función u como la función logaritmo y como la diferencial dv a la función algebraica $dv = x dx$, de esta manera se obtiene

$$u = \ln(x), dv = x dx \\ du = \frac{1}{x} dx \text{ y } v = \frac{1}{2} x^2$$

Así

$$\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + c$$

32. La integral

$$\int x\sqrt{x+1} dx$$

Es igual a

$$\begin{array}{lll} a) x(x+1)^{3/2} + c & b) \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + c & c) \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \right] + c \\ d) \frac{2}{15} (x+1)^{\frac{3}{2}} (3x-2) + c & e) \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} (3x-2) + c & \end{array}$$

Respuesta d)

Hagamos

$$u = x, dv = \sqrt{x+1} dx$$

entonces

$$du = dx, v = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1} dx &= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5/2} (x+1)^{5/2} + c \\
&= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \left[x - \frac{2}{5}(x+1) \right] + c = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \frac{(3x-2)}{5} + c \\
&= \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + c
\end{aligned}$$

33. El valor de la integral

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

es:

a) $-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + c$ b) $2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x)$

c) $-x^2 \cos(x) + \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(x) +$ d) $\frac{1}{3}x^3 \cos(x) + c$ e) $\frac{1}{3}x^3 - \cos(x) + c$

Respuesta a)

Hagamos

$$u = x^2, dv = \operatorname{sen}(x) dx$$

entonces

$$du = 2x dx, v = -\cos(x)$$

Por lo tanto

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))(2x dx) = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$$

Debemos de integrar la última integral, por partes nuevamente, en este caso hacemos

$$u = x, dv = \cos(x) dx$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))(2x dx) \\
&= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx \\
&= -x^2 \cos(x) + 2 \left(x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx \right) \\
&= -x^2 \cos(x) + 2 \left(x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx \right) \\
&= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + c
\end{aligned}$$

34. La integral

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

Es igual a:

a) $\frac{1}{3}x^3 e^{3x} + c$ b) $\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}x e^{3x} + c$ c) $\frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}x e^{3x} + e^{3x} c$

$$d) \frac{1}{27} e^{3x} (9x^2 - 6x + 2) + c \quad e) \frac{1}{3} e^{3x} (x^2 + 4x + 2) + c$$

Respuesta d)

Realicemos el cambio de variables $u = x^2$, $dv = e^{3x} dx$

Por lo tanto

$$du = 2x dx, v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

La integral se convierte en

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

Integremos la última integral, nuevamente por parte, haciendo $u = x$, $dv = e^{3x} dx$, así

$$du = dx, v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} \left(x^2 - \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right) + c = \frac{1}{27} e^{3x} (9x^2 - 6x + 2) + c \end{aligned}$$

35. El valor de la integral

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$$

es

$$a) (\ln(x))^2 + c \quad b) \frac{x \frac{1}{x \ln(x)} - \ln(\ln(x))}{x^2} + c \quad c) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\ln(x)} + c$$

$$d) \ln(\ln(x)) + c \quad e) \ln(x) [\ln(\ln(x))] - \ln(x) + c$$

Respuesta e)

Sea

$$u = \ln(\ln(x)), dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow u = \frac{dx}{x \ln(x)}, v = \ln(x)$$

Entonces

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx = \ln(x) [\ln(\ln(x))] - \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) [\ln(\ln(x))] - \ln(x) + c$$

36. La integral

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx$$

es igual a

- a) $\cos(\ln(x)) + c$ b) $\frac{\cos(\ln(x))}{x} + c$ c) $\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) + c$
d) $\frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))] + c$ e) $\frac{-\cos(\ln(x))}{x} + c$

Respuesta d)

Sea

$$u = \operatorname{sen}(\ln(x)), dv = dx \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln(x))}{x}, v = x$$

entonces

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx = x\operatorname{sen}(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx$$

La calcular la segunda integral, hagamos el cambio

$$u = \cos(\ln(x)), dv = dx \Rightarrow du = \frac{-\operatorname{sen}(\ln(x))}{x}, v = x$$

Así tendremos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx &= x\operatorname{sen}(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx \\ &= x\operatorname{sen}(\ln(x)) - \left(x\cos(\ln(x)) + \int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx \right) \\ &= x\operatorname{sen}(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx\end{aligned}$$

La integral al final es la misma que estamos integrando, pero aparece con signo menos (−) pasamos sumando y así tenemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx = \frac{1}{2}[x\operatorname{sen}(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))] + c$$

37. La integral

$$\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

es igual a

- a) $3x^2 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + c$ b) $\frac{1}{4}x^4(1+x^2)^{3/2} + c$ c) $x^2(1+x^2)^{3/2} - \frac{1}{15}(1+x^2)^{5/2} + c$
d) $\frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2 - 2) + c$ e) $\frac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} + \frac{1}{15}x(1+x^2)^{5/2} + c$

Respuesta d)

Sea

$$u = x^2, dv = x\sqrt{1+x^2} dx \Rightarrow du = 2x dx, v = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{3} x^2 (1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{3} \int x (1+x^2)^{3/2} dx \\&= \frac{1}{3} x^2 (1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15} (1+x^2)^{5/2} + c \\&= \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \left[x^2 - \frac{2}{5} (1+x^2) \right] + c \\&= \frac{1}{15} (1+x^2)^{3/2} (3x^2 - 2) + c\end{aligned}$$

38. El valor de la integral

$$\int e^x \cos(x) dx$$

es

$$\begin{array}{lll}a) \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + c & b) -e^x \operatorname{sen}(x) + c & c) e^x - \operatorname{sen}(x) + c \\d) e^x (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + c & e) \frac{1}{2} e^x (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + c & \end{array}$$

Respuesta a)

sea $u = \cos(x)$, $dv = e^x$, por lo que $du = -\operatorname{sen}(x)$, $v = e^x$, entonces

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

Para la segunda integral, hagamos el cambio

$$u = \operatorname{sen}(x), dv = e^x dx \Rightarrow du = \cos(x), v = e^x$$

De esta manera se tiene

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

La integral al final es la misma que estamos integrando, pero aparece con signo menos (−) pasamos sumando y así tenemos

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + c$$

39. Calcula el valor de la integral

$$\int \sec^3(x) dx$$

$$a) 3\sec^2(x) \sec(x) \tan(x) + c \quad b) \frac{1}{4} \sec^4(x) + c \quad c) \frac{1}{4} (\ln|\sec(x) + \tan(x)|)^4$$

$$d) \frac{1}{2}(\sec(x) \tan(x) + \ln|\sec(x) - \tan(x)|) + c. \quad e) \frac{1}{2}(\sec(x) \tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|) + c$$

Respuesta e)

Sea

$$\begin{array}{l} u = \sec(x), \quad dv = \sec^2(x) \\ du = \sec(x) \tan(x), \quad v = \tan(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Entonces} \\ \int \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) - \int \sec(x) \tan^2(x) dx \end{array}$$

Para calcular la segunda integral, recordemos que

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

De esta manera, se tiene

$$\begin{aligned} \int \sec^3(x) dx &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec(x) \tan^2(x) dx \\ &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec(x) (\sec^2(x) - 1) dx. \\ &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx \\ &= \sec(x) \tan(x) - \int \sec^3(x) dx + \ln|\sec(x) + \tan(x)| \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$2 \int \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

Así

$$\int \sec^3(x) dx = \frac{1}{2}(\sec(x) \tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|) + c$$

40. Determina la integral siguiente:

$$\int x^3 e^{2x} dx$$

a) $\frac{3x^2 e^{2x}}{2} + c$ b) $\frac{1}{4}x^4 \frac{1}{2}e^{2x} + c$ c) $e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + c.$

d) $\frac{1}{8}e^{2x}(4x^3) + c$ e) $\frac{1}{8}e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + c.$

Respuesta e)

Como nos sugiere la palabra ILATE, hacemos

$u = x^3$ y $dv = e^{2x} dx$, para aplicar el método tabular hacemos una tabla de tres columnas

Signo	u y sus derivadas	v y sus primitivas
+	x^3	e^{2x}
-	$3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
+	$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
-	6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
+	0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

Se deriva hasta obtener una derivada 0.

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{2x} dx &= \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{6}{8}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + c \\ &= \frac{1}{8}e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + c.\end{aligned}$$

Tema	Aprendizajes
Problemas de aplicación en diferentes contextos.	Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.

En esta sección daremos varios problemas en donde se aplica la integral, entre ellas esta el cálculo de área que es de donde nació (en la antigua Grecia), afortunadamente, no sólo se aplica al cálculo de áreas, sino tiene varias aplicaciones, daremos un paseo por estas aplicaciones.

Área comprendida entre la gráfica de dos funciones.

Definición. El área A de la superficie S comprendida entre las gráficas de las funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$A(S) = \int_a^b |f - g| dx$$

41. El área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ es:

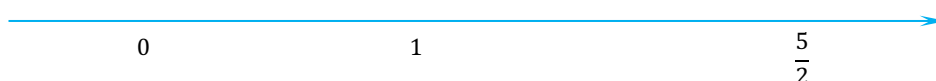
a) -20,45 b) 0 c) 20.45 d) 27.83 e) 33.89

Respuesta e)

Primero podemos encontrar los puntos de intersección igualando a las dos funciones

$$x^3 - 3x^2 + 2x = -x^3 + 4x^2 - 3x \Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + 5x = x(2x^2 - 7x + 5) = 0$$

Cuyas raíces son $x = 0$, $x = \frac{5}{2}$, $x = 1$ en una recta ubiquemos a estos puntos



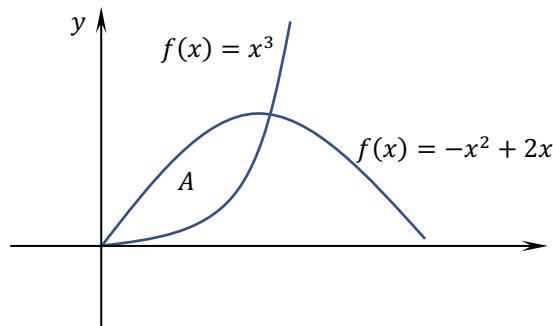
Ahora evaluemos a las dos funciones en cada intervalo para saber, que gráfica está arriba y cual abajo

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3(-1) = 8, & g(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) = -6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}, & g\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= -\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}, & g\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8} \\ f(3) &= -(3)^3 + 4(3)^2 - 3(3) = 0, & g(3) &= (3)^3 - 3(3)^2 + 2(3) = 6 \end{aligned}$$

En el intervalo $[0,1]$, $g(x) \geq f(x)$ y $g(x) \leq f(x)$, en el intervalo $\left[1, \frac{5}{2}\right]$, entonces el área buscada es:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{5/2} |f - g| dx = \int_0^1 (g - f) dx + \int_1^{5/2} (f - g) dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 - 7x^2 + 5x) dx + \int_1^{5/2} (-2x^3 + 7x^2 - 5x) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_1^{5/2} \\ &= \frac{3253}{96} \approx 33.89 \end{aligned}$$

42. El área de la región A que se encuentra en la figura siguiente es



- a) 0.23 b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{3}{15}$ e) $\frac{5}{12}$

Respuesta e)

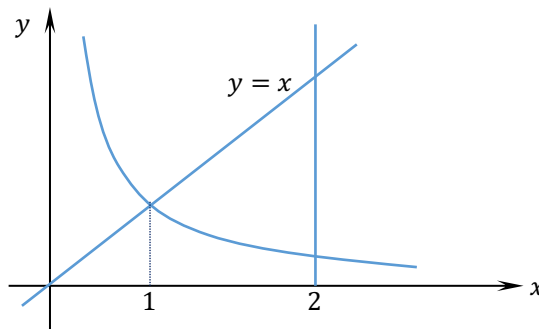
Los puntos de intersección son:

$$-x^2 + 2x = x^3 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2) = 0$$

Como la función cuadrática está por arriba de la función cubica, la integral que proporciona el área es

$$\int_0^1 (-x^2 + 2x - x^3) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

43. El área de la región acotada por las rectas $y = x$, $x = 2$ y por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, esta dada por



- a) 1 b) 1.5 c) 2 d) 2.5 e) 3

Respuesta a)

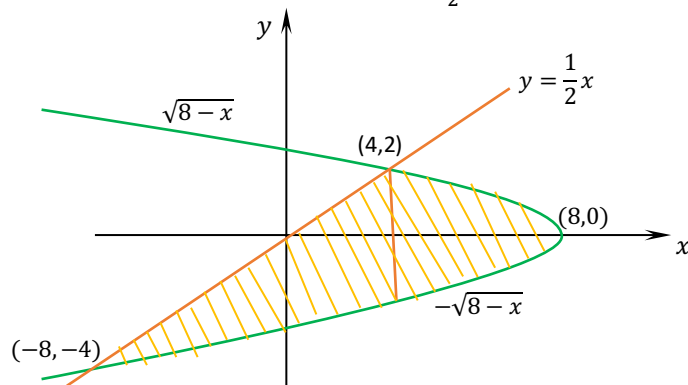
Primero encontremos el punto de intersección entre la recta dada por $y = x$ y la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, con este fin, igualamos las dos funciones

$$\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

En el intervalo $[1, 2]$ la gráfica de la función $y = x$, está por arriba de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, así el área de la región está dada por

$$\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 1$$

44. El área A de la región R acotada por la recta $y = \frac{1}{2}x$ y por la parábola $y^2 = 8 - x$ es:



- a) 12 b) 15 c) 25 d) 36 e) 42

Respuesta d)

Primero encontremos los puntos de intersección, con este fin igualamos a las funciones

$$\sqrt{8-x} = \frac{1}{2}x$$

Elevando al cuadrado

$$8-x = \frac{1}{4}x^2$$

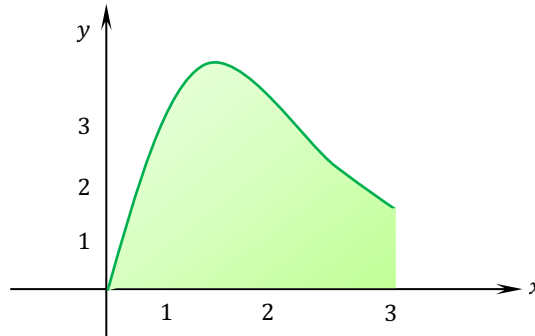
Multiplicando por 4 y arreglando los términos, se tiene

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow x = 4, x = -8$$

En el intervalo $[-8, 4]$, la función $y = \frac{1}{2}x$ está arriba de la gráfica de la función $y = -\sqrt{8-x}$, y en el intervalo $[4, 8]$ las gráficas van de $y = -\sqrt{8-x}$ a $y = \sqrt{8-x}$, así el área se calcula mediante las integrales

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^4 \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{8-x} \right) dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(8-x)^{3/2} \right]_{-8}^4 + \left[-\frac{4}{3}(8-x)^{3/2} \right]_4^8 \\ &= \left[\left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{64}{4} - \frac{128}{3} \right) \right] + \left[0 + \frac{32}{3} \right] = 36 \end{aligned}$$

45. El área bajo la gráfica de la función $f(x) = 10x(3^{-x})$ entre $x = 0$ y $x = 3$, es:



Primero calculemos la integral indefinida

$$\int x(3^{-x}) dx$$

La cual es clásica de la técnica llamada por partes, hacemos $u = x$, $dv = 3^{-x}dx$ por lo cual

$$du = dx, v = -\frac{3^{-x}}{\ln(3)}$$

La integral toma la forma

$$\begin{aligned} \int x(3^{-x}) dx &= -\frac{x3^{-x}}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \int 3^{-x} dx = -\frac{x3^{-x}}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)} \frac{3^{-x}}{\ln(3)} + c \\ &= -\frac{3^{-x}}{\ln(3)} \left[x + \frac{1}{\ln(3)} \right] + c \end{aligned}$$

46. El valor de m de tal forma que la región sobre la recta $y = mx$ y bajo la parábola $f(x) = -x^2 + 2x$ tenga un área de 36 unidades es

a) -5 b) -4 c) 0 d) 1 e) 3

Respuesta b)

Encontremos los puntos de intersección de la parábola y la familia de rectas,

$$mx = -x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + mx = x(x - 2 + m) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2 - m$$

la gráfica de la parábola está por arriba de las rectas, por esta razón, el área es

$$\begin{aligned} \int_0^{2-m} (-x^2 + 2x - mx) dx &= \left(\frac{2-m}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{2-m} \\ &= \frac{2-m}{2} (2-m)^2 - \frac{1}{3} (2-m)^3 = 36 \end{aligned}$$

ahora, resolvamos la ecuación

$$\frac{(2-m)^3}{6} = 36 = 6^2 \Rightarrow (2-m)^3 = 6^3 \Rightarrow 2-m = 6 \therefore m = -4$$

47. El valor de m de tal forma que la región sobre la curva $y = mx^2$ ($m > 0$), a la derecha del eje y , y por debajo de la recta $y = m$ tenga un área de k unidades cuadradas, donde $k > 0$, es:

- a) k b) $2k$ c) $3k$ d) $4k$ e) $5k$

Respuesta c)

El área pedida es $\int_0^1 mx^2 dx = \left(\frac{m}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{m}{3}$, queremos que valga k unidades cuadradas de área, entonces $\frac{m}{3} = k \Rightarrow m = 3k$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL AL CÁLCULO DE VOLÚMENES.

48. El volumen del sólido generado por la región limitada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$, al girarla en torno al eje x es:

- a) π b) $\frac{4}{3}\pi$ c) $\frac{5}{3}\pi$ d) 2π e) $\frac{7}{2}\pi$

Respuesta b)

Como se gira alrededor del eje x , el volumen V está dada por

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi$$

49. La región encerrada por la elipse $9x^2 + y^2 = 25$, se gira alrededor del eje y , de esta manera genera un sólido de revolución. El volumen de este sólido es:

- a) $\frac{250\pi}{9}$ b) $\frac{300\pi}{9}$ c) $\frac{250\pi}{27}$ d) $\frac{500\pi}{27}$ e) $\frac{250\pi}{27}$

Respuesta d)

En este caso el volumen V está dado por

$$V = 2 \int_0^{5/3} 2\pi\sqrt{25-9x^2} dx = -\frac{4\pi}{18} \int_0^{5/3} -18x\sqrt{25-9x^2} dx$$

Para resolver la última integral, hagamos el cambio $u^2 = 25 - 9x^2 \Rightarrow 2udu = -18xdx$, entonces

$$-\frac{4\pi}{18} \int_0^{5/3} -18x\sqrt{25-9x^2} dx = -\frac{2\pi}{9} \int_5^0 2u^2 du = \left(-\frac{4\pi}{27} u^3\right) \Big|_5^0 = \frac{500}{27} \pi$$

50. ¿Cuál es el volumen de la figura generada al girar la región bajo la curva $y = \cos(x^2)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ alrededor del eje y ?

- a) π b) $\frac{3}{2}\pi$ c) 2π d) 7.23 e) 3π

Respuesta a)

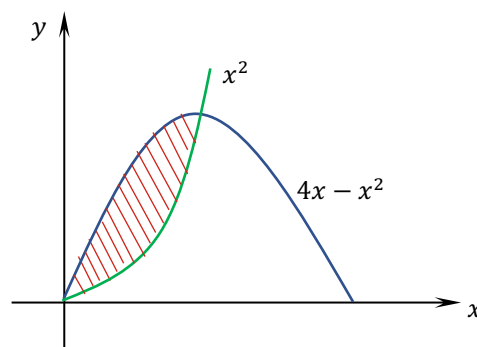
El volumen V está dado por la integral

$$V = \int_0^{\pi^2/4} 2\pi x \cos(x^2) dx$$

La integral es una integral por cambio de variables, hagamos $u = x^2$, entonces $du = 2xdx$, así

$$\int_0^{\pi^2/4} 2\pi x \cos(x^2) dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos(u) du = \pi \sin(u) \Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

51. El volumen del sólido que forma la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$ al girarlas alrededor del eje x



- a) $\frac{3}{4}\pi$ b) 1 c) $\frac{32}{6}\pi$ d) $\frac{2}{3}\pi$ e) $\frac{32}{3}\pi$

Respuesta e)

Primero encontremos los puntos de intersección, con este fin igualemos las imágenes

$$x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 2x(x - 2) = 0$$

Tiene raíces $x = 0, x = 2$ que son los puntos de intersección de las dos parábolas, así el volumen V está dado por la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4x - x^2)^2 - x^4 dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - 8x^3) dx \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{16}{3} 8 - 32 \right) = \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

52. La región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$, $x = 0$ y $x = 2\pi$ se gira alrededor del eje y . El volumen del sólido es:

a) $\pi - 1$ b) $2 + 3\pi$ c) $4\pi^2(2\pi + 1)$ d) $4\pi^2(-2\pi + 1)$ e) $\pi^2 - 1$

Respuesta c)

El volumen V está dado por la integral

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x(2 + \operatorname{sen}(x)) dx$$

Calculemos a la integral

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x(2 + \operatorname{sen}(x)) dx = 2\pi \left[\int_0^{2\pi} 2x dx + \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}(x) dx \right]$$

La última integral la realizaremos por partes, hagamos $u = x, dv = \operatorname{sen}(x)dx$, por lo tanto $du = dx, v = \cos(x)$, así

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = x \cos(x) - \int \cos(x) dx = x \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + c$$

Por lo que la integral toma la forma

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[\int_0^{2\pi} 2x dx + \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}(x) dx \right] = 2\pi [x^2 + x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)] \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi [4\pi^2 + 2\pi \cos(2\pi) - \operatorname{sen}(2\pi)] - 2\pi [0 + 0 \cos(0) - \operatorname{sen}(0)] \\ &= 2\pi [4\pi^2 + 2\pi] = 4\pi^2(2\pi + 1) \end{aligned}$$

53. El volumen del sólido que resulta al girar la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sec(x)$, $x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$, alrededor del eje x es:

a) 1 b) $\pi\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$ d) 3π e) $2\pi\sqrt{3}$

Respuesta e)

El volumen V está dado por la integral

$$V = \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec^2(x) dx = \pi \tan(x) \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi \left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = 2\pi\sqrt{3}$$

APLICACIÓN DE LAS INTEGRALES PARA CALCULAR SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.

54. El área de la superficie de revolución generada al girar la curva dada por la función $f(x) = 9x$, con $0 \leq x \leq 6$, alrededor del eje x , es:

a) $123\sqrt{8}\pi$ b) $324\pi\sqrt{82}$ c) $24\pi\sqrt{80}$ d) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{82}$ e) $\frac{3}{4}\pi\sqrt{80}$

Respuesta b)

La primera derivada de la función $f'(x) = 9 \therefore 1 + (f'(x))^2 = 1 + 81 = 82$, de esta manera el área A de la superficie está dada por la integral (por que se gira alrededor del eje x)

$$A = 2\pi \int_0^6 9x\sqrt{82} dx = 18\sqrt{82}\pi \int_0^6 x dx = 9\sqrt{82}\pi(x^2)_0^6 = 324\pi\sqrt{82}$$

55. El área de la superficie de revolución de la función $f(x) = 4 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, cuando. La gráfica se gira alrededor del eje y , es:

a) 20.12 b) 36.18 c) 42.45 d) 52.39 e) 60.32

Respuesta b)

Calculemos la primera derivada de la función $f'(x) = -2x$ así $1 + (f'(x))^2 = 1 + 4x^2$, por lo tanto, el área A , está dada por la integral

$$A = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Para calcular la integral hagamos el cambio de variable $u = 1 + 4x^2$, $du = 8x dx$, así

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{4}\pi \int_1^{17} \sqrt{u} du = \frac{1}{6}\pi(u)^{3/2} \Big|_1^{17} \\ &= \frac{1}{6}\pi[17^{3/2} - 1] \approx 36.18 \end{aligned}$$

56. El área de la superficie de revolución de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $1 \leq x \leq 3$, cuando se gira alrededor del eje y es:

a) 110.547 b) 128.96 c) 132.546 d) 145.98 e) 150.32

Respuesta b)

La derivada de la función es $f'(x) = x^2$ y $1 + (f'(x))^2 = 1 + x^4$, así el área A está dada por

$$A = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 + x^4} dx$$

Primero realicemos la integral indefinida y después la evaluaremos, hagamos el cambio $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$ y la integral toma la forma

$$\int 2x\sqrt{1+x^4} = \int \sqrt{1+u^2} du$$

Ahora hagamos el cambio $u = \tan(\phi)$, por lo tanto $\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\tan^2(\phi)} = \sec(\phi)$, por otra parte $du = \sec^2(\phi)d\phi$, entonces

$$\int 2x\sqrt{1+x^4} dx = \int \sqrt{1+u^2} du = \int \sec(\phi)\sec^2(\phi) d\phi = \int \sec^3(\phi) d\phi$$

Esta última integral ya la hemos realizado en el apartado de integración por partes, siendo su integral la siguiente:

$$\begin{aligned}\int \sec^3(\phi) d\phi &= \frac{1}{2}[\sec(\phi)\tan(\phi) + \ln|\sec(\phi) + \tan(\phi)|] + c \\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{1+u^2} u + \ln|\sqrt{1+u^2} + u|] + c \\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{1+x^4} x^2 + \ln|\sqrt{1+x^4} + x^2|] + c\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}A &= 2\pi \int_1^3 x\sqrt{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{1+x^4} x^2 + \ln|\sqrt{1+x^4} + x^2| \right]_1^3 \\ &= \frac{\pi}{2} [9\sqrt{82} + \ln(\sqrt{82} + 9) - (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))] \approx 128.96\end{aligned}$$

CÁLCULO DE PRESIONES.

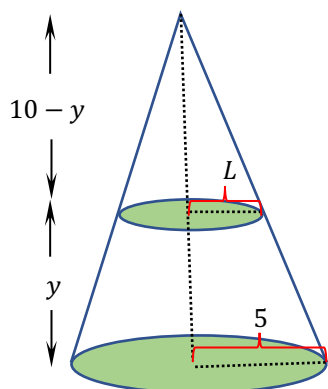
57. Un tanque cónico reposa sobre su base, que está al nivel del suelo y su eje es vertical. El tanque tiene un radio de 5 pies y una altura de 10 pies, la fuerza total que ejerce el agua sobre la superficie del cono ($\rho = 62.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie}^3}$ cúbico) es:

a) 10400 libras
c) 12450.23 libras

b) 11300 libras
e) 13230.32 libras

c) 12000 libras

Respuesta a)



Debemos calcular la longitud L , es claro que y toma los valores en el intervalo $0 \leq y \leq 10$, mediante semejanza de triángulos

$$\frac{L}{5} = \frac{10-y}{10} \Rightarrow L = \frac{5}{10}(10-y)$$

Entonces la fuerza f , está dada por

$$f = 62.4 \int_0^{10} (10-y) \frac{5}{10} (10-y) dy$$

entonces

$$f = 31.2 \int_0^{10} (100 - 20y + y^2) dy = 31.2 \left(100y - 10y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^{10}$$

$$= 31.2 \left(1000 - 1000 + \frac{1000}{3} \right) \approx 10400 \text{ libras}$$

58. Un tanque cilíndrico de 9 pies de diámetro y 5 pies de largo yace de costado. Supón que el tanque está lleno hasta la mitad con aceite que pesa 60 libras/pie³. La fuerza que ejerce el aceite sobre uno de los extremos del tanque es:

a) 1000 libras b) 2000 libras c) 2560.2 libras d) 3500.132 libras e) 3645 libras

Respuesta e)

Podemos deducir que

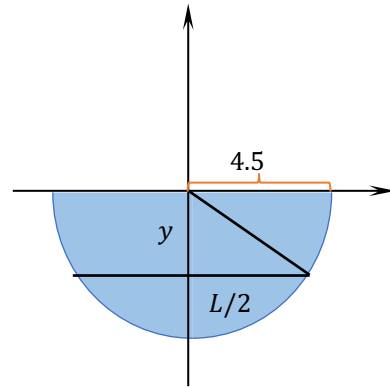
$$\frac{81}{4} = y^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow L = 81 - 4y^2$$

Ahora $-4.5 \leq y \leq 0$, por lo que la fuerza f , está dada por la integral

$$f = 60 \int_{-4.5}^0 (0 - y) \sqrt{81 - 4y^2} dy$$

Hagamos el cambio de variables $u = 81 - 4y^2 \Rightarrow du = -8y dy$, así se tiene

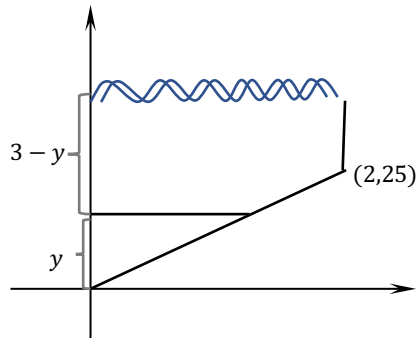
$$f = \frac{15}{2} \int_0^{81} \sqrt{u} du = 5(u^{3/2}) \Big|_0^{81} = 5\sqrt{81^3} = 3645 \text{ libras}$$



59. Una piscina rectangular tiene 12.5 metros de ancho y 25 metros de largo. La profundidad del agua aumenta uniformemente de 1 metro en un extremo a 3 metros en el otro extremo. La fuerza total que ejerce el agua sobre una cara lateral de la piscina es:

a) 60 kg b) 67 kg c) 73 kg d) 79 kg e) 82.3 kg

Respuesta d)



Con base en la figuras que representa las condiciones del problema, tenemos que la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (2,25) es

$$y = \frac{25}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{25}y$$

Esta ecuación es válida para $0 \leq y \leq 2$, para $2 < y \leq 3$, x vale 2, de esta forma, la fuerza está dada por

$$\begin{aligned} f &= 62.4 \int_0^2 (3-y) \frac{2}{25} y dy + 62.4 \int_2^3 (3-y) 2 dy \\ &= 4.992 \int_0^2 (3y - y^2) dy + 124.8 \int_2^3 (3-y) dy \\ &= 4.992 \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^2 + 124.8 \left(3y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_2^3 \\ &= 4.992 \left(6 - \frac{8}{3} \right) + 124.8 \left[\left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(6 - 2 \right) \right] \\ &= 16.64 + 62.4 = 79.04 \text{ Kg.} \end{aligned}$$

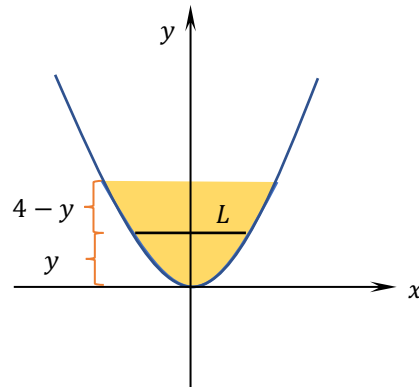
60. Los extremos de un abrevadero tienen la forma de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$ donde x e y se miden en metros. Supón que el abrevadero está lleno de agua. La fuerza sobre uno de estos extremos es:

a) 12000 b) 13000.34 c) 14230.45 d) 17066.67 e) 18000

Respuesta d)

Con base en la figura $L = 2x$ pero $y = x^2$ por lo tanto $L = 2\sqrt{y}$ ahora los valores que puede tomar la variable y están en el intervalo $[0,4]$, en este caso $\rho = 1000$, así se tiene que la fuerza está dada por

$$\begin{aligned} f &= 1000 \int_0^4 (4-y) 2\sqrt{y} dy \\ &= 2000 \int_0^4 (4y^{1/2} - y^{3/2}) dy \\ &= 2000 \left(\frac{8}{3} y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Big|_0^4 = 2000 \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right) \\ &= \frac{2000(2)(64)}{15} \approx 17066.67 \end{aligned}$$

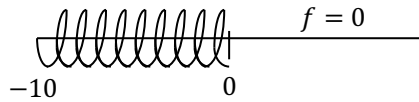


APLICACIONES AL TRABAJO.

61. Suponga que un resorte tiene una longitud natural de 10 cm. y que se necesita una fuerza de 5 dinas para tenerlo comprimido a una longitud de 5 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud total de 20 cm?

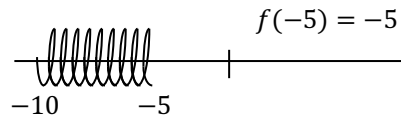
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 1 e) $\frac{5}{4}$

Respuesta b)



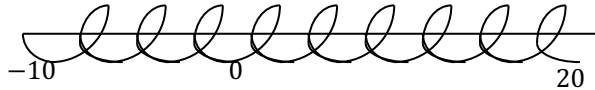
Observa que $f(-5) = 5 = k(-5) = -5$,
por lo tanto $k = 1$, así la fuerza está dada por

$$f(x) = x$$



El trabajo por

$$W = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$



62. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un satélite de 500 Kg de manera vertical desde la superficie de la Tierra hasta una órbita 1 600 Km sobre la superficie?

a) 250 000 b) 300 000 c) 450 000 d) 500 000 e) 600 000

Respuesta e)

Sabemos que $f = 500 \text{ Kg}$ cuando $r = R = 6370 \text{ Km}$, por lo tanto

$$f(r) = \frac{k}{(6370)^2} = 500 \Rightarrow k = 500(6370)^2 \approx 2(10)^{10}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} W &= \int_{6370}^{7970} \frac{k}{r^2} \, dr = \left(-\frac{k}{r} \right) \Big|_{6370}^{7970} = -k \left(\frac{1}{6370} - \frac{1}{7970} \right) = \frac{16k}{507689} \approx k(3)(10)^{10} \\ &\approx 6(10)^5 = 600\,000 \text{ Km} - \text{Kg} \end{aligned}$$

63. Un módulo espacial pesa 15 toneladas en la superficie terrestre, ¿cuánto trabajo requiere el elevarlo a una altura de 800 millas?

a) 9000 b) 10 000 c) 10 500 d) 11 000 e) 11 500

Respuesta b)

Por la ley de la gravitación de Newton tenemos

$$15 = \frac{k}{(4000)^2} \Rightarrow k = 240\,000\,000$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} W &= \int_{4000}^{4800} \frac{k}{r^2} \, dr = \left(-\frac{k}{r} \right) \Big|_{4000}^{4800} = -k \left(\frac{1}{4800} - \frac{1}{4000} \right) = \frac{k}{24\,000} \\ &= \frac{240\,000}{24} = 10\,000 \text{ millas} - \text{ton} \end{aligned}$$

UNIDAD 4.

MODELOS Y PREDICCIÓN.

PROPÓSITOS GENERALES.

- Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.

Una forma de explicar el crecimiento de la población es a través de la ecuación logística, en 1798 Thomas Malthus propone el modelo de la población de la forma “la población crece directamente proporcional a población presente”, en símbolos si $P(t)$ es la población en el tiempo t , entonces

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

En donde k es una constante, llamada constante de proporcionalidad. La solución de este modelo no es muy adecuada a largo plazo ya que entonces la población crecería exponencialmente e indefinidamente, por esta razón se buscó y encontró otro modelo que fuera más acorde a la experiencia cotidiana.

Un modelo más completo está basado en que la población crece según la razón de cambio de crecimiento menos la razón de cambio de la mortalidad. Fue Pierre Francois Verhulst alrededor del año 1838 quien concibió el modelo

$$\frac{dP(t)}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{N} \right) P$$

En donde N es la capacidad de soporte, k velocidad de crecimiento

Llamado modelo logístico, siendo un mejor modelo, para el crecimiento de poblaciones, al de Thomas Malthus llamado modelo exponencial, sin embargo, el modelo exponencial sirve para explicar varios fenómenos de la naturaleza, que se verán más adelante.

- **Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como:**

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

El modelo de Thomas Malthus, el modelo exponencial, funciona muy bien en una variedad de casos, mostraremos algunos de ellos.

Crecimiento de poblaciones.

Supongamos que $P(t)$ es el número de individuos en el tiempo t , (pueden ser bacterias, insectos, ...) que tienen índices de crecimiento y mortalidad constantes digamos α y β , por unidad de tiempo Δt , entonces en esta unidad de tiempo ocurren aproximadamente $\alpha P(t)\Delta t$ nacimientos y $\beta P(t)\Delta t$ fallecimientos, por lo que el cambio de $P(t)$ está dado aproximadamente por

$$\Delta P(t) = (\alpha - \beta)P(t)\Delta t$$

En consecuencia

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$

En donde $k = (\alpha - \beta)$.

Interés compuesto.

También encontramos que sirve de modelo en el cálculo de los intereses cuando se ahorra una cantidad $A(t)$ (t en años) a una tasa fija r y el interés es continuamente compuesto. Interés compuesto significa que, durante un pequeño intervalo de tiempo $\Delta A = rA(t)$, por lo cual

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Desintegración radiactiva.

En este caso suponemos que una sustancia radiactiva tiene $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo en el tiempo t . Se ha observado que una fracción de estos átomos se desintegra en cada cierto lapso de tiempo. De esta manera el número de átomos se comporta como una población, con un índice constante de mortalidad, claramente no ocurren nacimientos. La ecuación que modela a $N(t)$ es la misma que

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = kN$$

En donde $k = (\alpha - \beta)$, pero $\beta > 0$ y $\alpha = 0$, por lo que se obtiene

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N$$

El valor de β depende del isótopo en particular.

Eliminación de medicamentos.

Un medicamento es eliminado una vez ingerido, principalmente por los riñones, la dosificación del fármaco depende sobre todo de la función renal, supongamos que $A(t)$ es la cantidad de cierto medicamento en la sangre, medida por el exceso sobre su nivel natural, disminuirá de manera proporcional a la cantidad excedente actual, es decir

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A$$

En la que $\lambda > 0$. El parámetro λ se llama *constante de eliminación* del medicamento.

- **Método de separación de variables.**

Primero definiremos lo que es una ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación para una función desconocida en términos de su derivada.

Los ejemplos dados en la sección anterior, también son ejemplos de ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que aparece sólo la primera derivada de la función.

En el caso del interés compuesto, la ecuación diferencial es:

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

En donde la “incógnita” es la función A . La solución es una función que cumpla con la ecuación.

En general una ecuación diferencial de primer orden es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y)$$

en donde la ecuación se llama *separable* si $H(x, y)$ se puede escribir como el producto de dos funciones, una en función en la variable x , la segunda en función de la variable y , por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = 8x^2y$$

Es separable, porque la función H es el producto de dos funciones una depende de x , y la otra de y .

Este tipo de ecuaciones se llaman *separables*, porque se pueden separar, es decir, en un miembro sólo aparece la variable x y en el otro la variable y , en el ejemplo anterior

$$\frac{dy}{dx} = 8x^2y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 8x^2 dx$$

en el lado izquierdo sólo aparece la variable x , en el lado derecho aparece sólo la variable y .

Debemos hacer dos observaciones, primero estas ecuaciones son las más sencillas de resolver, pero la facilidad depende de la naturaleza de las funciones, segundo la diferencial de la variable x , pareciera que pasó multiplicando, esto no es cierto, pero la equivalencia es verdadera, es decir

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y) \Rightarrow dy = H(x, y)dx$$

es verdadero, pero decir dx está dividiendo pasa multiplicando es falso.

Ejemplo.

Resuelve el problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \quad y(0) = 7$$

Solución. Primero separemos las variables

$$\frac{dy}{y} = -6x dx$$

Ahora integremos cada miembro

$$\int \frac{dy}{y} = -6 \int x dx$$

$$\ln|y| = -3x^2 + c$$

Para encontrar el valor de la constante c , empleamos la condición (*llamada condición inicial*) como $y(0) = 7$, podemos deducir y que cerca de cero es positiva por lo que $\ln|y| = \ln y$, entonces

$$\ln y = -3x^2 + c \Rightarrow y = e^{-3x^2+c} = Ae^{-3x^2}$$

en donde $A = e^c$ (sigue siendo una constante), ahora

$$y(0) = Ae^{-3(0)^2} = Ae^0 = A = 7$$

por lo que la solución particular es:

$$y(x) = 7e^{-3x^2}$$

Ejemplo.

Encuentra una curva que pase por el punto $(0, -6)$, de tal forma que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto más 7 unidades.

Solución. Sabemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función, llamemos por y a la función que estamos buscando, por las condiciones del problema, podemos construir la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y + 7$$

para resolver la ecuación, separemos las variables.

$$\frac{dy}{y+7} = dx$$

e integramos cada miembro.

$$\int \frac{dy}{y+7} = \int dx$$

$$\ln|y+7| = x + c$$

como pasa por el punto $(0, -6)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\ln|-6+7| &= 0 + c \\ \ln|1| &= 0 = c\end{aligned}$$

La solución particular es:

$$\ln|y+7| = x \Rightarrow y+7 = e^x \Rightarrow y = e^x - 7$$

- **Condiciones iniciales aplicadas al modelo.**

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Hemos dado varios ejemplos en donde se utiliza el modelo

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

primero resolveremos esta ecuación y después daremos ejemplos en donde se utiliza este modelo.

Iniciamos separando las variables.

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = k$$

integraremos ambos lados

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int k dt$$

$$\ln|P(t)| = kt + c$$

despejamos $P(t)$

$$P(t) = e^{kt+c} = e^{kt}e^c = P_0 e^{kt}$$

en donde $P_0 = e^c$

Ejemplo.

Usted deposita \$5000.00 pesos en una cuenta de inversión con una tasa de interés del 5% compuesto continuamente, ¿cuánto dinero tendrá a los 10 años?

Solución. Como vimos en nuestra primera sección la ecuación diferencial, si $A(t)$ denota la cantidad de dinero en la cuenta al tiempo t , será

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A$$

Cuya solución es:

$$A(t) = A_0 e^{0.05t} = 5000 e^{0.05t}$$

Dentro de 10 años tendrá

$$A(10) = 5000 e^{0.05(10)} = 5000 e^{0.5} \approx 8249.6$$

Ejemplo.

El material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 40 mg de material y al cabo de una hora se observa que ha perdido 8% de la cantidad inicial, encuentra:

3. La cantidad de masa en cualquier momento t .
4. La masa del material al cabo de 3 horas.
5. El tiempo que transcurre hasta la desintegración de la mitad de la cantidad inicial.

Solución. 1. Por las condiciones del problema se tiene la ecuación.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

cuya solución como hemos visto es:

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 40 e^{kt}$$

ahora para $t = 1, y = 40 - 0.08(40) = 40 - 3.2 = 36.8$, se cumple

$$36.8 = 40 e^{k(1)} = 40 e^k$$

$$k = \ln\left(\frac{36.8}{40}\right) \approx -0.0834$$

así

$$y(t) = 40 e^{-0.0834t}$$

2. para $t = 3$, se cumple

$$y(3) = 40e^{-0.0834(3)} \approx 31.15 \text{ mg}$$

3. Inicialmente tenemos 40 mg, la mitad es 20 mg por lo que debemos resolver

$$\begin{aligned} 40e^{-0.0834t} &= 20 \\ e^{-0.0834t} &= \frac{1}{2} \Rightarrow -0.0834t = \ln(0.5) \approx -0.6931 \\ t &= \frac{0.6931}{0.0834} = 8.31 \text{ h} \end{aligned}$$

Ejemplo.

En 1987 la población mundial era de 4.5 miles de millones de habitantes y después creció a razón de 380 mil personas al día. Suponiendo que son constantes los índices de natalidad y mortalidad, ¿para cuándo se puede esperar una población mundial de 10 mil millones?

Solución. Sabemos que la población P , está dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

como en $t = 0$, la población es de 4.5 miles de millones, la población la podemos escribir como:

$$P(t) = 4.5e^{kt}$$

el hecho de que la población este aumentando 380 mil personas al día, es equivalente a 0.00038 mil millones personas diarias en el momento en que $t = 0$, es decir

$$P'(0) = (0.00038)(365.25) \approx 0.1388$$

miles de millones al año. A partir de la ecuación

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

se tendrá

$$\frac{dP(0)}{dt} = kP(0) \Rightarrow 0.1388 = kP(0) \Rightarrow k = \frac{0.1388}{4.5} \approx 0.03$$

la población creció a razón de 3% en 1987. Ahora para saber en cuánto tiempo habrá 10 mil millones resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned} 4.5e^{0.03t} &= 10 \\ e^{0.03t} &= \frac{10}{4.5} \approx 2.22 \\ 0.03t &= \ln(2.22) \approx 0.798 \end{aligned}$$

Ejemplo.

El ácido Valproic es un medicamento que se emplea para controlar la epilepsia, su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas.

- Utiliza la vida media para encontrar la constante k de la ecuación diferencial $\frac{dQ}{dt} = -kQ$.
- ¿A qué hora quedará 10% de la dosis original?

Solución.

- Como sabemos la solución de la ecuación es $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$, en 15 horas habrá la mitad de medicamento por lo que se tiene

$$0.5Q_0 = Q_0 e^{-15k}$$

$$0.5 = e^{-15k}$$

$$-15k = \ln(0.5) \approx -0.6931$$

$$k = \frac{0.6931}{15} \approx 0.0462$$

- b) Para encontrar el tiempo cuando haya 10% de la dosis original, sustituimos $0.1Q_0$ por la cantidad restante, Q y despejamos el tiempo t

$$0.1Q_0 = Q_0 e^{-0.0462t}$$

$$0.1 = e^{-0.0462t}$$

$$-0.0462t = \ln(0.1) \approx -2.3026$$

$$t = \frac{2.3026}{0.0462} \approx 49.84 \text{ h}$$

Habrá un 10% del medicamento en el cuerpo después de casi 50 horas.

Ejemplo.

Suponga que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población, emplea los datos de la tabla siguiente para modelar la población del mundo en el siglo XX  Cu l es la tasa relativa de crecimiento?

Solución. Analizando la tabla, elegimos $t = 0$ para el año 1900, de esta manera la población $P(t)$ esta dada en millones de personas y $P(0) = 1650$.

año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	1996
Población millones	1650	1750	1860	2070	2300	2520	3020	3700	4450	5300	5770

Como suponemos que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población, tenemos el problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad P(0) = 1650$$

Como hemos visto la solución es:

$$P(t) = 1650e^{kt}$$

Para calcular el valor de k , elegimos cualquier valor de la población, por ejemplo en $t = 10$, la población era de 1750 millones

$$P(10) = 1650e^{10k} = 1750$$

$$e^{10k} = \frac{1750}{1650} \approx 1.06$$

$$10k = \ln(1.06) \approx 0.0583$$

$$k = 0.00583$$

La tasa relativa de crecimiento es alrededor de 6%.

UNIDAD 4.

MODELOS Y PREDICCIÓN.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

Unidad 4. MODELOS Y PREDICCIÓN.		12 horas		
Propósito: Al finalizar la unidad el alumno:				
Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.				
Tema	Aprendizaje	Niveles Cognitivos		
		1	2	3
Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$	Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$	1, 2	3, 4	5
Modelo de separación de variables.	Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos.			6, 7, 8, 9
Condiciones iniciales aplicadas al modelo $P(t) = Ce^{kt}$	Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de C. Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación dada y llega a un modelo del tipo $p(t) = P_0e^{kt}$ Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t) = P_0e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.		10, 11, 12, 13, 14, 15	17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

	• Reconoce la importancia del. Modelo $p(t) = P_0 e^{kt}$			
--	--	--	--	--

ESTUDIO DE LA ECUACIÓN

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

POR MÉTODOS NUMÉRICOS.

Esta ecuación diferencial se emplea como modelo de varias situaciones en las cuales la rapidez de cambio de una función es proporcional a sí misma, por ejemplo en intereses continuo, crecimiento de poblaciones, decaimiento radioactivo, entre otras, es un modelo de ecuaciones diferenciales que se le pueden ir añadiendo condiciones y así tener una ecuación más completa, una ecuación que representa mejor al fenómeno que se está estudiando.

Estudio de la ecuación, encontrando su solución sin emplear los métodos de las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dF}{dt} = kF$$

Esta ecuación diferencial fue estudiada por primera vez por Robert Malthus en 1798 en un ensayo sobre *El principio de la Población* y se basó principalmente en las estadísticas de las que disponía en esa época. La conclusión a la que llega Malthus es que la población crece de manera geométrica, mientras que los alimentos los hacen de forma aritmética y que obviamente esta forma de crecimiento nos llevará al colapso.

Hipótesis de Malthus: la población crece de manera constante, es decir si una población tiene 100000 habitantes y crece a un 2%, es decir, al cabo de un año habrá 102000 habitantes, entonces en 10 años tendrá 121900 habitantes.

Malthus denota por $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ al número de individuos en una población, en los tiempos $t_0, t_1, \dots, t_n$ respectivamente, denota por h a la diferencia $t_{i+1} - t_i$, que claramente es el tiempo que transcurre entre dos mediciones, además utiliza las letras b y d para las respectivas tasas de natalidad y mortandad, así la tasa de crecimiento es $c = b - d$.

En notación matemática se tiene la relación siguiente:

$$\frac{P_{i+1} - P_i}{h} = cP_i$$

despejando P_{i+1} , tendremos

$$P_{i+1} = chP_i + P_i = (1 + ch)P_i$$

para todo i , esta forma de presentar a la sucesión P_i , se llama forma recursiva y nos da pauta a tener todos los elementos P_i , en este caso de la población, de la forma siguiente (recuerda la actividad que se hizo en la unidad 1, para el modelo exponencial);

hacemos $i = 0$, de la última igualdad, y vamos incrementando en uno el valor de i .

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 + hc)P_0 \\ P_2 &= (1 + hc)P_1 = (1 + hc)(1 + hc)P_0 = (1 + hc)^2 P_0 \\ P_3 &= (1 + hc)P_2 = (1 + hc)(1 + hc)^2 P_0 = (1 + hc)^3 P_0 \end{aligned}$$

Es claro que

$$P_n = (1 + hc)^n P_0$$

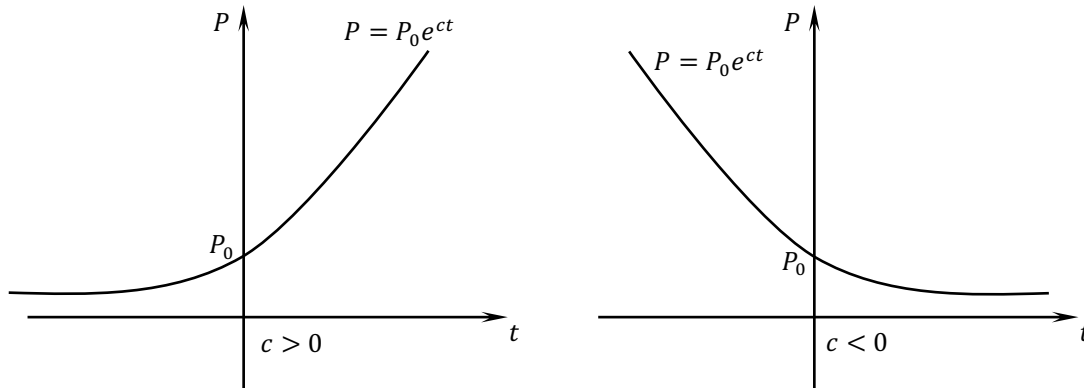
recordemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + hc)^n = e^{ct}$$

con lo cual se obtiene el modelo continuo de Malthus, al tender n al infinito.

$$P(t) = P_0 e^{ct}$$

Recordemos las gráficas de las funciones exponenciales.



Cuando t crece y $c > 0$, la población crece al infinito, si $c < 0$, entonces la población tiende a cero, es decir, nos extinguiremos. Esta conclusión fue la conclusión de Malthus.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN EMPLEANDO MÉTODOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Estudio de la ecuación, encontrando su solución empleando los métodos de las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dF}{dt} = kF$$

Supongamos que existe una población P en donde no hay emigración ni inmigración. La rapidez con la que crece la población es proporcional al tamaño de la población. Si la población tiene una tasa de crecimiento del 2% continuo, entonces describe cómo crece la población en el transcurso de los años.

Solución:

Observa que

Tasa de crecimiento de la población = 2% de la población actual.

En símbolos

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

esta ecuación diferencial, es de variables separables, es decir, se puede escribir de un lado una variable y del otro lado la otra variable, en este caso, escribiremos del lado izquierdo la variable dependiente P y del lado derecho a la variable independiente t .

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = 0.02dt$$

(enfaticamos que la diferencial de t (dt), no pasó multiplicando del lado derecho, la doble implicación es cierta, pero no por ese motivo)

Ahora integrando ambos lados

$$\int \frac{dP}{P} dt = \int 0.02 dt \Leftrightarrow \ln|P| = 0.02t + c$$

$$P(t) = e^{0.02t+c} = e^c e^{0.02t} = C e^{0.02t}$$

donde $C = e^c$, para encontrar este valor de C , evaluemos la función en $t = 0$,

$$P(0) = C e^{0.02(0)} = C$$

por lo general, se denota a $P(0) = P_0$ y se llama población inicial (en general condición inicial), de esta manera la solución de la ecuación diferencial es:

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

como el exponente es $0.02t$ es positivo, la función exponencial crece indeterminadamente, es decir, en algún momento no habrá espacio para los miembros de esta población.

Propongamos una solución al modelo planteado.

Ejemplo: Supongamos que una cantidad P_0 se deposita en una cuenta de ahorros en donde el interés es compuesto de forma continua al 3.5% por año. Es decir, el saldo P crece a la tasa dada por

$$\frac{dP}{dt} = 0.035P$$

- Encuentra la función que satisface a la ecuación. Relacionar con P_0 y 0.035.
- Suponte que inviertes inicialmente \$100.00 pesos. ¿Cuál es el saldo después de un año?
- ¿Después de qué tiempo se duplicará la cifra de \$100?

Solución:

- suponemos que no sabemos resolver ecuaciones de este tipo, pero en un primer momento se observa que 0.035 es una constante y las constantes en derivadas o integrales, se pueden manejar "arbitrariamente", así que observamos la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P$$

¡una función que al derivarla es ella misma!, recordamos la primera unidad de este curso, donde aprendimos que la función exponencial tiene esta propiedad, así que, en un primer momento, sabemos que la función P que estamos buscando es una función exponencial, proponemos

$$P(t) = e^t$$

ahora sólo debemos adecuarla para obtener la constante 0.035, recordando al regla de la cadena, la función buscada es

$$P(t) = e^{0.035t}$$

pero la función en general debe ser del tipo

$$P(t) = k e^{0.035t}$$

para encontrar el valor de k evaluamos la función en $t = 0$, así obtenemos

$$P(0) = ke^{0.035(0)} = k$$

a $P(0)$ se le conoce con el nombre de condición inicial, que en este caso es P_0 , la solución particular es:

$$P(t) = P_0 e^{0.035t}$$

b) En este caso particular, tenemos

$$P(t) = 100e^{0.035t}$$

después de un año, se tendrá

$$P(1) = 100e^{0.035(1)} \approx 103.56$$

c) Queremos encontrar el valor de t en la cual

$$\begin{aligned} 100e^{0.035t} &= 200 \\ e^{0.035t} &= 2 \\ 0.035t &= \ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{0.035} \approx 19.8 \end{aligned}$$

Para duplicar la inversión inicial debe transcurrir alrededor de 20 años.

Como se ha visto el modelo de Malthus sobre el crecimiento de poblaciones estaba (y sigue estando) mal, por no considerar algunas variables importante en el crecimiento de poblaciones, antes de continuar haciendo más exacto este modelo, se sugiere que el alumno realice algunas actividades acerca de este modelo.

En general cuando se quiere modelar un “crecimiento natural” de, por ejemplo, una población con una cantidad $P(t)$ de personas o animales (bacterias, moléculas, dinero u otra entidad) en el instante t , y esta población crece directamente proporcional a la cantidad presente, esta población satisface la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

En donde P es la población a determinar y k es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación, es una ecuación llamada de variables separables, así se tiene

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = k dt$$

Integrando en ambos lados, se obtiene

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

Así

$$\ln|P| = kt + c \Rightarrow P = e^{kt+c} = e^c e^{kt} = P_0 e^{kt}$$

En donde $e^c = P_0$ se conoce como condición inicial, de esta forma, la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP \text{ tiene como solución } P(t) = P_0 e^{kt}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

SOBRE POBLACIONES.

1. La población en una ciudad tiende a crecer a una tasa proporcional al tamaño de la población. Así podemos representar el tamaño de la población mediante el modelo exponencial. $P(t) = 180e^{0.013t}$, donde t es el número de años desde 1960 y $P(t)$ es la población en millones. ¿Cuál será la población en esa ciudad en el año 2005?

a) 300 b) 323 c) 350 d) 390 e) 410.2

Respuesta b)

El año inicial es 1960, para el año 2005 han transcurrido 45 años, evaluamos $P(t)$ con $t = 45$, así obtenemos el resultado

$$P(45) = 180e^{0.013(45)} = 180e^{0.585} \approx 323.09$$

2. La tasa de crecimiento natural de una población de cierta ciudad es proporcional a la población misma. Si ésta se incrementa de 40 000 a 60 000 habitantes en 40 años, ¿cuánto llegará a ser de 80 000 habitantes?

a) 68.63 b) 70.34 c) 75.42 d) 79.99 e) 81.21

Respuesta a)

Nos preguntan el tiempo en qué la población crecerá a 80 000 habitantes. El modelo matemático es del tipo $P(t) = P_0 e^{kt}$. Inicialmente había 40 000 habitantes y en 40 años aumenta a 60 000, esto quiere decir que

$$P(t) = 40\,000e^{kt} \text{ y } P(40) = 40\,000e^{40k} = 60\,000 \Rightarrow e^{40k} = \frac{60\,000}{40\,000} = \frac{3}{2}$$

$$40k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{40} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0101$$

Nuestro modelo toma la forma
ahora de

$$P(t) = 40\,000e^{0.0101t} = 80\,000 \Rightarrow e^{0.0101t} = 2 \Rightarrow 0.0101t = \ln(2) \\ t = \frac{\ln(2)}{0.0101} \approx 68.63 \text{ años}$$

3. Un cultivo de bacterias crece con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si hay 1 000 bacterias inicialmente, y la cantidad se duplica en 1 hora, ¿cuántas bacterias habrá en $3\frac{1}{2}$ horas?

a) 10 000 b) 10 525 c) 11 200 d) 11 312 e) 12 425

Respuesta d)

La condición inicial nos indica que nuestro modelo es del tipo

$$P(t) = 1\,000e^{kt}$$

en $t = 1$, se duplica la población, entonces

$$P(t) = 1\,000e^k = 2\,000 \Rightarrow e^k = 2 \Rightarrow k = \ln(2) \approx 0.6931$$

de esta manera nuestro modelo toma la forma

$$P(t) = 1\,000e^{0.6931t}$$

ahora, sólo tenemos que evaluar a la función anterior en $t = 3.5$

$$P(3.5) = 1\,000e^{0.6931(3.5)} = 1\,000e^{2.42585} \approx 11\,311.84$$

habrá aproximadamente 11 312 bacterias.

4. Una cierta clase de pájaros está en peligro de extinción. Se estima que únicamente 900 de esas criaturas viven todavía. Hace cinco años se estimaba que la población era de 1 200. Los expertos aseguran que una vez que la población descienda a 200, la situación de los pájaros será irreversible. ¿En cuántos años pasará esto?

a) 2 b) 15 c) 20.3 d) 25.34 e) 26.16

Respuesta e)

Como hay 900 pájaros al inicio del estudio, nuestro modelo es de la forma $P(t) = 900e^{kt}$ como hace 5 años había 1 200 de estos pájaros, entonces

$$P(-5) = 900e^{-5k} = 1\,200 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{1\,200}{900} = \frac{4}{3} \Rightarrow -5k = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Por lo tanto

$$k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.0575$$

Los pájaros no tienen salvación cuando haya 200, esto quiere decir que

$$900e^{-0.0575t} = 200 \Rightarrow e^{-0.0575t} = \frac{200}{900} = \frac{2}{9}$$
$$-0.0575t = \ln\left(\frac{2}{9}\right) \Rightarrow t = -\frac{1}{0.0575}\ln\left(\frac{2}{9}\right) \approx 26.16 \text{ años}$$

5. Un cierto cultivo donde la tasa de crecimiento bacterias es proporcional a la cantidad presente, el número se triplica en 3 horas. Si después de 12 horas hay 10 millones de bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

a) 1000 b) 10000 c) 100 000 d) 123457 e) 234567

Respuesta d)

Sabemos que la población de bacterias se comporta según la función $P(t) = P_0e^{kt}$ además que $P(3) = P_0e^{3k} = 3P_0$ de aquí $e^{3k} = 3$. Se nos dice que después de 12 horas hay 10 millones de bacterias y nos preguntan por la población inicial, esto se traduce en

$$P(12) = P_0 e^{12k} = P_0 (e^{3k})^4 = P_0 (3)^4 = 81P_0 = 10\,000\,000$$

Por lo tanto

$$P_0 = \frac{10\,000\,000}{81} = 123456.7901$$

La población inicial es aproximadamente de 123457 bacterias

6. Una ciudad tenía una población de 25 000 habitantes en 1970 y una población de habitantes de 30 000 en 1980. Suponte que su población continúa creciendo de manera exponencial con una razón constante ¿Qué población esperan los planificadores de esta ciudad en el año de 2010?

a) 51840 b) 52673 c) 61023 d) 68734 e) 70123

Respuesta a)

Tomemos $t = 0$ para el año de 1970, nuestro modelo es de la forma $P(t) = 25\,000e^{kt}$, ahora para el año 1980 (han pasado 10 años, es decir $t = 10$) había 30 000 habitantes, en símbolos

$$P(10) = 25\,000e^{10k} = 30\,000 \Rightarrow e^{10k} = \frac{30\,000}{25\,000} = \frac{6}{5}$$

Para el año 2010, habrán transcurrido 40 años, así calculamos a la población para $t = 40$.

$$P(40) = 25\,000e^{40k} = 25\,000(e^{10k})^4 = 25\,000\left(\frac{6}{5}\right)^4 = 51840$$

Así los planificadores esperan 51840 habitantes

7. Una ciudad tiene una población fija de 10 000 personas. El 1° de enero, 1 000 enferman de gripe; el primero de abril, 2 000 personas están enfermas. Suponte que la tasa de crecimiento del número $P(t)$ de personas enfermas de gripe es proporcional al número de personas que no lo están ¿Cuántas personas están enfermas el primero de octubre?

a) 2100 b) 3296 c) 3567 d) 4324 e) 4673

Respuesta b)

Supongamos que el tiempo t transcurre en meses y para el 1° de enero hacemos $t = 0$, nuestro modelo toma la forma

$$P(t) = 10\,000 - 9\,000e^{kt}$$

Ya que la tasa de crecimiento del número de personas enfermas de gripe es proporcional al número de personas que no lo están. Así, para el 1° de abril han transcurrido 4 meses, es decir $t = 4$, por lo cual

$$P(4) = 10\,000 - 9\,000e^{4k} = 2\,000 \Rightarrow e^{4k} = \frac{8\,000}{9\,000} = \frac{8}{9}$$

Ahora, para calcular el número de infectados el 1° de octubre ($t = 10$), realizamos las operaciones siguientes:

$$P(10) = 10\,000 - 9\,000e^{10k} = 10\,000 - 9\,000(e^{4k})^{10/4}$$

$$= 10\,000 - 9\,000 \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 3295.58.$$

Habrá aproximadamente 3296 personas con gripe.

8. Una población de bacterias crece a una razón proporcional a su magnitud. Al inicio era de 10 000 y después de 10 días de 24 000. ¿cuál será la población después de 25 días?

a) 15000 b) 16000 c) 50000 d) 83456 e) 89234

Respuesta e)

En nuestro modelo $P(t) = 10\,000e^{kt}$ con el tiempo t en días, nos indica el problema que después de 10 días la población era de 24 000, en símbolos

$$P(10) = 10\,000e^{10k} = 24\,000 \Rightarrow e^{10k} = \frac{24\,000}{10\,000} = 2.4$$

la población en 25 días será

$$P(25) = 10\,000e^{25k} = 10\,000(e^{10k})^{25/10} = 10\,000(2.4)^{5/2} \approx 89234$$

Concluimos que en 25 días habrá aproximadamente 89 234 bacterias.

9. La población de cierto país crece al 3.2% anual; es decir, si al comenzar un año su población es de A individuos, al final del año será de $1.032A$. Suponiendo que ahora es de 4.5 millones de habitantes, ¿cuál será el número de habitantes al finalizar el 2° año?

a) 4 milloes b) 4.797 millones c) 4.987 millones
d) 5.012 millones e) 5.234 millones

Respuesta b)

Con los datos proporcionados, se tiene

$$P(t) = 4.5e^{0.032t}$$

En donde t está dado en años, al finalizar el 2° año habrá

$$P(2) = 4.5e^{0.032(2)} = 4.5e^{0.064} \approx 4.797 \text{ millones de habitantes}$$

PROBLEMAS DE DECAIMIENTO RADIOACTIVO.

Cuando se trata de elementos radioactivos, se considera una muestra de material que contiene un número digamos $N(t)$, de átomos de cierto isótopo radioactivo. En muchos experimentos se ha observado que una fracción constante de estos átomos radioactivos decaen de manera espontánea en cada intervalo de tiempo, es decir la muestra se comporta como una población en donde sólo hay mortandad sin nacimientos, un modelo para $N(t)$ es:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

Esta ecuación diferencial, se resuelve de la manera típica

$$\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = -k dt$$

Con $k > 0$, Integrando ambos lados

$$\ln(N) = -kt + c$$

Por lo tanto

$$N(t) = e^{-kt+c} = N_0 e^{-kt}$$

En donde $N_0 = e^c = N(0)$, es el número de átomos radioactivos del isótopo original presentes en la muestra en el tiempo $t = 0$.

La constante k llamada *constante de decaimiento* depende del isótopo particular en cuestión, esta constante está relacionada con otro parámetro llamado la **vida media** τ de una muestra de un isótopo radioactivo es el tiempo necesario para que la mitad de esa muestra decaiga. La relación entre k y τ se puede determinar mediante la relación siguiente:

Para $t = \tau$, se tiene

$$N(\tau) = N_0 e^{-k\tau} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-k\tau} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$-k\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tau = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{k}$$

Podemos hacer la observación que el valor de τ sólo depende de k y por lo tanto sólo depende del isótopo radiactivo en cuestión. No depende de la cantidad de isótopo presente.

Ejemplo.

Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene 63% de $C - 14$ con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra?

Solución.

Primero, consideremos que $\tau = 0$ (en años) como el instante de la muerte del árbol de donde se hizo el carbón, entonces se tiene

$$k = \frac{\ln(2)}{\tau}$$

Como la vida media del $C - 14$ es de 5750 años, entonces

$$k = \frac{\ln(2)}{\tau} = \frac{\ln(2)}{5750} \approx 0.0001205$$

Además $N = 0.63N_0$ en el momento actual, así tenemos la ecuación a resolver

$$0.63N_0 = N_0 e^{-0.0001205t} \Rightarrow -0.0001205t = \ln(0.63)$$

Así

$$t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001205} \approx 3834.31 \text{ años}$$

En consecuencia, la muestra de carbón tiene una antigüedad aproximada de 3834 años.

10. Suponte que había 150 g de carbono - 14 en un organismo cuando éste estaba vivo, hace aproximadamente 10 000 años. ¿Cuánto carbono - 14 queda actualmente, si se sabe que su semivida es de 5750 años?

a) 30 gramos b) 35 gramos c) 40 gramos d) 45 gramos e) 50 gramos

Respuesta d)

Sabemos que $\tau = 5750$, entonces $k = \frac{\ln(2)}{5750} \approx 0.0001205$, en natural suponer que el tiempo inicial $t = 0$, hace 10 000 años, así nuestro modelo es de la forma

$$N(t) = 150e^{0.0001205t}$$

Actualmente queda

$$N(10\,000) = 150e^{-0.0001205(10\,000)} \approx 44.954 \text{ gramos}$$

Aproximadamente 45 gramos.

11. Suponte que había 20 gramos de carbono - 14 en un organismo que sobrevivió hace 2 500 años. ¿Cuántos gramos de carbono - 14 había en el organismo cuando estaba vivo?

a) 10 b) 12 c) 13.34 d) 14.1 e) 14.8

Respuesta e)

Nos preguntan por la cantidad que había cuando el organismo estaba vivo, sabemos que

$$N(t) = N_0e^{0.0001205t}$$

Quedan 20 gramos después de 2500 años, en símbolos

$$N(2500) = N_0e^{0.0001205(2500)} = N_0e^{0.30125} = 20 \Rightarrow N_0 = 20e^{-0.30125} \approx 14.7979$$

Había aproximadamente 14.8 gramos.

12. Suponte que sabemos que había 180 gramos de carbono - 14 en un organismo cuando estaba vivo, y únicamente quedan 25 gramos actualmente. ¿Hace cuánto tiempo vivió el organismo?

a) 16100 b) 16 382 c) 17432 d) 17893 e) 18000

Respuesta b)

En este problema nos preguntan por el tiempo t , con 180 gramos de Carbono 14 ($C - 14$) al inicio, de esta manera el modelo es de la forma

$$N(t) = 180e^{-0.0001205t}$$

Como quedan 25 gramos de $C - 14$, entonces

$$180e^{-0.0001205t} = 25 \Rightarrow e^{-0.0001205t} = \frac{25}{180} = 0.13889$$

Por lo que

$$-0.0001205t = \ln(0.13889) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.13889)}{0.0001205} \approx 16\,382.35$$

El tiempo es de 16 382 años.

13. Si 86.2 gramos de carbono - 14 estaban presentes en un organismo cuando éste estaba vivo, y actualmente quedan presentes 38.7 gramos ¿Hace cuánto tiempo vivió el organismo?

a) 4000 b) 5000 c) 6600 d) 6630 e) 6645

Respuesta e)

Nuestro modelo es de la forma

$$N(t) = 86.2e^{-0.0001205t}$$

Hay 38.7 gramos actualmente, entonces

$$86.2e^{-0.0001205t} = 38.7 \Rightarrow e^{-0.0001205t} = \frac{38.7}{86.2} = 0.449$$

Por lo tanto

$$-0.0001205t = \ln(0.449) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.449)}{0.0001205} \approx 6\,645.08$$

El organismo vivió aproximadamente hace 6 645 años.

14. La semivida del radio es de 1 690 años. Si queda el 10% de una cantidad original de radio, ¿cuánto tiempo hace que este radio se creó?

a) 5614 b) 5890 c) 6023 d) 6132 e) 6242

Respuesta a)

Primero calculamos el valor de la constante de proporcionalidad k , nos basamos en la relación que hay entre el valor de τ y k .

$$k = \frac{\ln(2)}{1690} \approx 0.0004101$$

De esta manera nuestro modelo toma la forma

$$N(t) = N_0 e^{-0.0004101t}$$

10% de una cantidad N_0 se representa por $(0.1)N_0$, por lo que queremos encontrar el valor del tiempo t tal que

$$N_0 e^{-0.0004101t} = 0.1N_0 \Rightarrow e^{-0.0004101t} = 0.1$$

Por lo tanto

$$-0.0004101t = \ln(0.1) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.1)}{0.0004101} \approx 5614.69 \text{ años}$$

15. ¿Qué porción de un gramo de carbono 14 se tendrá después de 3 000 años?

- a) 0.2 gr. b) 0.3 gr. c) 0.7 gr. d) 0.8 gr. e) 0.9 gr.

Respuesta c)

El valor de la constante k para el $C - 14$ es de $k = 0.0001205$, por lo que nuestra función toma la forma

$$N(t) = N_0 e^{-0.0001205t}$$

Nos indican que hay 1 gramo de $C - 14$ en un tiempo de 3 000 años, en símbolos

$$N(3\,000) = N_0 e^{-0.0001205(3\,000)} = e^{-0.3615} \approx 0.69663$$

Así que habrá aproximadamente 0.7 gramos.

16. Si el 20% de un elemento radioactivo desaparece en un año, calcula la semivida.

- a) 1 año b) 2.3 años c) 3 años d) 3.1 años e) 3.5 años

Respuesta d)

20% de un elemento radiactivo desaparece, quiere decir que el 80% de este material radiactivo permanece aún, esto sucede en un año, por esta razón se tiene el modelo

$$N(1) = N_0 e^{-k} = 0.8N_0 \Rightarrow e^{-k} = 0.8$$

Por lo tanto

$$-k = \ln(0.8) \Rightarrow k = -\ln(0.8) \approx 0.22314$$

Recordemos que la relación entre la semivida τ y la constante de proporcionalidad k es:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0.22314} \approx 3.106$$

Así la semivida del elemento es de 3.1 años

17. De una tumba africana se extrajo pelo humano que contenía sólo 51% del carbono - 14 del tejido viviente ¿Cuándo fue sepultado el cuerpo?

- a) 5 000 b) 5 588 c) 5800 d) 6100 e) 6250

Respuesta b)

Permanece el 51% de $C - 14$ así se tiene

$$N(t) = N_0 e^{-0.0001205t} = 0.51N_0$$

Por lo cual

$$e^{-0.0001205t} = 0.51 \Rightarrow -0.0001205t = \ln(0.51)$$

De esta forma

$$t = -\frac{\ln(0.51)}{0.0001205} \approx 5\,587.92$$

El cuerpo fue enterrado aproximadamente hace 5 588 años

18. La semivida del Estroncio 90 (^{90}Sr) es de 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{90}Sr se desintegra en 25 años. La masa restante después de 40 años, correcta hasta el miligramo más cercano es:

- a) 2.468 b) 3.749 c) 5.172 d) 6.284 e) 7.916

Respuesta e)

La relación entre la semivida τ y la constante de proporcionalidad k como sabemos es:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k}$$

En este caso $\tau = 25$, así

$$k = \frac{\ln(2)}{25} \approx 0.02773$$

nuestro modelo es de la forma

$$N(t) = 24e^{-0.02773t}$$

Calculemos la masa N en $t = 40$.

$$N(40) = 24e^{-0.02773(40)} \approx 7.916 \text{ mg}$$

19. Un isótopo de sodio - 24 (^{24}Na) tiene una semivida de 15 horas. Una muestra de este isótopo tiene una masa de 2g. La cantidad que queda después de 60 horas es:

- a) 0.125 gr b) 0.150 gr c) 0.175 gr d) 0.345 gr e) 0.562 gr

Respuesta a)

La relación entre la semivida τ y la constante de proporcionalidad está dada por

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k}$$

Así, tendremos

$$15 = \frac{\ln(2)}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{15} \approx 0.0462$$

Así, nuestro modelo toma la forma

$$N(t) = 2e^{-0.0462t} \text{ y } N(60) = 2e^{-0.0462(60)} \approx 0.125 \text{ gramos}$$

PROBLEMAS INTERÉS COMPUESTO CONTINUO

Consideremos una cuenta de ahorro que se abre con un depósito inicial de P_0 pesos y que obtiene un interés con una tasa anual r . Si existen $P(t)$ pesos en la cuenta en el instante t y el interés es compuesto en el instante $t + \Delta t$, esto significa que se suman $rP(t)\Delta t$ pesos de interés a la cuenta en ese instante. Así

$$P(t + \Delta t) = P(t) + rP(t)\Delta t$$

Por lo que

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = rP(t)$$

El interés compuesto continuo surge de considerar el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, de esta manera, se tiene la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Esta ecuación diferencial, ya la hemos resuelto y tiene como solución a la función

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Ejemplo.

Si se prestan \$5000.00 pesos a una tasa de interés del 12% anual compuesto continuamente y el préstamo va a ser reembolsado en un pago final de un año, ¿cuánto debe reembolsar el prestatario?

Solución.

Llamemos P al monto que se va a reembolsar, como $P_0 = 5\,000$, $r = 0.12$ y $t = 1$ nuestro modelo toma la forma

$$P = 5\,000e^{0.12} \approx 5637.4842$$

Así debe de reembolsar \$5 637.50

20. Supongamos que se depositan \$ 1000, con un interés compuesto continuo anual del 8% ¿cuál es su balance final. ¿Cuánto gana de intereses después de 5 años?

a) \$100.65 b) \$ 203.45 c) 350 d) 491.8 e) 502.25

Respuesta d)

En este caso, tenemos $r = 0.08$, $t = 5$, $P_0 = 1\,000$, así nuestro modelo toma la forma

$$P(5) = 1\,000e^{0.08(5)} \approx 1491.8246$$

Como invirtió \$1 000.00 inicialmente y recibe \$1 491.80 al final, ha ganado \$ 491.80

21. Descubres en el "cuarto de chácharas" un libro vencido de la biblioteca por el que tu tatarabuelo debe una multa de 30 centavos exactamente hace 100 años. Si la multa vencida crece de manera exponencial a una tasa de interés compuesta continua anual de 5% ¿cuánto tendría que pagar si regresara el día de hoy?

a) \$10.25 b) \$15.90 c) \$20.50 d) 40.65 e) \$44.52

Respuesta e)

El tiempo es de 100 años, $t = 100$, la multa es de treinta centavos $P_0 = 0.3$ y la tasa de interés del 5%, es decir $r = 0.05$, así nuestro modelo toma la forma

$$P(100) = 0.3e^{0.05(100)} \approx 44.5239$$

Así el tatarabuelo debería pagar \$44.52 pesos

22. Al nacer su primer hijo una pareja deposita \$ 5000 en una cuenta de ahorros que paga un interés anual compuesto continuo del 6%, con acumulación de intereses ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta cuando el hijo tenga 18 años?

a) \$13 250.2 b) \$14 723.4 c) \$ 15 356.1 d) \$ 20345.3 e) \$25 123

Respuesta b)

En este problema tenemos $P_0 = 5\,000$, $r = 0.06$, $t = 18$, así nuestro modelo toma la forma

$$P(18) = 5\,000e^{0.06(18)} \approx 14\,723.39776$$

El hijo tendrá aproximadamente \$14 723.40

23. Se depositan \$ 875 en un banco ¿cuánto se tendrá al cabo de dos años si el interés es de 9.5% y se capitaliza continuamente?

a) \$950.35 b) \$990.25 c) \$1020.70 d) \$1 058.10 e) \$1100.2

Respuesta d)

En este caso se tiene $P_0 = 875$, $t = 2$, $r = 0.095$, así se tiene

$$P(2) = 875e^{0.095(2)} \approx 1\,058.093$$

Se tendrá \$1 058.10

24. Si depositamos una cantidad P_0 pesos al 8% de interés compuesto continuamente, ¿en cuánto tiempo se habrá duplicado el capital depositado?

a) 2 años b) 5 años 3 mese c) 7 años 9 meses d) 8 años 8 meses
e) 9 años 1 mes

Respuesta d)

Nuestro modelo se puede escribir de la forma

$$P(t) = P_0 e^{0.08t} = 2P_0$$

Por lo tanto

$$e^{0.08t} = 2 \Rightarrow 0.08t = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0.08} \approx 8.664 \text{ años}$$

Así, el capital inicial depositado se duplicará aproximadamente en 8 años y 8 meses

25. Pedro desea hacer un regalo a su hijo recién nacido, para cuando cumpla 10 años, desea invertir dinero en un certificado de depósito (CD). Se requiere que el CD tenga un valor de \$ 120 000.00 ¿Cuánto debe de invertir si el CD paga 9% anual capitalizada continuamente?

a) 20 000 b) 30245 c) 48 788 d) 53 234 e) 60 000

Respuesta c)

Supongamos que se invierte P_0 pesos, como el CD paga 9% continuamente, después de 10 años se tendrá

$$P_0 e^{0.09(10)} = 120\,000 \Rightarrow P_0 = \frac{120\,000}{e^{0.09(10)}} \approx 48\,788.36$$

-
26. Si una cantidad de dinero invertida se duplica en 10 años a interés continuo ¿cuánto tiempo tardara en triplicarse la cantidad inicial?

a) 10.3 años b) 12.4 años c) 14.6 años d) 15.85 años e) 20 años

Respuesta d)

Nuestro modelo es la función $P(t) = P_0 e^{kt}$, como la inversión se duplica a los 10 años, entonces

$$P_0 e^{10k} = 2P_0 \Rightarrow e^{10k} = 2 \Rightarrow 10k = \ln(2)$$

así

$$k = \frac{\ln(2)}{10} \approx 0.0693147$$

Queremos el valor del tiempo t en donde la inversión inicial se triplique, así se tiene

$$P_0 e^{0.0693147t} = 3P_0 \Rightarrow 0.0693147t = \ln(3) \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{0.0693147} \approx 15.85 \text{ años}$$

La inversión se triplicará en 15.85 años

27. Suponga que el valor de cierta antigüedad se incrementa con el paso del tiempo y la tasa de aumento de su valor, en cualquier momento, es proporcional a su valor en este tiempo. Si el valor de la pieza era de \$25 000 hace diez años y su valor actual es de \$35 000 ¿en cuántos años se espera que su valor ascienda a los \$50 000?

a) 10.6 años b) 12 años c) 13.7 años d) 14.2 años. e) 15 años

Respuesta a)

En este caso se tiene $P_0 = 25\,000$, así nuestro modelo es la forma

$$P(t) = 25\,000 e^{kt}$$

Hace diez años su valor era de \$25 000, en símbolos

$$P(-10) = 35\,000e^{-10k} = 25\,000 \Rightarrow -10k = \ln\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$k = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{5}{7}\right) \approx 0.033547$$

Queremos el tiempo t , tal que la pieza tenga un valor de 50 000, es decir.

$$35\,000e^{0.033547t} = 50\,000 \Rightarrow 0.033547t = \ln\left(\frac{10}{7}\right)$$

Por lo tanto

$$t = \frac{1}{0.033547}\ln\left(\frac{10}{7}\right) \approx 10.6004$$

En 10.6 años aproximadamente, la pieza tendrá un valor de \$50 000 pesos

PROBLEMAS VARIOS

Contaminación de lagos.

Consideremos a Q la cantidad total de contaminantes en un lago con volumen de agua V en el tiempo t , en el lago entra agua limpia y sale agua contaminada, supongamos que la misma cantidad de agua que entra es la que sale con una rapidez r supongamos también que el agua que entra se mezcla inmediatamente con el agua del lago.

Obtención de la ecuación diferencial.

Rapidez con que cambia $Q = -$ rapidez con que salen los contaminantes

El signo menos representa que la contaminación Q disminuye. En el tiempo t la concentración de los contaminantes es Q/V y el agua que contiene esta concentración sale a una rapidez r . Así

$$\text{Rapidez con que salen contaminantes} = - \text{rapidez de salida (concentración)} = r \frac{Q}{V}$$

Por lo que la ecuación diferencial es

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{r}{V}Q$$

Separamos variables

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{r}{V}dt$$

integrando

$$Q(t) = Q_0 e^{-rt/V}$$

28. El lago Erie tiene un volumen de 0.46 miles de km^3 y una salida r de $175 km^3/año$, ¿Cuánto tardará el 90% de la contaminación en eliminarse?

- a) 2 años b) 3 años c) 5 años d) 6 años e) 6.4 años

Respuesta d)

En este caso tenemos

$$\frac{r}{V} = \frac{175}{460} = 0.38043$$

Así que nuestro modelo para el tiempo t es:

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.38t}$$

El 90% de la contaminación sea eliminado, quiere decir que queda solo el 10% de ella, en símbolos

$$Q = 0.1Q_0$$

De la ecuación se tendrá

$$Q_0 e^{-0.38t} = 0.1Q_0 \Rightarrow e^{-0.38t} = 0.1 \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.1)}{0.38} \approx 6.06 \text{ años}$$

Aproximadamente en 6 años se tendrá sólo un 10% de la contaminación.

29. El lago Ontario tiene un volumen V de 1.6 km^3 y una razón de salida r de $209 \text{ km}^3/\text{año}$, el tiempo que requiere para que el 80% de la contaminación se elimine es de:

a) 10 años 1 mes

b) 11 años 5 meses

c) 12 años

d) 12 años 4 meses

e) 13 años

Respuesta d)

En este caso se tiene

$$\frac{r}{V} = \frac{209}{1600} = 0.13$$

Nuestro modelo toma la forma

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.13t}$$

Si queremos que se elimine el 80% de la contaminación, entonces sólo quedará el 20%, de esta forma se tiene

$$Q_0 e^{-0.13t} = 0.2Q_0 \Rightarrow e^{-0.13t} = 0.2 \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.2)}{0.13} \approx 12.38 \text{ años}$$

Quedará el 20% de la contaminación, a los 12 años 4 meses.

ELIMINACIÓN DE SUSTANCIAS.

La cantidad N de cierta sustancia en el torrente sanguíneo del cuerpo humano, medida como el exceso sobre el nivel natural de la sustancia en la sangre, disminuye proporcionalmente a dicho exceso, en símbolos

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Como hemos resuelto esta ecuación diferencial, se tiene

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

En donde λ es la constante de eliminación de la sustancia y $T = \frac{1}{\lambda}$ es el tiempo de eliminación.

30. Un hombre que no ha ingerido alcohol tiene un 0% de alcohol en sangre, supongamos que este hombre ha ingerido alcohol y tiene una recuperación de 2.5 horas. ¿cuánto tiempo tardará en reducir la concentración del exceso de alcohol en la sangre del 0.1% al 0.02%?

a) 1 hora b) 2 horas c) 3.4 horas d) 3.9 horas e) 4.02 horas

Respuesta e)

Para calcular la constante de eliminación λ , se despeja del tiempo de eliminación,

$$T = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

Por lo tanto

$$N(t) = N_0 e^{-0.4t}$$

Queremos el tiempo que tarda la concentración de alcohol de pasar de 0.1% al 0.02%, en símbolos

$$0.1e^{-0.4t} = 0.02 \Rightarrow e^{-0.4t} = \frac{0.02}{0.1} = 0.2$$

Por lo tanto

$$-0.4t = \ln(0.2) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.2)}{0.4} \approx 4.02 \text{ horas}$$

-
31. Una compañía ha dejado de anunciar su camioneta. La compañía planea volver a anunciarla cuando las ventas hayan disminuido al 75% de su tasa inicial. Si después de una semana sin promoción, las ventas han disminuido a 95% de su tasa original, ¿cuándo esperaría la compañía volver a anunciarla?

a) 10 días b) 15.3 días c) 25.4 días d) 30.7 días e) 33.65 días

Respuesta e)

Nuestro Modelo es de la forma

$$S(t) = S_0 e^{-\lambda t}$$

Sabemos que

$$S(1) = S_0 e^{-\lambda} = 0.95S_0 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.95 \Rightarrow \lambda = -\ln(0.95) \approx 0.05129$$

Queremos

$$S(t) = S_0 e^{-0.05129t} = 0.75S_0 \Rightarrow e^{-0.05129t} = 0.75 \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.75)}{0.05129} \approx 5.608$$

Por lo tanto, se espera volver a anunciarla en 33.65 días.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II 2024 – 2 EC.

Instrucciones: Cada una de las preguntas siguientes tiene cinco opciones de respuesta, una de las cuales es correcta; la opción que elijas márcala en la hoja de respuestas anexo en donde deberás además escribir tu nombre y número de cuenta.

Anexa tus procedimientos en hojas aparte, pues el profesor que te califique tiene la opción de revisarlos y en general, son pertinentes al momento de solicitar alguna revisión.

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

1. La derivada de la función $f(x) = \sin^3(3x - 5)$ es:

- a) $\sin^3(3x - 5)(3)$ b) $3\sin^2(3x - 5)$ c) $3\sin^2(3x - 5)(3)$
 d) $\cos^3(3)$ e) $\frac{9}{2}\sin(3x - 5)\sin(6x - 10)$

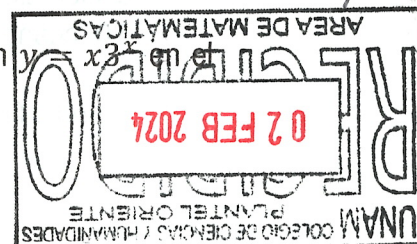
2. La ecuación de la recta tangente a la función tangente en el punto $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ es:

- a) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)(x - \sqrt{3})$ b) $y - \sqrt{3} = \sec^2(x)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
 c) $y = 4x - \frac{4\pi}{3}$ d) $y = 4x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$
 e) $y - 4x = \frac{\pi}{3}$

3. La concentración C en partes por millón, de un medicamento en el cuerpo durante t horas después de la ingestión está dada por la función $C(t) = 10t^2e^{-t}$. Encuentre el valor máximo de la concentración y en dónde se presenta.

- a) $t = 0,0$ b) $t = 1,10$ c) $t = 2,40$ d) $t = 2, \frac{40}{e^2}$ e) $t = 1,10e^{-1}$

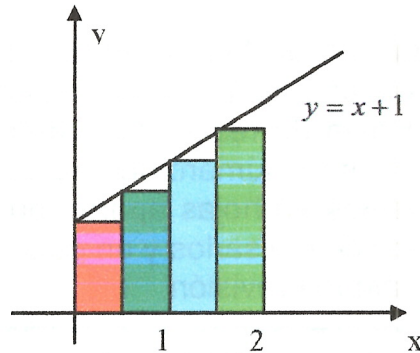
4. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(1,3)$ es:



- a) $y = (3 + \ln(27))x - \ln(27)$ b) $y = 3x + \ln(27)$.
 c) $y = \ln(27)x + 3$ d) $y - 3 = x3^x(x - 1)$
 e) $y - 3 = (3^x + x3^x \ln(3))(x - 1)$.

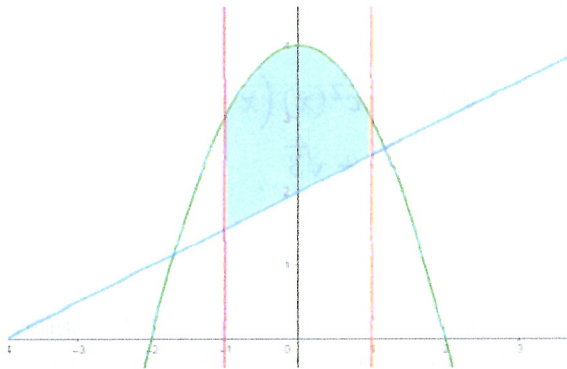
LA INTEGRAL DEFINIDA.

5. El área del polígono indicado, inscrito es:



- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

6. El área de la región comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$, y las recta $y = \frac{1}{2}x + 2$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ (ver figura) se puede calcular mediante:



- a) $A = \int_{-1}^1 (2x - 1) dx$
 b) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx + \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$
 c) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
 d) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
 e) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx - \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

7. Una partícula se mueve en línea recta, s representa la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v metros/segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos y a metros/segundos² la aceleración. Con base en lo anterior ¿cuál es la velocidad v si $a = 40$, $v = 10$, cuando $s = 5$?

- a) $v(t) = 10$ b) $v(t) = 20t + 10$ c) $v(t) = 40$.

d) $v(t) = 40t$ e) $v(t) = 40t + 5$

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

8. La integral

$$\int x e^{x^2} dx$$

es:

a) $x e^{x^2} + c$ b) $e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + c$ c) $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$
d) $x + e^{x^2} + c$ e) $e^{x^2} + 2x + c.$

9. El valor de la integral

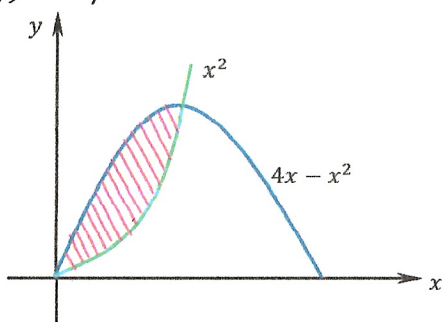
$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

es:

a) $-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + c$
b) $2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x)$ c) $-x^2 \cos(x) + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen}(x) + c$
d) $\frac{1}{3} x^3 \cos(x) + c$ e) $\frac{1}{3} x^3 - \cos(x) + c$

10. El volumen del sólido que forma la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$ al girarlas alrededor del eje x es:

(El volumen V de un sólido de revolución girada alrededor del eje x está dada por $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$).



a) $\frac{3}{4} \pi$ b) 1 c) $\frac{32}{6} \pi$ d) $\frac{2}{3} \pi$ e) $\frac{32}{3} \pi$

11. La tasa de crecimiento natural de una población de cierta ciudad es proporcional a la población misma. Si ésta se incrementa de 40 000 a 60 000 habitantes en 40 años, ¿cuánto llegará a ser de 80 000 habitantes?

- a) 68.63 b) 70.34 c) 75.42 d) 79.99 e) 81.21

12. Pedro desea hacer un regalo a su hijo recién nacido, para cuando cumpla 10 años, desea invertir dinero en un certificado de depósito (CD). Se requiere que el CD tenga un valor de \$ 120 000.00 ¿Cuánto debe de invertir si el CD paga 9% anual capitalizada continuamente?

- a) 20 000 b) 30245 c) 48 788 d) 53 234 e) 60 000

Escala:

Número de aciertos	Calificación
0 – 6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11 – 12	10

Elaboraron el examen.

Profesores:

Ortega Cruz Arcelia.

Hernández Velasco Francisco Javier.

SOLUCIÓN AL EXAMEN EXTRAORDINARIO.

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

1. La derivada de la función $f(x) = \sin^3(3x - 5)$ es:

a) $\sin^3(3x - 5)(3)$

b) $3\sin^2(3x - 5)$

c) $3\sin^2(3x - 5)(3)$

d) $\cos^3(3)$

e) $\frac{9}{2}\sin(3x - 5)\sin(6x - 10)$

Respuesta e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2(3x - 5) \cos(3x - 5) (3) = 9\sin^2(3x - 5) \cos(3x - 5) \\ &= 9\sin(3x - 5)\sin(3x - 5) \cos(3x - 5) = \frac{9}{2}\sin(3x - 5)\sin(6x - 10) \end{aligned}$$

2. La ecuación de la recta tangente a la función tangente en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ es:

a) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)(x - \sqrt{3})$

b) $y - \sqrt{3} = \sec^2(x)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = 4x - \frac{4\pi}{3}$

d) $y = 4x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

e) $y - 4x = \frac{\pi}{3}$

Respuesta d)

Primero verificamos si el punto dado está en la gráfica de la función, con este fin, evaluamos a la función en el punto dado

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

También pertenece al primer caso, calculemos la derivada general

$$m(x) = f'(x) = \sec^2(x) \Rightarrow m\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = (2)^2 = 4$$

Aplicando la ecuación de la recta punto pendiente, se tiene

$$y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4x - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow y = 4x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

3. La concentración C en partes por millón, de un medicamento en el cuerpo durante t horas después de la ingestión está dada por la función $C(t) = 10t^2e^{-t}$. Encuentre el valor máximo de la concentración y en dónde se presenta.

a) $t = 0,0$

b) $t = 1,10$

c) $t = 2,40$

d) $t = 2, \frac{40}{e^2}$

e) $t = 1,10e^{-1}$

Respuesta d)

Calculemos a la primera derivada

$$C'(t) = 20te^{-t} - 10t^2e^{-t} = 10te^{-t}(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 2$$

Ahora para determinar si el punto crítico es un máximo o mínimo, derivemos nuevamente a la función C .

$$\begin{aligned} C''(t) &= 20e^{-t} - 20te^{-t} - (20te^{-t} - 10t^2e^{-t}) \\ &= 10e^{-t}(-t^2 - 4t + 2) \end{aligned}$$

Evaluamos el punto crítico

$$C''(2) = 10e^{-2}(-4 - 8 + 2) = -100e^{-2} < 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada hay un máximo en $t = 2$, cuya imagen es

$$C(2) = 10(2)^2e^{-2} = \frac{40}{e^2}$$

4. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x3^x$ en el punto $(1,3)$ es:

- a) $y = (3 + \ln(27))x - \ln(27)$ b) $y = 3x + \ln(27)$. c) $y = \ln(27)x + 3$
d) $y - 3 = x3^x(x - 1)$ e) $y - 3 = (3^x + x3^x \ln(3))(x - 1)$.

Respuesta b)

Verifiquemos que el punto pertenece a la gráfica de la función, $f(1) = 1(3^1) = 3$, así se verifica que el punto pertenece a la gráfica de la función, ahora, procedamos a calcular la pendiente de la recta.

$$f'(x) = 3^x + x(3^x)\ln(3)$$

La pendiente la encontramos evaluando a la derivada en el punto dado

$$m = f'(1) = 3^1 + 1(3^1)\ln(3) = 3 + 3\ln(3) = 3 + \ln(27)$$

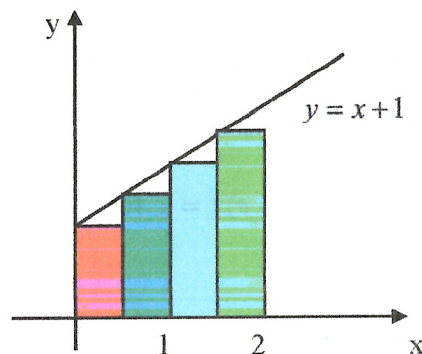
Empleamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente.

$$y - 3 = (3 + \ln(27))(x - 1) = (3 + \ln(27))x - 3 - \ln(27)$$

$$y = (3 + \ln(27))x - \ln(27)$$

LA INTEGRAL DEFINIDA.

5. El área del polígono indicado, inscrito es:



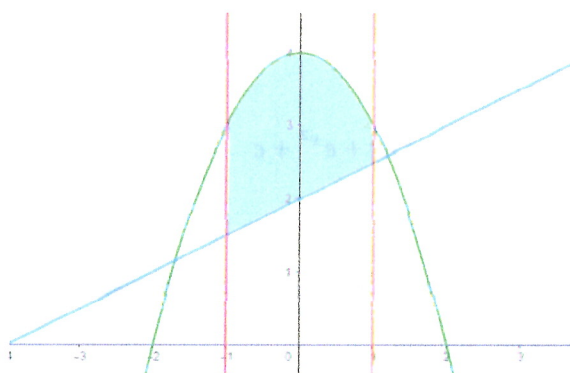
- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{7}{2}$

Respuesta e)

Las bases de cada rectángulo tienen una longitud de 0.5, el polígono esta por debajo de la recta con ecuación $y = x + 1$, los puntos que consideraremos para calcular las alturas de dichos rectángulos son $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$, las alturas son respectivamente $f(0) = 1, f(0.5) = 1.5, f(1) = 2, f(1.5) = 2.5$ el área A del polígono es

$$A = 0.5(1 + 1.5 + 2 + 2.5) = 0.5(7) = 3.5 = \frac{7}{2}$$

6. El área de la región comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$, y las recta $y = \frac{1}{2}x + 2$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ (ver figura) se puede calcular mediante:



- a) $A = \int_{-1}^1 (2x - 1) dx$
 b) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx + \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$
 c) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
 d) $A = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$
 e) $A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx - \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

Respuesta: c)

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ determina la región bajo la cual vamos a integrar, es decir, los límites de nuestra integral.

Podemos ver en la imagen que $y = 4 - x^2 > y = \frac{1}{2}x + 2$ en nuestra región, así que para hallar el área hay que hacer la resta.

$$4 - x^2 - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)$$

Entonces el área estará dada por

$$A = \int_{-1}^1 4 - x^2 - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) dx$$

7. Una partícula se mueve en línea recta, s representa la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v metros/segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos y a metros/segundos² la aceleración. Con base en lo anterior ¿quién es la velocidad v si $a = 40, v = 10$, cuando $s = 5$?

- a) $v(t) = 10$ b) $v(t) = 20t + 10$ c) $v(t) = 40$. d) $v(t) = 40t$
 e) $v(t) = 40t + 5$

Respuesta: b)

Como la aceleración a es la derivada de la velocidad v se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = \int 40 dt = 20t + c$$

Sustituyendo los valores conocidos

$$v(0) = 20(0) + c = 10 \Rightarrow c = 10$$

Así la velocidad en función del tiempo t es $v(t) = 20t + 10$.

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

8. La integral

$$\int x e^{x^2} dx$$

Es:

$$a) x e^{x^2} + c \quad b) e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + c \quad c) \frac{1}{2} e^{x^2} + c \quad d) x + e^{x^2} + c \quad e) e^{x^2} + 2x + c$$

Respuesta c)

Podemos observar que la derivada de la función x^2 es $2x$, así el cambio de variable adecuado es

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

Por lo tanto

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

9. El valor de la integral

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

es:

$$a) -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + c \quad b) 2x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x) \\ c) -x^2 \cos(x) + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen}(x) + \quad d) \frac{1}{3} x^3 \cos(x) + c \quad e) \frac{1}{3} x^3 - \cos(x) + c$$

Respuesta a)

Hagamos

$$u = x^2, dv = \operatorname{sen}(x) dx$$

entonces

$$du = 2x dx, v = -\cos(x)$$

Por lo tanto

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))(2x dx) = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$$

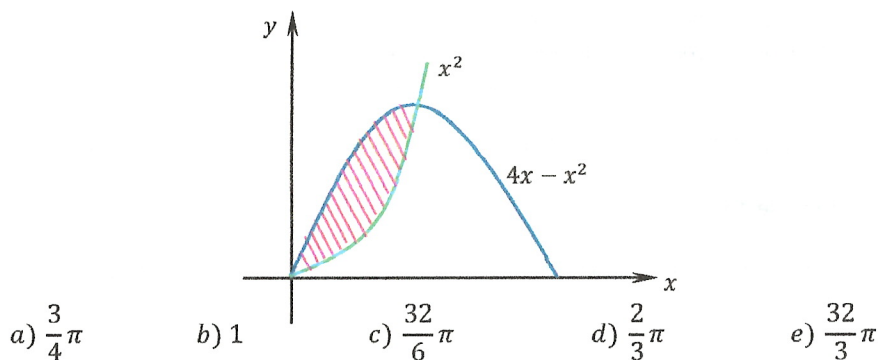
Debemos de integrar la última integral, por partes nuevamente, en este caso hacemos

$$u = x, dv = \cos(x) dx$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))(2x dx) dx \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \left(x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx \right) \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \left(x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx \right) \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + c
 \end{aligned}$$

10. El volumen del sólido que forma la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$ al girarlas alrededor del eje x



Respuesta e)

Primero encontremos los puntos de intersección, con este fin igualemos las imágenes

$$x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 2x(x - 2) = 0$$

Tiene raíces $x = 0, x = 2$ que son los puntos de intersección de las dos parábolas, así el volumen V está dado por la integral

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 (4x - x^2)^2 - x^4 dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - 8x^3) dx \\
 &= \pi \left(\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{16}{3} 8 - 32 \right) = \frac{32}{3} \pi
 \end{aligned}$$

11. La tasa de crecimiento natural de una población de cierta ciudad es proporcional a la población misma. Si ésta se incrementa de 40 000 a 60 000 habitantes en 40 años, ¿cuánto llegará a ser de 80 000 habitantes?

a) 68.63 b) 70.34 c) 75.42 d) 79.99 e) 81.21

Respuesta a)

Nos preguntan el tiempo en qué la población crecerá a 80 000 habitantes. El modelo matemático es del tipo $P(t) = P_0 e^{kt}$ Inicialmente había 40 000 habitantes y en 40 años aumenta a 60 000, esto quiere decir que

$$P(t) = 40\,000 e^{kt} \text{ y } P(40) = 40\,000 e^{40k} = 60\,000 \Rightarrow e^{40k} = \frac{60\,000}{40\,000} = \frac{3}{2}$$

$$40k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{40} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.0101$$

Nuestro modelo toma la forma
ahora de

$$P(t) = 40\,000 e^{0.0101t} = 80\,000 \Rightarrow e^{0.0101t} = 2 \Rightarrow 0.0101t = \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.0101} \approx 68.63 \text{ años}$$

12. Pedro desea hacer un regalo a su hijo recién nacido, para cuando cumpla 10 años, desea invertir dinero en un certificado de depósito (CD). Se requiere que el CD tenga un valor de \$ 120 000.00 ¿Cuánto debe de invertir si el CD paga 9% anual capitalizada continuamente?

a) 20 000 b) 30 245 c) 48 788 d) 53 234 e) 60 000

Respuesta c)

Supongamos que se invierte P_0 pesos, como el CD paga 9% continuamente, después de 10 años se tendrá

$$P_0 e^{0.09(10)} = 120\,000 \Rightarrow P_0 = \frac{120\,000}{e^{0.09(10)}} \approx 48\,788.36$$

Escala:

Número de aciertos	Calificación
0 – 6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11 – 12	10

Elaboraron el examen.

Profesores:

Ortega Cruz Arcelia..

Hernández Velasco Francisco Javier.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL ORIENTE

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

2020

Instrucciones: Cada una de las siguientes preguntas tiene cinco opciones de respuesta, una de las cuales es correcta; la opción que elijas márcala en la hoja de respuestas anexo en donde deberás además escribir tu nombre y número de cuenta.

Anexa tus procedimientos, pues el profesor que te califique tiene la opción de revisarlos y en general, son pertinentes al momento de solicitar alguna revisión. No puedes emplear tu calculadora o teléfono celular.

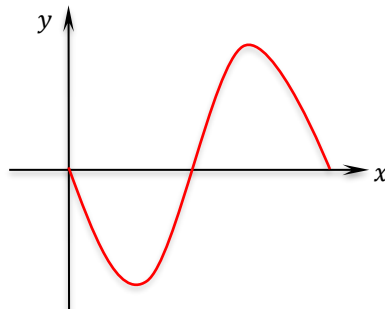
1. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = (x - 1)e^x + 3 \ln(x) + 2 \quad \text{en } x = 1$$

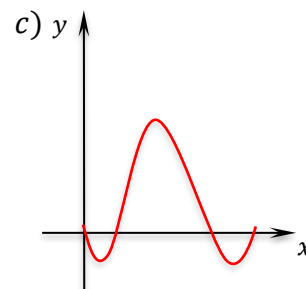
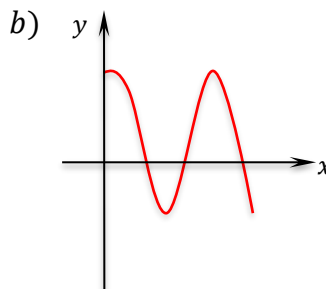
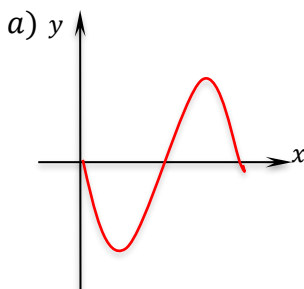
- a) $y - 2 = (e + 3)(x - 1)$ b) $y - 2 = e(x - 1)$ c) $y - 2 = (e - 3)(x - 1)$
d) $ex + 3x - y + 1 = 0$ e) $3x - y - e - 1 = 0$

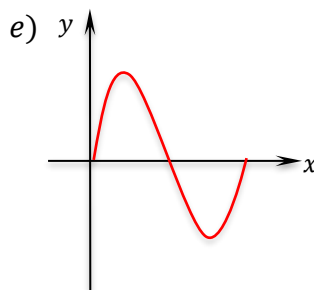
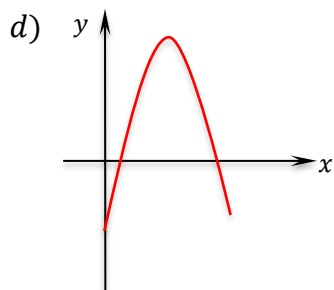
(2 puntos)

2. Se representa la gráfica de la función $f(x) = -2\sin(x)$



¿Cuál de las gráficas siguientes, representa a la gráfica de su derivada?





(3 puntos)

3. El resultado de $\frac{d}{dx} \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^{-2x}} \right)$ es:

a) $\frac{3e^x + 2}{e^x + 1}$

b) $\frac{-e^{-x} - 2}{e^x + 1}$

c) $\frac{e^{-2x}}{e^x + 1}$

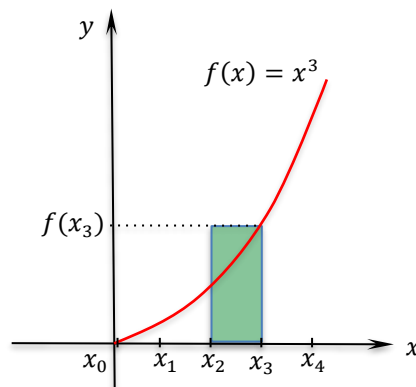
d) $\frac{3e^{-x} + 2}{e^x + 1}$

e) $\frac{3e^{-x} - 2}{e^x + 1}$

(2 puntos)

4.

Aproxima el área de la región que está debajo de la gráfica de la función $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 2$. Divide el dominio en 4 partes iguales, llama a los puntos de división por x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 (pero da el valor de ellos) después calcula $f(x_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ahora, calcula la longitud de cada subintervalo de $[0, 2]$, multiplica esta longitud por su altura $f(x_i)$ correspondiente, suma estos productos, esa suma es la aproximación pedida.
(1 punto)



a) 2

b) $\frac{25}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{9}{4}$

e) 4

5. Utiliza las propiedades de la integral y los resultados dados para calcular la integral

$$\int_0^{\pi} (x + \sin(x))^2 dx$$

$$\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2} \pi^3, \quad \int_0^{\pi} x \sin(x) dx = \pi, \quad \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \pi$$

a) 3π

b) $\frac{1}{3} \pi^2 + \frac{1}{2} \pi + 1$

c) $\frac{1}{3} \pi^3 + \frac{5}{2} \pi$

d) $\frac{1}{3} \pi^3 - \frac{5}{2} \pi$

e) 2

(1 punto)

6. La regla de correspondencia de la función f dada en la integral

$$\int f(x) dx = \ln(x^2 + 3) + c$$

es:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3 + 3} \quad b) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} \quad c) f(x) = \frac{2}{x^2 + 3} \quad d) f(x) = \frac{1}{x + 3} \quad e) f(x) = \frac{1}{x}$$

(3 puntos)

7. Dado que

$$\int_2^x f(t) dt = 2x^2 - 8$$

f puede tener la regla de correspondencia siguiente:

$$a) f(x) = x^2 + c \quad b) f(x) = 2x^2 \quad c) f(x) = 4x \quad d) f(x) = \sqrt{x} - 8 \quad e) f(x) = x - 8$$

(3 puntos)

8. Al efectuar la integral

$$\int e^x \cos(x) dx$$

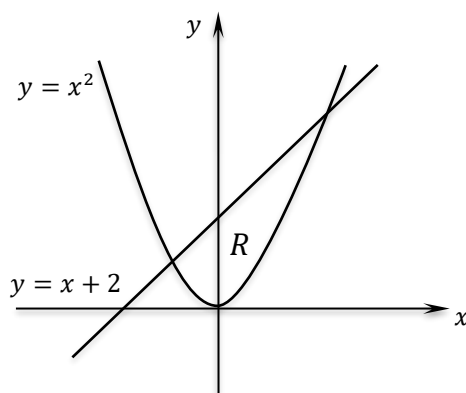
resulta

$$a) e^x(\sin(x) + \cos(x)) + c \quad b) \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + c \quad c) e^x \sin(x) + c$$

$$d) -e^x \sin(x) + c \quad e) -e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + c$$

(2 puntos)

9. El área de la región R que está comprendida entre las gráficas de la parábola con regla de correspondencia $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$, está determinada por:



$$a) \int_{-2}^1 x + 2 - x^2 dx \quad b) \int_{-1}^2 x^2 - x - 2 dx \quad c) \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx$$

$$d) \int_{-1}^2 x^2 - x - 2 \, dx$$

$$e) \int_{-2}^2 x + 2 - x^2 \, dx$$

(1 punto)

10. El área de la región comprendida entre las gráficas de la parábola dada por la función $f(x) = 4x^2$ y la recta $y = 6x - 2$ es:

a) 2 b) -1 c) 12 d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{2}$

(2 puntos)

11. ¿Cuánto tiempo tarda un depósito de \$5000.00 en duplicarse si gana 10% de interés anual compuesto continuamente?

a) 5.78 años b) 5.5 años c) 4.65 años d) 6.93 años e) 1 año

(1 punto)

12. La tasa de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ de una población P de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo t en días ($0 \leq t \leq 10$).
Es decir,

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{t}$$

en donde k es una constante.

El tamaño inicial de la población P es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. La población P de bacterias al tiempo t está determinado por:

a) $P(t) = 100t^{3/2} + 500$ b) $P(t) = 150t^{3/2}$ c) $P(t) = 150t^{3/2} + 500$

d) $P(t) = 100t^{3/2}$ e) $P(t) = -100t^{3/2} + 500$

(1 punto)

Escala:

Aciertos	Calificación
Hasta 11	5
12 a 14	6
15 a 16	7
17 a 18	8
19 a 20	9
21 a 22	10

Elaboraron el examen:

Profesora Torres Hernández Lidia.

Profesor Hernández Velasco Francisco Javier

Respuestas.

Pregunta	Respuesta
1	A
2	D
3	A
4	B
5	C
6	B
7	C
8	B
9	C
10	D
11	D
12	A

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.

- Cruse, Allan B. y Lehman, Millianne. *Lecciones de Cálculo 1*. Fondo de Cultura Educativo Iberoamericano, México 1987.
- Deborah Huhes – Hallett y Andrew M. Gleason, et al. *Cálculo aplicado*. Cecsá.
- Earl W. Swokowski, *Cálculo con geometría analítica*. Wadsworth Internacional Iberoamérica, México 1982.
- G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas.
- Larson – Hostetler – Edwards, *Cálculo*. Sexta Edición, Volumen 1. Mc Graw – Hill, México.
- Programas de estudio de cálculo diferencial e integral I y II.
- Simon Mochon, *Quiero entender el cálculo*, G. E. Iberoamérica. México 1994.
- Stewart, James. *Cálculo. Conceptos y Contextos*. Thomson, México, 1999.
- Zill, Dennis G. *Cálculo con Geometría Analítica*. G. E. Iberoamérica. México. 1987.
- Edwards y Penney, *Cálculo con Geometría Analítica* (4º Edición) Prentice Hall Hispanoamericana.
- Elliott Mendelson, *Introducción al Cálculo* McGraw - Hill
- Alejandra G. Bravo, et al, *Cálculo Diferencial e Integral II* (Guía para el examen extraordinario), Departamento de Impresiones del Plantel del Oriente del CCH.
- Louis Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica*, (4ª Edición) Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana
- Morris Kline, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. Fondo de Cultura Económica, México.
- Álvaro Pinzón, *Cálculo II, Integral*, (Edición revisada) Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana
- *Cálculo I, diferencial*. Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

- Edwin J Purcell - Dale Verberg, *Cálculo con Geometría Analítica*, (6ª Edición) Prentice Hall Hispanoamericana, SA.
- Tom M. Apostol, *Calculus*, (Volumen 1, 2ª Edición)- Editorial Reverté, SA.
- George f. Simmons, Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas, Mc Graw Hill, segunda edición.
- C.H. Edwards, Jr. David E. Penney, Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la Frontera, tercera edición. Prentice Hall.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

- Paul Blanchard, et al, Ecuaciones Diferenciales, Thomson, 1999.
- M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo editorial Iberoamérica, 1990.
- Salinas Patricia, et al. Elementos del Cálculo, Grupo Editorial Iberoamérica, primera edición, 2001.
- Santos Trigo, La función cuadrática. Trillas.
- Smith Roberto, Minton Roland, Cálculo, Mc Graw Hill. Segunda edición. 2003
- Stewart, James. *Cálculo. De una variable, trascendentes tempranas* . Cuarta edición. Thomson, México.